ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1988

ТОМ 303 № 6

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

УДК 539.3

Академик И.Ф. ОБРАЗЦОВ, А.Н. ЕЛПАТЬЕВСКИЙ, П.А. БЕЛОВ

ОБ ОБЩЕМ ПОДХОДЕ К ФОРМУЛИРОВКЕ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ СРЕД РАЗЛИЧНОЙ ГЛАДКОСТИ

Широкое внедрение вычислительной техники в практику проектирования конструкций приводит к возможности значительного уточнения напряженно-деформированного состояния конструкций и, как следствие, к уменьшению запасов прочности. В связи с этим приобретает актуальность вопрос о точности формулировки уравнений теории упругости, лежащих в основе расчета на прочность, что, в свою очередь, требует сформулировать более точные модели и с их точки зрения оценить точность уравнений теории упругости.

Как известно [1], все внутренние силовые факторы являются силами реакции соответствующих кинематических связей, поэтому чем больше кинематических связей введено в конкретной модели среды, тем многообразнее внутренние силовые взаимодействия в ней. Именно эти соображения лежат в основе предлагаемого подхода к формулировке линейных моделей сред. Последовательно рассмотрены три модели.

Модель I строится на основе соотношений Коши:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) = \epsilon_{ij}, \tag{1}$$

где R_i – вектор перемещений, ϵ_{ij} – тензор деформаций, x_i – радиус-вектор.

Модель II строится на основе расширенной системы соотношений Коши:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} - \Omega_k Э_{ijk}, \tag{2}$$

где Ω_k – вектор малых поворотов, $Э_{ijk}$ – тензор Леви–Чивиты.

Модель III строится на основе расширенной системы соотношений Коши и требования непрерывности перемещений, которое для односвязного тела может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \epsilon_{j\beta}}{\partial x_\alpha} Э_{\alpha\beta i}. \tag{3}$$

При формулировке всех моделей используется принцип возможных перемещений

$$\delta U = \delta A, \tag{4}$$

где U – потенциальная энергия, $A = \iiint X_i R_i dV + \oiint Y_i R_i dF$ – работа внешних сил, F – кусочно-гладкая поверхностно-односвязная поверхность, ограничивающая объемно-односвязный объем среды V, X_i и Y_i – соответственно внешние объемные и поверхностные силы, причем $\delta X_i = \delta Y_i = 0$.

Модель I. Пусть в качестве возможных выбраны те обобщенные перемещения, которые удовлетворяют соотношениям Коши (1). Представим перемещения в виде $R_i = r_i^0 - \omega_k^0(x_j - x_j^0)Э_{ijk} + r_i$, где r_i^0 и ω_i^0 – произвольные постоянные векторы, описывающие жесткое смещение и жесткий поворот тела как единого целого, x_j^0 – радиус-вектор начала отсчета выбранной системы координат, r_i – вектор упругих перемещений. Следуя методу неопределенных множителей Лагранжа [1], внесем (1) в правую часть (4) на симметричном тензоре множителей Лагранжа λ_{ij}

и после преобразований получим

$$\delta U = \iiint \left[\left(\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) \delta r_i + \lambda_{ij} \delta \epsilon_{ij} \right] dV + \oiint (Y_i - \lambda_{ij} n_j) \delta r_i \, dF + \tag{5}$$
$$+ \left[\iiint X_i \, dV + \oiint Y_i \, dF \right] \delta r_i^0 + \left[\iiint X_i (x_j - x_j^0) \mathit{Э}_{ijk} \, dV + \right.$$
$$\left. + \oiint Y_i (x_j - x_j^0) \mathit{Э}_{ijk} \, dF \right] \delta \omega_k^0 .$$

Из этого уравнения непосредственно следует, что потенциальная энергия в общем случае представима в виде суммы трех слагаемых:

$$U = \iiint W(r_i, \epsilon_{ij}) \, dV + \oiint W^*(r_i) \, dF + U^0(r_i^0, \omega_i^0). \tag{6}$$

Чтобы потенциальная энергия не зависела от перемещений и поворотов тела как жесткого целого, следует положить $U^0(r_i^0, \omega_i^0) = 0$. Отсюда получим, что равновесие тела в целом есть критерий независимости физических соотношений от трансляций и поворотов системы координат. Для физически линейных изотропных сред $W(r_i, \epsilon_{ij})$ и $W^*(r_i)$ будут иметь вид

$$W = \tfrac{1}{2} \lambda \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \tfrac{1}{2} C r_i r_i ,$$
$$W^* = \tfrac{1}{2} A r_i r_j n_i n_j + \tfrac{1}{2} B (\delta_{ij} - n_i n_j) r_i r_j , \tag{7}$$

где n_i – единичная нормаль к поверхности F. A, B, C, μ, λ – упругие константы.

В (7) учтено, что на поверхности тела упругость в касательной плоскости и по нормали к ней может быть различной, так как направление по нормали естественным образом выделено.

Полученные выражения позволяют определить внутренние силовые факторы как производную от потенциальной энергии по обобщенной кинематической переменной. Отсюда следует, что модель сплошной среды, обусловленная соотношениями (1), допускает существование внутри объема внутренних силовых факторов типа напряжений $\sigma_{ij} = \partial W / \partial \epsilon_{ij}$ и типа объемных сил $\sigma_i = \partial W / \partial r_i$, а на поверхности – типа внутренних поверхностных сил $p_i = \partial W^* / \partial r_i$.

Расписывая задачу (4), (6), (7) в перемещениях, получим систему уравнений типа Ламе для данной модели:

$$\iiint \left[\mu \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 r_j}{\partial x_i \partial x_j} - C r_i + X_i \right] \delta r_i \, dV + \tag{8}$$
$$+ \oiint \left[Y_i - \mu \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \right) n_j - \lambda \frac{\partial r_k}{\partial x_k} n_i - (A + B) r_j n_j n_i - B r_i \right] \delta r_i \, dF = 0.$$

Если положить $A = B = C = 0$, система (8) выродится в систему уравнений Ламе классической теории упругости, поэтому можно утверждать, что система (8) – простейшее обобщение.

М о д е л ь II. Пусть за возможные перемещения выбраны те, которые удовлетворяют расширенной системе соотношений Коши (2). Вводя их как связи на несимметричном тензоре множителей Лагранжа λ_{ij} и проводя дословно те же рассуждения, что и для уравнения (5), получим

$$U = \iiint W(r_i, \omega_i, \epsilon_{ij}) \, dV + \oiint W^*(r_i) \, dF + U^0(r_i^0, \omega_i^0),$$
$$W = \tfrac{1}{2} \lambda \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \tfrac{1}{2} C r_i r_i + C_1 r_i \omega_i + \tfrac{1}{2} C_2 \omega_i \omega_i , \tag{9}$$

где $\omega_i = \Omega_i - \omega_i^0$ – упругий поворот, W^* и $U^0 = 0$ те же, что и для модели I, C_1, C_2 – дополнительные упругие константы. Определяя внутренние силовые факторы, как и в модели I, найдем, что в модели II наряду с внутренними объемными силами $\sigma_i = \partial W / \partial r_i$ существуют внутренние объемные моменты $\mu_i = \partial W / \partial \omega_i$, которые приводят к непарности касательных напряжений. Полагая $C_1 = C_2 = 0$, мы тем самым обращаем в нуль силы связи $\lambda_{ij} Э_{ijk}$ и освобождаем среду от соответствующих кинематических связей

$$(10) \quad \omega_k = -\frac{1}{2} \frac{\partial r_i}{\partial x_j} Э_{ijk},$$

что приводит модель II к вырождению в модель I. Кроме того, эти соображения приводят к следующему важному, на наш взгляд, выводу: для сред Коссера со стесненным вращением, которые определяются как среды, в которых выполняются кинематические связи (10), не правомерно требовать парности касательных напряжений, так как это равносильно требованию удовлетворения кинематических связей (10) нулевыми силами связи. В связи с этим классическую теории упругости и модель I, являющуюся ее простейшим обобщением, можно рассматривать как первое приближение основного итерационного процесса асимптотического решения модели II с малым параметром l, где l – некоторая норма физических констант $\dfrac{C_1}{\mu}$ и $\dfrac{C_2}{\mu}$.

Модель III. Пусть за возможные перемещения выбраны те, которые удовлетворяют, помимо связей, наложенных расширенной системой соотношений Коши, условиям непрерывности перемещений (3). Вводя их на тензорах неопределенных множителей λ_{ij} и Λ_{ij}, приведем (4) к виду

$$(11) \quad \delta U = \iiint \left[\left(\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) \delta r_i + \left(\frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x_j} - \lambda_{\alpha\beta} Э_{\alpha\beta i} \right) \delta \omega_i + \lambda_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \right.$$
$$\left. + \Lambda_{ij} \delta \frac{\partial \epsilon_{\beta j}}{\partial x_\alpha} Э_{\alpha\beta i} \right] dV + \oiint \left[\left(Y_i - \lambda_{ij} n_j - \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta n_k}{\partial x_j} Э_{ijk} \right) \delta r_i + \right.$$
$$\left. + \Lambda_{\alpha\beta} n_\beta \delta \omega_i (\delta_{ij} - n_i n_j) \right] dF + \tfrac{1}{2} \Sigma \oint \Lambda_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \delta (r_i s_i) \, ds + \delta U^0 (r_i^0, \omega_i^0).$$

Проводя те же рассуждения, что и для уравнений (6) и (9), получим

$$U = \iiint W\left(r_i, \omega_i, \epsilon_{ij}, \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) dV + \oiint W^*(r_i, \omega_i) \, dF + \Sigma \oint W^{**}(r_i) \, ds,$$

$$W = \tfrac{1}{2} \lambda \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \tfrac{1}{2} C r_i r_i + C_1 r_i \omega_i + \tfrac{1}{2} C_2 \omega_i \omega_i + C_3 r_i \kappa_i +$$
$$+ C_4 \omega_i \kappa_i + \tfrac{1}{2} C_5 \kappa_i \kappa_i + C_6 \epsilon_{ij} \kappa_{ij} + \tfrac{1}{2} C_7 \kappa_{ij} \kappa_{ij},$$

$$(12) \quad W^* = \tfrac{1}{2} A r_i r_j n_i n_j + (\tfrac{1}{2} B r_i r_j + B_1 r_i \omega_j + \tfrac{1}{2} B_2 \omega_i \omega_j)(\delta_{ij} - n_i n_j),$$
$$W^{**} = D r_i r_j s_i s_j, \quad U^0 = 0,$$

где

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right), \quad \kappa_k = -\frac{1}{2} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} Э_{ijk},$$

$A, B, C, D, \mu, \lambda, C_i, B_i$ – физические константы материала среды.

Легко убедиться в том, что одной из частных теорий модели III является моментная теория упругости. Действительно, если положить μ, λ, C_5, C_7 отличными от нуля, а все остальные физические константы равными нулю, все уравнения модели III совпадут с соответствующими уравнениями моментной теории упругости. Определим обобщенные внутренние силы как производные от потенциальной энергии по соответствующей кинематической переменной. Получим, что в дополнение к обобщенным силовым факторам модели II модель III допускает существование внутренних моментных напряжений $\mu_{ij} = \partial W / \partial \omega_{i,j}$, внутренних поверхностных моментов $q_i = \partial W^*/\partial \omega_i$ и некоторой интенсивности внутренних сил на ребрах $q = \partial W^{**}/\partial(r_i s_i)$, где s_i, ν_i – орты криволинейной ортогональной системы координат: $n_k = s_i \nu_j Э_{ijk}$.

Приведенное построение ряда простейших моделей дает достаточно ясный метод построения более сложных моделей, на них мы останавливаться не будем. Проведем анализ полученных результатов.

1) Каждой из моделей свойствен эффект типа некоторого внутреннего, свойственного самой среде виклеровского основания. Он порожден допустимостью зависимости потенциальной энергии от упругих перемещений и поворотов.

2) Упругие свойства сред внутри объема и на поверхности различны; более того, на поверхности изотропных сред допустима анизотропия упругих свойств, так как существует естественно выделенное направление – нормаль к поверхности.

3) Парность касательных напряжений есть физическая гипотеза о малости физических постоянных в определяющих уравнениях соответствующих моментных силовых факторов. Тогда, если за малый параметр l выбрать некоторую норму этих физических постоянных, парность будет следовать как первое приближение некоторого асимптотического решения по малому параметру l.

4) Нетрудно заметить, что для каждой модели характерно наличие физических постоянных разной размерности, отличающихся друг от друга на целую степень единицы длины. Поэтому если взять отношение норм физических постоянных одинаковой размерности, можно получить набор характерных для данной среды размеров. Это указывает на наличие масштабного фактора, что, очевидно, имеет значение при моделировании напряженно-деформированного состояния крупногабаритных конструкций на малых образцах. Ясно также, что наличие масштабного фактора будет иметь большое значение при проектировании многослойных композиционных конструкций с толщиной слоя порядка l и, следовательно, использование обобщенных моделей при прочностных расчетах будет необходимо.

5) При асимптотическом исследовании полученных моделей можно понять трудности, испытываемые, в частности, моментной теорией упругости при численном определении новых физических постоянных. Действительно, если во втором приближении основного итерационного процесса априори положить часть физических постоянных равными нулю, полученное уточнение за счет оставшихся постоянных может быть того же порядка, что и величина отброшенных членов. Более того, первое приближение вспомогательного итерационного процесса, имеющее характер краевого эффекта, вносит поправки порядка первого приближения основного итерационного процесса. Поэтому новые физические постоянные целесообразнее определять по показателям затухания краевых эффектов. Большинство же исследователей пыталось определить их из поправок к соответствующим жесткостям, что в свете высказанных двух замечаний и приводило к неудаче.

Московский авиационный институт
им. Серго Орджоникидзе

Поступило
12 VI 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с. 2. *Седов Л.И.* – ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.