



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ИМ. СЕРГЕЯ ОРДЖОНИКИДЗЕ

NS

**ПРОЧНОСТЬ
ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Тематический сборник научных трудов института

МОСКВА - 1987

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
А в х и м о в и ч Б.М. Оптимизация толщин тонкостенных теплозащитных оболочек и пластин с учетом надежности	4
А н т у ф ь е в Б.А. Колебания дискретно закрепленной оболочки, несущей сосредоточенную массу	8
Б е л о в П.А. Вариант моментной теории упругости	13
В о й н о в В.С. К расчету круговых торových оболочек, заполненных жидкостью и закрепленных по двум параллелям	16
Е л я т ь е в с к и й А.Н., Г а в в а Л.М. Расчет конструктивно-анизотропных пластин	21
И ш к о в а А.Г., Б е з у х о в а Н.Н. Вынужденные колебания неоднородного элемента конструкции	26
К о н о в а л о в Б.А. Определение остаточной прочности оболочки из композиционного материала методом приведенной ширины	30
К о с т р о в В.И. Формирование уравнений подкрепления модуля тонкостенной конструкции большого прогиба и переменной толщины	36
К р и в о л у ц к а я И.И. Уравнения термоупругости толстых трехслойных оболочек с несущими слоями из композиционного материала и легким заполнителем	40
Л у р ь е С.А. Метод однородных решений и некоторые его обобщения	45
М о в ч а н А.А. Долговечность элементов конструкции при наложении вибрационного пути пластического деформирования на повторно-статический	49
С м о л ь с к и й В.М. Упрощенное моделирование внешнего воздействия на элементы конструкций летательного аппарата	53
Т р а п е з и н И.И., Н е в с к а я Т.В. Некоторые случаи изгиба кольцевой пластины с регулярно расположенными односторонними радиальными ребрами	57
Ф и р с а н о в В.В. Метод расчета круглой изгибаемой пластинки из несжимаемого материала	61
Ш к л я р ч у к Ф.Н., Т ь т ь н и к о в Н.П. Уравнения колебаний скошенной тонкостенной конструкции типа крыла переменной стреловидности	65

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигалко Ю.П., Дмитриева Л.М. Динамика ребристых пластин и оболочек. В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. - Казань.: КГУ, 1978, №13, с.3-30.
2. Коноплев Ю.Г., Шишкин А.Г. Свободные колебания пластин и оболочек, ослабленных вырезами или опертых в точках. - В сб.: Исследования по теории пластин и оболочек. - Казань: Изд-во КГУ, №14, 1977, с.82-99.
3. Власов В.В. Избранные труды. Т.1. - М.: Изд-во АН СССР, 1962, 528с.
4. Шклярчук Ф.Н., Антуфьев Б.А. Деформация тонкой упругой оболочки, нагруженной через жесткую накладку. Изв. вузов Авиационная техника, 1974, №4, с.115-120.
5. Справочник по теории упругости. - Киев: Будівельник, 1971, 420с.
6. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. - М.: Физматгиз, 1963, 635с.

УДК 539.3

П.А. Белов

ВАРИАНТ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Для оценки прочности конструкций необходимо наиболее точно знать напряженно-деформированное состояние в зонах краевых эффектов. Однако при наличии больших градиентов напряжений и деформаций исследования на основе классической теории упругости дают результаты, не совпадающие с экспериментальными данными [1, 2]. Это заставляет исследователей рассматривать более сложные модели упругих сред, в частности, моментные [3, 4, 5].

В данной работе на основании классической кинематики с помощью принципа возможных перемещений сделана попытка построения линейной теории упругости, в которой были бы учтены "моментные" эффекты. Рассматривается односвязное тело.

Постулируется, что возможная работа внешних сил для моментных сред связана с возможной работой внутренних сил следующим образом:

$$\iiint V F_i^p \delta R_i dv + \iint S F_i^v \delta R_i ds = \iiint \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dv, \quad (I)$$

где R_i - вектор перемещений

F_i^{ρ} и F_i^{ν} - векторы объемных и поверхностных внешних сил;

σ_{ij} - несимметричный тензор полных напряжений;

$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$ - тензор дисторсии.

Компоненты тензора дисторсии должны удовлетворять условиям интегрируемости вектора перемещений. Разделяя тензор дисторсии на симметричную Q_{ij} и кососимметричную $\omega_k \varepsilon_{ijk}$ части, получаем условия интегрируемости в следующем виде:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial Q_{i\beta}}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta i}, \quad (2)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta i}$ - тензор Леви-Чивита.

Пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, применим вариации уравнений связи (2) на неопределенные множители m_{ij} :

$$\begin{aligned} \iiint m_{ij} \delta \left(\frac{\partial Q_{i\beta}}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) dv = \iiint \left[\frac{\partial m_{kj}}{\partial x_j} \delta \omega_k + \frac{\partial m_{\beta i}}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta i} \delta Q_{ij} \right] dv - \\ - \frac{1}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial m_{\alpha n}}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{i\alpha\beta} + \frac{\partial m_{\beta i}}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{n\alpha\beta} + \frac{\partial m_{\beta\alpha}}{\partial x_k} \varepsilon_{n i\beta} \right) \delta R_i \right] ds = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

где n - направления нормали к поверхности тела.

Обозначим за σ_{ij}^k часть напряжений, связанных с деформациями классическим законом Гука:

$$\sigma_{ij}^k = \mu \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\alpha} \delta_{ij}, \quad (4)$$

где μ и λ - коэффициенты Ламе; δ_{ij} - дельта Кронекера.

Выпишем для σ_{ij}^k следующее, тождественно равное нулю, выражение:

$$\iiint \left[\frac{\partial \sigma_{ij}^k}{\partial x_j} \delta R_i + \sigma_{ij}^k \delta Q_{ij} \right] dv - \iint \sigma_{ij}^k \delta R_i ds = 0. \quad (5)$$

Уравнение (1) не изменится, если в него внести (3) и (5), так как эти выражения равны нулю:

$$\begin{aligned} \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_{ij}^k}{\partial x_j} + F_i^{\rho} \right) \delta R_i + \left(\frac{\partial m_{kj}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^k \varepsilon_{ijk} \right) \delta \omega_k + \right. \\ \left. + \left(\sigma_{ij}^k + \frac{\partial m_{\beta i}}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta j} - \frac{\sigma_{ij} + \sigma_{ji}}{2} \right) \delta Q_{ij} \right\} dv + \\ + \iint \left\{ \left[F_i^{\nu} - \sigma_{in}^k - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{\beta n}}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{i\alpha\beta} + \frac{\partial m_{\beta i}}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{n\alpha\beta} + \frac{\partial m_{\beta\alpha}}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{n i\beta} \right) \right] \delta R_i \right\} ds = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

Распоряжаясь неопределенными множителями m_{ij} так, чтобы статические множители при $\delta \omega_k$ и δQ_{ij} обращались бы в ноль, приходим в свободной вариационной задаче. Исключая из полученных уравнений σ_{ij}^k , получаем

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + F_i^p = 0; \quad \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ijk} + \frac{\partial m_{kj}}{\partial x_j} = 0; \quad \oint \left[(F_i^v - \bar{\sigma}_{in}) \delta R_i \right] ds = 0. \quad (7)$$

Оставшиеся уравнения с учетом (4) и (7) запишем в виде

$$\bar{\sigma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\alpha} \delta_{ij} + 2 \left(\frac{\partial m_{\beta j}}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{\alpha \beta} + \frac{\partial m_{\beta j}}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{\alpha \beta} + \frac{\partial m_{\beta \alpha}}{\partial x_\alpha} \varepsilon_{j i \beta} \right). \quad (8)$$

Уравнения (7) совпадают с уравнениями статики моментной теории упругости, поэтому постулируем, что m_{ij} связаны с перемещениями физическими уравнениями моментной теории:

$$m_{ij} = \frac{4\mu L^2}{(1+\xi)} \left[\frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} + \xi \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x_\beta} \varepsilon_{\alpha \beta \gamma} \varepsilon_{ij \gamma} \right], \quad (9)$$

где $\omega_k = -\frac{1}{2} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \varepsilon_{\alpha \beta k}$.

В соответствии с (4) и (9) система уравнений формулируемой теории упругости сводится к следующей:

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 R_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} + F_i^p &= 0; \\ \bar{\sigma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\alpha} \delta_{ij} + 2L^2(2\mu + \lambda) \frac{\partial^3 R_\alpha}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\alpha} + 2L^2 \frac{\partial F_j^p}{\partial x_i}; \\ \oint \left[(F_i^v - \bar{\sigma}_{in}) \delta R_i \right] ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Как видно из (10), если объемные силы имеют потенциал, закон парности касательных напряжений выполняется, то сформулированную здесь теорию лишь условно можно назвать моментной. Однако в девиаторных частях напряжений остаются "моментные" члены, которые при больших градиентах деформаций могут дать существенно отличающийся от классического решения результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. А э р о Э.Л., К у в ш и н с к и й Е.В., Континуальная теория асимметричной упругости, ФТТ, 1960г. 6, №9
2. С а в и н Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. -М.: Гостехиздат, 1951.
3. С е д о в Л.И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. - ПММ, 1968, т.32, вып.5.
4. К о й т е р В.Т. Моментные напряжения в теории упругости. - В сб.: Механика, №3 (91), 1965.
5. Т у п и н Р.А. Теория упругости, учитывающие моментные напряжения. - В сб.: Механика, №3 (91), 1965.