МАИ
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ СЕРГО ОРДЖОНИКИДЗЕ

N7

РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРОЧНОСТЬ, УСТОЙЧИВОСТЬ, КОЛЕБАНИЯ И ДОЛГОВЕЧНОСТЬ

Тематический сборник научных трудов

МОСКВА – 1988

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 539.3 П.А. Белов

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОМПОНЕНТОВ ВЕКТОРА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЧЕРЕЗ КОМПОНЕНТЫ ТЕНЗОРА-ДЕВИАТОРА ДЕФОРМАЦИЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Как известно, формулы Чезаро [I] позволяют определить перемещения через деформацию изменения объема и компоненты тензора-девиатора деформаций. В данной работе предлагается метод определения перемещений только через компоненты тензора-девиатора деформаций. Для геометрически линейных сплошных сред перемещения связаны с деформациями и поворотами соотношениями Коши:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k \text{Э}_{ijk}, \qquad (I)$$

где R_i – вектор перемещения; γ_{ij} – тензор-девиатор деформаций; θ – деформация изменения объема; ω_k – вектор поворотов; δ_{ij} – тензор Кронекера; Э_{ijk} – тензор Леви – Чивиты.

Интегрируя (I), можно получить

$$R_i = r_i^0 + \int_{M_0}^{M_x} \left(\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k \text{Э}_{ijk}\right) dy_j, \qquad (2)$$

где M_0 – точка начала отсчета с радиусом-вектором x_i^0; M_x – произвольная точка с радиусом-вектором x_i; y_j – радиус-вектор точек, лежащих на траектории интегрирования, причем M_0 – начало, M_x – конец траектории интегрирования; r_i^0 – вектор перемещений в точке M_0.

Необходимыми и достаточными условиями (для односвязных сред) существования криволинейных интегралов в (2) или, что то же, условиями непрерывности перемещений являются уравнения

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \gamma_{\beta j}}{\partial x_\alpha} \text{Э}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial x_\alpha} \text{Э}_{ij\alpha}. \qquad (3)$$

Интегрируя (3), можно получить

$$\omega_i = \omega_i^0 + \int_{M_0}^{M_x} \left(\frac{\partial \gamma_{\beta j}}{\partial y_\alpha} \text{Э}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial y_\alpha} \text{Э}_{ij\alpha}\right) dy_j, \qquad (4)$$

где ω_i^0 – вектор поворотов в точке M_0.

Необходимыми и достаточными условиями (для односвязных сред) существования криволинейных интегралов в (4) или, что то же, условиями непрерывности поворотов являются уравнения Сен-Венана

$$\frac{\partial^2\left(\gamma_{\beta\mu} + \frac{1}{3}\theta\delta_{\beta\mu}\right)}{\partial x_\alpha \partial x_m} \text{Э}_{\alpha\beta i} \text{Э}_{m\mu j} = 0. \qquad (5)$$

Соотношение (5) представляет собой тензорное уравнение второго ранга, симметричные компоненты которого не равны нулю. Поэтому его можно рассматривать как алгебраическую систему шести уравнений относительно шести вторых производных от θ. Решая ее относительно указанных неизвестных, получаем

$$\frac{1}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ij}+\gamma_{m\mu}\ni_{\alpha m i}\ni_{\beta\mu j}\right). \qquad (6)$$

Интегрируя (6) дважды, получаем

$$\theta=\theta^0+\theta_i^0(x_i-x_i^0)+3\int_{M_0}^{M_x}(x_i-y_i)\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ij}+\gamma_{m\mu}\ni_{\alpha m i}\ni_{\beta\mu j}\right)dy_j, \qquad (7)$$

где θ^0 – значение θ в точке M_0; θ_i^0 – значение $\frac{\partial\theta}{\partial x_i}$ в точке M_0.

Необходимыми и достаточными условиями (для односвязных сред) существования криволинейных интегралов в (7) или, что то же, условиями дифференцируемости θ являются, по-видимому, неизвестные уравнения совместности

$$\frac{\partial^3(\ldots)}{\partial x_\alpha\partial x_\beta\partial x_q}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ip}+\gamma_{m\mu}\ni_{\alpha m i}\ni_{\beta\mu p}\right)\ni_{pqj}=0. \qquad (8)$$

Система (8) представляет собой тензорное уравнение второго ранга, ненулевые компоненты которого составляют тензор-девиатор. Отметим, что, так как тензор-девиатор имеет только пять линейно независимых компонент, дальнейший поиск квадратур не имеет смысла, потому что для построения следующей квадратуры потребовалось бы десять уравнений для определения третьих производных от функции.

Подставляя (7) в (4), получаем

$$\omega_i=\omega_i^0+\frac{1}{3}\theta_\alpha^0(x_\beta-x_\beta^0)\ni_{\alpha\beta i}+\int_{M_0}^{M_x}\left[\frac{\partial\gamma_{\beta j}}{\partial y_\alpha}\ni_{\alpha\beta i}-(x_p-y_p)\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\times\right.\right. \qquad (9)$$
$$\left.\left.\times\delta_{qj}+\gamma_{m\mu}\ni_{\alpha m q}\ni_{\beta\mu j}\right)\ni_{ipq}\right]dy_j.$$

Подставляя (7) и (9) в (2), получаем

$$R_i=r_i^0+\omega_\alpha^0(x_\beta-x_\beta^0)\ni_{\alpha\beta i}+\frac{1}{3}\theta^0(x_i-x_i^0)+\frac{1}{3}\theta_j^0(x_j-x_j^0)(x_i-x_i^0)-$$
$$-\frac{1}{6}\theta_i^0(x_j-x_j^0)(x_j-x_j^0)+\int_{M_0}^{M_x}\left\{\gamma_{ij}+(x_m-y_m)\frac{\partial\gamma_{\beta j}}{\partial y_\alpha}\ni_{\alpha\beta\mu}\ni_{im\mu}-\frac{1}{2}(x_k-y_k)(x_k-\right.$$
$$-y_k)\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ij}+\gamma_{m\mu}\ni_{\alpha m i}\ni_{\beta\mu j}\right)+(x_i-y_i)(x_k-y_k)\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}\times \qquad (10)$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{kj}+\gamma_{m\mu}\ni_{\alpha m k}\ni_{\beta\mu j}\right)\right\}dy_j.$$

Таким образом, получены формулы типа Чезаро, позволяющие определить вектор перемещений только через компоненты тензора-девиатора деформаций. Построены четыре новые квадратуры соотношений Коши. Получены, по-видимому, неизвестные соотношения совместности (8) третьего порядка, записанные относительно только компонентов тензора-девиатора деформаций.

Соотношение (5) представляет собой тензорное уравнение второго ранга, симметричные компоненты которого не равны нулю. Поэтому его можно рассматривать как алгебраическую систему шести уравнений относительно шести вторых производных от θ. Решая ее относительно указанных неизвестных, получаем

$$\frac{1}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\,\partial x_j}=\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ij}+\gamma_{m\mu}\text{Э}_{\alpha m i}\text{Э}_{\beta\mu j}\right). \tag{6}$$

Интегрируя (6) дважды, получаем

$$\theta=\theta^0+\theta_i^0(x_i-x_i^0)+3\int_{M_0}^{M_x}(x_i-y_i)\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial y_\alpha\,\partial y_\beta}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ij}+\gamma_{m\mu}\text{Э}_{\alpha m i}\text{Э}_{\beta\mu j}\right)dy_j, \tag{7}$$

где θ^0 – значение θ в точке M_0 ; θ_i^0 – значение $\frac{\partial\theta}{\partial x_i}$ в точке M_0.

Необходимыми и достаточными условиями (для односвязных сред) существования криволинейных интегралов в (7) или, что то же, условиями дифференцируемости θ являются, по-видимому, неизвестные уравнения совместности

$$\frac{\partial^3(\ldots)}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta\,\partial x_q}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ip}+\gamma_{m\mu}\text{Э}_{\alpha m i}\text{Э}_{\beta\mu p}\right)\text{Э}_{pqj}=0. \tag{8}$$

Система (8) представляет собой тензорное уравнение второго ранга, ненулевые компоненты которого составляют тензор-девиатор. Отметим, что, так как тензор-девиатор имеет только пять линейно независимых компонент, дальнейший поиск квадратур не имеет смысла, потому что для построения следующей квадратуры потребовалось бы десять уравнений для определения третьих производных от функции.

Подставляя (7) в (4), получаем

$$\omega_i=\omega_i^0+\frac{1}{3}\theta_\alpha^0(x_\beta-x_\beta^0)\text{Э}_{\alpha\beta i}+\int_{M_0}^{M_x}\left[\frac{\partial\gamma_{\beta j}}{\partial y_\alpha}\text{Э}_{\alpha\beta i}-(x_p-y_p)\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial y_\alpha\,\partial y_\beta}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\delta_{qj}+\gamma_{m\mu}\text{Э}_{\alpha m q}\text{Э}_{\beta\mu j}\right)\text{Э}_{ipq}\right]dy_j. \tag{9}$$

Подставляя (7) и (9) в (2), получаем

$$R_i=r_i^0+\omega_\alpha^0(x_\beta-x_\beta^0)\text{Э}_{\alpha\beta i}+\frac{1}{3}\theta^0(x_i-x_i^0)+\frac{1}{3}\theta_j^0(x_j-x_j^0)(x_i-x_i^0)-$$
$$-\frac{1}{6}\theta_i^0(x_j-x_j^0)(x_j-x_j^0)+\int_{M_0}^{M_x}\left\{\gamma_{ij}+(x_m-y_m)\frac{\partial\gamma_{\beta j}}{\partial y_\alpha}\text{Э}_{\alpha\beta\mu}\text{Э}_{im\mu}-\frac{1}{2}(x_k-y_k)(x_k-\right.$$
$$-y_k)\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial y_\alpha\,\partial y_\beta}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ij}+\gamma_{m\mu}\text{Э}_{\alpha m i}\text{Э}_{\beta\mu j}\right)+(x_i-y_i)(x_k-y_k)\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial y_\alpha\,\partial y_\beta}\times$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{kj}+\gamma_{m\mu}\text{Э}_{\alpha m k}\text{Э}_{\beta\mu j}\right)\right\}dy_j. \tag{10}$$

Таким образом, получены формулы типа Чезаро, позволяющие определить вектор перемещений только через компоненты тензора-девиатора деформаций. Построены четыре новые квадратуры соотношений Коши. Получены, по-видимому, неизвестные соотношения совместности (8) третьего порядка, записанные относительно только компонентов тензора-девиатора деформаций.