МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

№5

ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Тематический сборник научных трудов института

МОСКВА – 1982

СОДЕРЖАНИЕ

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигалко Ю.П., Дмитриева Л.М. Динамика ребристых пластин и оболочек. В. сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. - Казань.: КГУ, 1978, №13, с.3-30.

2. Коноплев Ю.Г., Шишкин А.Г. Свободные колебания пластин и оболочек, ослабленных вырезами или опертых в точках. - В сб..: Исселедования по теории пластин и оболочек.- Казань: Изд-во КГУ, №14, 197 , с.82-99.

3. Власов В.В. Избранные труды. Т.I. - М.: Изд-во АН СССР, 1962, 528с.

4. Шклярчук Ф.Н., Антуфьев Б.А. Деформация тонкой упругой оболочки, нагруженной через жесткую накладку. Изв. вузов Авиационная техника, 1974, №4, с.115-120.

5. Справочник опо теории упругости. - Киев: *Будiвельник*, 1971, 420с.

6. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Физматгиз, 1963, 635с.

УДК 539.3

П.А. Белов

ВАРИАНТ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Для оценки прочности конструкций необходимо наиболее точно знать напряженно-деформированное состояние в зонах краевых эффектов. Однако при наличии больших градиентов напряжений и деформаций исследования на основе классической теории упругости дают результаты, не совпадающие с экспериментальными данными [1 , 2]. Это заставляет исследователей рассматривать более сложные модели упругих сред, в частности моментные [3 , 4 , 5].

В данной работе на основании классической кинематики с помощью принципа возможных перемещений сделана попытка построения линейной теории упругости, в которой были бы учтены "моментные" эффекты. Рассматривается односвязное тело.

Постулируется, что возможная работа внешних сил для моментных сред связана с возможной работой внутренних сил следующим образом:

$$\iiint F_i^{\rho} \delta R_i \, dv + \oiint F_i^{\nu} \delta R_i \, ds = \iiint \sigma_{ij} \, \delta \varepsilon_{ij} \, dv , \qquad (1)$$

где R_i – вектор перемещений

F_i^ρ и F_i^ν – векторы объемных и поверхностных внешних сил;

σ_{ij} – несимметричный тензор полных напряжений;

$\varepsilon_{ij}=\frac{\partial R_i}{\partial x_j}$ – тензор дисторсии.

Компоненты тензора дистросии должны удовлетворять условиям интегрируемости вектора перемещений. Разделяя тензор дистросии на симметричную Q_{ij} и кососимметричную $\omega_k \mathcal{E}_{ijk}$ части, получаем условия интегрируемости в следующем виде:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}=\frac{\partial Q_{j\beta}}{\partial x_\alpha}\mathcal{E}_{\alpha\beta i}, \tag{2}$$

где $\mathcal{E}_{\alpha\beta i}$ – тензор Леви-Чивита.

Пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, домножим вариации уравнений связи (2) на неопределенные множители m_{ij}:

$$\iiint m_{ij}\delta\left(\frac{\partial Q_{j\beta}}{\partial x_\alpha}\mathcal{E}_{\alpha\beta i}-\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}\right)dv=\iiint\left[\frac{\partial m_{kj}}{\partial x_j}\delta\omega_k+\frac{\partial m_{\beta i}}{\partial x_\alpha}\mathcal{E}_{\alpha\beta j}\delta Q_{ij}\right]dv-$$

$$-\frac{1}{2}\oiint\left[\left(\frac{\partial m_{\beta n}}{\partial x_\alpha}\mathcal{E}_{i\alpha\beta}+\frac{\partial m_{\beta i}}{\partial x_\alpha}\mathcal{E}_{n\alpha\beta}+\frac{\partial m_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}\mathcal{E}_{ni\beta}\right)\delta R_i\right]ds=0, \tag{3}$$

где n – направления нормали к поверхности тела.

Обозначим за σ_{ij}^k часть напряжений, связанных с деформациями классическим законом Гука:

$$\sigma_{ij}^k=\mu\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right)+\lambda\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij}, \tag{4}$$

где μ и λ – коэффициенты Ламе; δ_{ij} – дельта Кронекера.

Выпишем для σ_{ij}^k следующее, тождественно равное нулю, выражение:

$$\iiint\left[\frac{\partial\sigma_{ij}^k}{\partial x_j}\delta R_i+\sigma_{ij}^k\delta Q_{ij}\right]dv-\oiint\sigma_{ij}^k\delta R_i\,ds=0. \tag{5}$$

Уравнение (I) не изменится, если в него внести (3) и (5), так как эти выражения равны нулю:

$$\iiint\left\{\left(\frac{\partial\sigma_{ij}^k}{\partial x_j}+F_i^\rho\right)\delta R_i+\left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial x_j}+\sigma_{ij}\mathcal{E}_{ijk}\right)\delta\omega_k+\right.$$

$$\left.+\left(\sigma_{ij}^k+\frac{\partial m_{\beta i}}{\partial x_\alpha}\mathcal{E}_{\alpha\beta j}-\frac{\sigma_{ij}+\sigma_{ji}}{2}\right)\delta Q_{ij}\right\}dv+$$

$$+\oiint\left\{\left[F_i^\nu-\sigma_{in}^k-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{\beta n}}{\partial x_\alpha}\mathcal{E}_{i\alpha\beta}+\frac{\partial m_{\beta i}}{\partial x_\alpha}\mathcal{E}_{n\alpha\beta}+\frac{\partial m_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}\mathcal{E}_{ni\beta}\right)\right]\delta R_i\right\}ds=0. \tag{6}$$

Распоряжаясь неопределенными множителями m_{ij} так, чтобы статические множители при $\delta\omega_k$ и δQ_{ij} обращались бы в ноль, придем в свободной вариационной задаче. Исключая из полученных уравнений σ_{ij}^k, получаем

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i^{\rho} = 0; \quad \sigma_{ij}\,\partial_{ijk} + \frac{\partial m_{kj}}{\partial x_j} = 0; \quad \oint\!\!\oint \left[(F_i^{\nu} - \sigma_{in})\,\delta R_i \right] ds = 0. \quad (7)$$

Оставшиеся уравнения с учетом (4) и (7) запишем в виде

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) + \lambda \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial m_{\beta j}}{\partial x_\alpha}\partial_{i\alpha\beta} + \frac{\partial m_{\beta j}}{\partial x_\alpha}\partial_{j\alpha\beta} + \frac{\partial m_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha}\partial_{ji\beta}\right). \quad (8)$$

Уравнения (7) совпадают с уравнениями статики моментной теории упругости, поэтому постулируем, что m_{ij} связаны с перемещениями физическими уравнениями моментной теории:

$$m_{ij} = \frac{4\mu L^2}{(1+\xi)}\left[\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \xi \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\beta}\,\partial_{\alpha\beta\gamma}\,\partial_{ij\gamma}\right], \quad (9)$$

где $\omega_k = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}\,\partial_{\alpha\beta k}$.

В соответствии с (4) и (9) система уравнений формулируемой теории упругости сводится к следующей:

$$\left.\begin{aligned} &\mu\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} + (\mu+\lambda)\frac{\partial^2 R_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} + F_i^{\rho} = 0; \\ &\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\alpha}\delta_{ij} + 2L^2(2\mu+\lambda)\frac{\partial^3 R_\alpha}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\alpha} + 2L^2\frac{\partial F_j^{\rho}}{\partial x_i}; \\ &\oint\!\!\oint\left[(F_i^{\nu} - \sigma_{in})\,\delta R_i\right] ds = 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Как видно из (10), если объемные силы имеют потенциал, закон парности касательных напряжений выполняется, то сформулированную здесь теорию лишь условно можно назвать моментной. Однако в девиаторных частях напряжений остаются "моментные" члены, которые при больших градиентах деформаций могут дать существенно отличающийся от классического решения результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. А э р о Э.Л., К у в ш и н с к и й Е.В., Континуальная теория асимметричной упругости, ФТТ, 1960г. 6, №9

2. С а в и н Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. -М.: Гостехиздат, 1951.

3. С е д о в Л.И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. - ПММ, 1968, т.32, вып.5.

4. К о й т е р В.Т. Моментные напряжения в теории упругости. - В сб.: Механика, №3 (91), 1965.

5. Т у п и н Р.А. Теории упругости, учитывающие моментные напряжения. - В сб.: Механика, №3 (91), 1965.