МАИ
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
имени СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

ПРОЧНОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Тематический сборник научных трудов института

ВЫПУСК
467

МОСКВА – 1978

СОДЕРЖАНИЕ

П.А. Белов, А.Н. Елпатьевский

О ДВУХ ПОДХОДАХ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ, ВЫПОЛНЕННЫХ ИЗ НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА

Внедрение в авиационную технику новых материалов вызывает необходимость поисков более эффективных и строгих методов расчета конструкций, связанных со спецификой работы их материалов.

В данной ~~работе~~ рассматриваются два подхода к определению напряженно-деформированного состояния конструкций, материал которых имеет коэффициент Пуассона, равный 0,5. Силовые элементы из композиционных материалов на полимерных связующих, различного рода резиновые амортизаторы и прокладки, защитные кожухи, пороховые шашки - вот далеко не полный перечень конструкций и элементов, включающих в себя материалы с $\nu = 0,5$. Особенностью таких материалов является максимальное значение коэффициента Пуассона, при котором уравнения Гука принимают вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{6\mu}\left[2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z\right]; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{6\mu}\left[2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z\right]; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{6\mu}\left[2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y\right], \qquad (1)$$

μ – коэффициент Ламе (модуль сдвига).
Это проявляется в том, что невозможно выразить напряжения через деформации, а значит, и получить полную систему уравнений, решая задачу в перемещениях. Более того, следствием вырожденных уравнений Гука является уравнение неизменности объема

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0, \qquad (2)$$

которое переопределяет систему уравнений теории упругости в перемещениях, так как три функции перемещений U, V и W связаны четырьмя уравнениями (тремя равновесия и одним уравнением неизменности объема).

Таким образом, объектом исследования становятся физические уравнения, в которые необходимо ввести дополнительную функцию так, чтобы она позволила однозначно определять нормальные напряжения через деформации и привела бы в соответствие количество неизвестных количеству уравнений.

Уравнения Гука допускают определение разностей нормальных напряжений, откуда следует, что вводимая функция (назовем ее S [1, 2]) должна быть аддитивным и одинаковым для всех трех напряжений членом. В соответствии с этим физические уравнения примут вид

$$\sigma_x = 2\mu\varepsilon_x + S; \qquad \sigma_y = 2\mu\varepsilon_y + S; \qquad \sigma_z = 2\mu\varepsilon_z + S. \qquad (3)$$

Модифицированные этим способом уравнения позволяют записать полную систему уравнений в перемещениях:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0; \qquad \mu\Delta U + \frac{\partial S}{\partial x} + X_p = 0; \\ &\mu\Delta V + \frac{\partial S}{\partial y} + Y_p = 0; \qquad \mu\Delta W + \frac{\partial S}{\partial z} + Z_p = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где Δ (....) – трехмерный оператор Лапласа.
Из системы (4) непосредственно следует, что S удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta S + \frac{\partial X_p}{\partial x} + \frac{\partial Y_p}{\partial y} + \frac{\partial Z_p}{\partial z} = 0.$$

Традиционным способом доказывается, что система (3)–(4) в совокупности с оставшимися неизменными физическими уравнениями и граничными условиями имеет единственное решение. Это позволяет доказать теорему: при точном решении классической и модифицированной систем и последующем предельном переходе к $\nu = 0,5$ их решения совпадут.

При решении в напряжениях справедливость теоремы очевидна, так как в этом случае уравнения модифицированной и классической систем при $\nu = 0,5$ совпадают и в силу единственности приводят к одному и тому же решению. Тот же результат даст и решение в перемещениях с произвольным ν и последующим предельным переходом.

Если обозначить решения классической системы через σ_j и ε_j, а модифицированной – через $\bar{\sigma}_j$ и $\bar{\varepsilon}_j$, то, как доказано выше,

$$\lim_{\nu \to 0,5} \sigma_x = \bar{\sigma}_x ; \qquad \lim_{\nu \to 0,5} \sigma_y = \bar{\sigma}_y ; \qquad \lim_{\nu \to 0,5} \sigma_z = \bar{\sigma}_z$$

или, если заменить напряжения деформациями,

$$\lim_{\nu \to 0,5} \left[2\mu\varepsilon_x + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\theta \right] = 2\mu\bar{\varepsilon}_x + S ;$$

$$\lim_{\nu \to 0,5} \left[2\mu\varepsilon_y + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\theta \right] = 2\mu\bar{\varepsilon}_y + S ;$$

$$\lim_{\nu \to 0,5} \left[2\mu\varepsilon_z + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\theta \right] = 2\mu\bar{\varepsilon}_z + S .$$

При сложении этих выражений с учетом того, что

$$\bar{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_y + \bar{\varepsilon}_z = 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{\nu \to 0,5} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0,$$

получится соотношение

$$\lim_{\nu \to 0,5} \mu \frac{\theta}{1-2\nu} = S \qquad \text{или} \qquad \lim_{\nu \to 0,5} \left[\mu \frac{\theta}{1-2\nu} - S \right] = 0 .$$

Если определить S при произвольном коэффициенте Пуассона как

$$S = \mu \frac{\theta}{1-2\nu} , \tag{5}$$

то можно добиться полного соответствия классической системы уравнений в перемещениях и модифицированной:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu\varepsilon_x + 2\nu\left(\mu \frac{\theta}{1-2\nu}\right) ; \\ \sigma_y &= 2\mu\varepsilon_y + 2\nu\left(\mu \frac{\theta}{1-2\nu}\right) ; \\ \sigma_z &= 2\mu\varepsilon_z + 2\nu\left(\mu \frac{\theta}{1-2\nu}\right) ; \end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
&\theta=(1-2\nu)\,\frac{S}{\mu}\,;\\
&\mu\Delta U+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\theta}{1-2\nu}\right)+X_p=0\,;\\
&\mu\Delta V+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\theta}{1-2\nu}\right)+Y_p=0\,;\\
&\mu\Delta W+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\theta}{1-2\nu}\right)+Z_p=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Действительно, все уравнения классической системы, зависящие от коэффициента Пуассона (6), при переходе $\nu\to 0{,}5$ дают уравнения модифицированной системы (3)–(4). Теорема доказана.

В качестве примера рассмотрено определение деформированного состояния упругого бруса, лежащего в абсолютно жестком и гладком пазу.

Решение классической системы уравнений ищется через функцию перемещений

$$U=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\quad\text{и}\quad V=2(1-\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(1-2\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\,,$$

которая определяется из уравнения, полученного подстановкой этих соотношений в уравнения Ламе: $\Delta\Delta\varphi=0$, и граничных условий

$$U(b,y)=U(-b,y)=0\,;\qquad V(x,0)=0\,;\quad \tau(x,H)=0\,;$$

$$\tau(b,y)=\tau(-b,y)=0\,;\qquad \tau(x,0)=0\,;\quad \sigma_y(x,H)=Y_{0\nu}+\sum_{n=1}^{\infty}Y_{n\nu}\cos kx\,.$$

Решение этого уравнения с учетом симметрии дает

$$\varphi=-\frac{1}{2}\left[A_0-\nu(A_0+B_0)\right]x^2y+\frac{1}{6}\left[B_0-\nu(A_0+B_0)\right]y^3+\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_{1n}\,\mathrm{sh}\,ky+\right.$$
$$\left.+\,b_{2n}\,ky\,\mathrm{ch}\,ky\right]\frac{\cos kx}{k^2}$$

Удовлетворив граничным условиям, можно получить перемещения

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_{n\nu}H\sin kx}{2\mu\left[1+\frac{kH}{\mathrm{ch}\,kH\,\mathrm{sh}\,kH}\right]}\left[\frac{\mathrm{ch}\,k(H-y)}{\mathrm{ch}\,kH\,\mathrm{sh}\,kH}+\left(1-\frac{y}{H}\right)\frac{\mathrm{sh}\,ky}{\mathrm{ch}\,kH}-(1-2\nu)\frac{\mathrm{ch}\,ky}{kH\,\mathrm{ch}\,kH}\right];$$

$$V=-\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}\frac{Y_{o\nu}}{2\mu}y+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_{n\nu}H\cos kx}{2\mu\left[1+\frac{kH}{\operatorname{ch}kH\operatorname{sh}kH}\right]}\left[\frac{\operatorname{sh}k(H-y)}{\operatorname{ch}kH\operatorname{sh}kH}-\left(1-\frac{y}{H}\right)\frac{\operatorname{ch}ky}{\operatorname{ch}kH}-\right.$$

$$\left.-2(1-\nu)\frac{\operatorname{sh}ky}{kH\operatorname{ch}kH}\right],$$

где $k=\frac{\pi n}{b}$.

Решение модифицированной системы сводится к интегрированию уравнения Пуассона для S и последующего интегрирования уравнений Ламе с известными правыми частями:

$$S=S_o(y)+2\mu\sum_{n=1}^{\infty}A\operatorname{ch}ky\cos kx\ ;$$

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_1\operatorname{ch}ky+Ay\operatorname{sh}ky\right]\sin kx\ ;$$

$$V=\sum_{n=1}^{\infty}\left[Ay\operatorname{ch}ky+C_2\operatorname{sh}ky\right]\cos kx .$$

Удовлетворив граничным условиям, с учетом того, что неизменность объема накладывает на коэффициенты связь $A=k(C_1-C_2)$, получим формулы для перемещений в следующем виде:

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_{n\nu}H\sin kx}{2\mu\left[1+\frac{kH}{\operatorname{ch}kH\operatorname{sh}kH}\right]}\left[\frac{\operatorname{ch}k(H-y)}{\operatorname{ch}kH\operatorname{sh}kH}+\left(1-\frac{y}{H}\right)\frac{\operatorname{sh}ky}{\operatorname{ch}kH}\right];$$

$$V=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_{n\nu}H\cos kx}{2\mu\left[1+\frac{kH}{\operatorname{ch}kH\operatorname{sh}kH}\right]}\left[\frac{\operatorname{sh}k(H-y)}{\operatorname{ch}kH\operatorname{sh}kH}-\left(1-\frac{y}{H}\right)\frac{\operatorname{ch}ky}{\operatorname{ch}kH}-\frac{\operatorname{sh}ky}{kH\operatorname{ch}kH}\right].$$

Совпадение формул для U и V при $\nu=0,5$ и является следствием доказанной теоремы.

Несмотря на эквивалентность S-подхода и предельного перехода к $\nu=0,5$, введение функции S облегчает логику построения решений. Особенно ярко достоинства S-подхода проявляются при построении соответствующего уравнениям (4) функционала. Для простоты рассмотрена плоская деформация. Для нее вариационное уравнение Лагранжа в случае упругого равновесия [3, 4] имеет вид

$$\iint\left[X_p\delta U+Y_p\delta V\right]dxdy+\oint(X_s\delta U+Y_s\delta V)ds=\iint\left[\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau\delta\gamma\right]dxdy \quad (7)$$

Внешние силы в процессе варьирования не меняются, поэтому можно записать

$$\delta A=\delta\left\{\iint(X_pU+Y_pV)\,dxdy+\oint(X_sU+Y_sV)\,ds\right\},$$

где A – работа внешних сил. Пользуясь уравнением (5), можно записать

$$S\delta\theta = \mu\frac{\theta}{1-2\nu}\delta\theta = \theta\delta\left(\mu\frac{\theta}{1-2\mu}\right) = \theta\delta S.$$

Тогда правая часть уравнения (7) примет вид

$$\iint\left[\mu\delta\varepsilon_x^2 + \mu\delta\varepsilon_y^2 + \frac{\mu}{2}\delta\gamma^2 + \theta\delta S\right]dx\,dy. \qquad (8)$$

Если, следуя Лагранжу [3], освободить систему от связей, наложенных неизменностью объема, путем введения в выражение (8) энергии связи $S\delta\theta$, представляется возможным записать выражение (8), а значит, и уравнение (7) как вариацию интеграла

$$\delta\left[\iint\left(\mu\varepsilon_x^2 + \mu\varepsilon_y^2 + \frac{\mu}{2}\gamma^2 + \theta S - X_p U - Y_p V\right)dx\,dy - \oint\left(X_\nu U + Y_\nu V\right)ds\right] = 0. \qquad (9)$$

Таким образом, получен функционал, освобожденный от связей, накладываемых неизменностью объема, а поэтому представленный в виде

$$\delta\iint\Phi(U, V, S)\,dx\,dy = 0.$$

Применив формулу Остроградского–Грина, можно получить

$$\iint\left[\left(\mu\Delta U + \frac{\partial S}{\partial x} + X_p\right)\delta U + \left(\mu\Delta V + \frac{\partial S}{\partial y} + Y_p\right)\delta V + \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta S\right]dx\,dy +$$

$$+ \oint\left[X_\nu - \mu\left(\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial s}\right) - S\,l\right]\delta U\,ds + \oint\left[Y_\nu - \mu\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial s}\right) - S_m\right]\delta V\,ds = 0.$$

Уравнения, вытекающие отсюда, полностью соответствуют полученным ранее уравнениям (4). Если же функционал (9) сводить не к уравнениям в частных производных, а к обыкновенным дифференциальным уравнениям, то согласно известной процедуре следует положить

$$S(x,y) = \sum^{p} S_k(x)\,\xi_k(y);$$

$$U(x,y) = \sum^{m} U_i(x)\,\varphi_i(y);$$

$$V(x,y) = \sum^{n} V_j(x)\,\psi_j(y).$$

Тогда функционал (9) принимает вид

$$\delta\iint\left[\mu\left(\sum^{m} U_i'\varphi_i\right)^2 + \mu\left(\sum^{n} V_j\psi_j'\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\sum^{m} U_i\varphi_i' + \sum^{n} V_j'\psi_j\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \left(\sum^{m} U_i'\varphi_i + \sum^{n} V_j\psi_j'\right)\sum^{p} S_k\xi_k\right]dx\,dy = \delta A. \qquad (10)$$

Задаваясь системой функций ξ_k, φ_i и ψ_j, функционал (I0) можно привести к виду

$$\delta\int_0^a \Phi(U_1,\dots,U_m, V_1,\dots,V_n, S_1,\dots,S_p)\,dx = 0.$$

Так как он свободен от связей, варьируя по всем $m+n+p$ -независимым функциям, можно получить

$$\int_0^a\Big[\sum^m\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial U_r}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial U_r'}\Big)\delta U_r+\sum^n\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial V_t}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial V_t'}\Big)\delta V_t+$$
$$+\sum^p\frac{\partial\Phi}{\partial S_q}\,\delta S_q\Big]dx+\sum^m\frac{\partial\Phi}{\partial U_r'}\,\delta U_r\Big|_0^a+\sum^n\frac{\partial\Phi}{\partial V_t'}\,\delta V_t\Big|_0^a=0.$$

Отсюда вытекают все необходимые уравнения и естественные граничные условия к ним. Из функционала (I0) следует, что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial S_q}=\sum^m U_i' d_{iq}+\sum^n V_j f_{jq};$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial U_r}=\mu\sum^m U_i b_{ir}+\mu\sum^n V_j' c_{jr}-p_r;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial U_r'}=2\mu\sum^m U_i' a_{ir}+\sum^p S_k d_{kr};$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial V_t}=2\mu\sum^n V_j s_{jt}+\sum^p S_k f_{kt}-q_t;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial V_t'}=\mu\sum^n V_j' r_{jt}+\mu\sum^m U_i c_{it},$$

где через p_r и q_t обозначены обобщенные внешние нагрузки:

$$p_r=\int_0^b (X_p+X_\vartheta)\varphi_r\,dy;\qquad q_t=\int_0^b (Y_p+Y_\vartheta)\psi_t\,dy,$$

а через $a_{ir},\dots, s_{jt}$ – обобщенные жесткости:

$$a_{ir}=\int_0^b \varphi_i\varphi_r\,dy;\qquad b_{ir}=\int_0^b \varphi_i'\varphi_r'\,dy;\qquad c_{jr}=\int_0^b \psi_j\varphi_r'\,dy;$$

$$c_{it}=\int_0^b \varphi_i'\psi_t\,dy;\qquad d_{iq}=\int_0^b \varphi_i\xi_q\,dy;\qquad d_{kr}=\int_0^b \xi_k\varphi_r\,dy;$$

$$f_{jq}=\int_0^b \psi_j'\xi_q\,dy;\qquad f_{kt}=\int_0^b \xi_k\psi_t'\,dy;\qquad r_{jt}=\int_0^b \psi_j\psi_t\,dy;$$

$$s_{jt}=\int_0^b \psi_j'\psi_t'\,dy.$$

Если подставить все введенные обозначения в функционал (I0), то он сведется к следующей системе уравнений и граничных условий:

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum^{m} U_i' d_{iq} + \sum^{n} V_j f_{jq} = 0;\\
&\mu \sum^{m} \left(U_i'' 2a_{ir} - U_i b_{ir} \right) - \mu \sum^{n} V_j' c_{jr} + \sum^{p} S_k' d_{kr} + p_r = 0;\\
&\mu \sum^{m} U_i' c_{it} + \mu \sum^{n} \left(V_j'' r_{jt} - V_j 2s_{jt} \right) - \sum^{p} S_k f_{kt} + q_t = 0;\\
&\left(2\mu \sum^{m} U_i' a_{ir} + \sum^{p} S_k d_{kr} - p_r \right) \delta V_r \Big|_0^a = 0;\\
&\left(\mu \sum^{n} V_j' r_{jt} + \mu \sum^{m} U_i c_{it} - q_t \right) \delta V_t \Big|_0^a = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (II)
$$

Таким образом, получена система трех комплектов уравнений и граничных условий к ним. Построение этой системы совсем не очевидно с точки зрения предельного перехода $\nu \to 0{,}5$. Поэтому реализация решения, например, в форме метода В.З. Власова [5] при случайном выборе аппроксимирующих функций и использование предельного перехода в полученном решении может привести к неверному результату.

ЛИТЕРАТУРА

I. Расчеты на прочность в машиностроении. Под редакцией С.Д. Пономарева и [др.]. Машгиз, 1958.

2. Елпатьевский А.Н., Фирсанов В.В. Плоская деформация конструкций, выполненных из материала с неизменным объемом. – В кн.: Труды МАИ, 1976, вып.362.

3. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Гостехтеориздат, 1950.

4. Лейбензон Л.С. Собрание трудов. Т.I. Изд.АН СССР, 1951.

5. Власов В.З. Избранные труды. Т.Ш. Изд.АН СССР, 1962.

В.Ф. Караванов, Н.Г. Урвачев

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВЫПОЛНЕННОЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВСЕСТОРОННЕГО СЖАТИЯ

Одной из основных особенностей композиционных материалов является малая сдвиговая жесткость, что в определенной мере препят-