МАИ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

ТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

МОСКВА · 1989

СОДЕРЖАНИЕ

8. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

УДК 539.3

С.А. Лурье, П.А. Белов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ УТОЧНЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПОЛОСЫ

Широкое внедрение композиционных материалов в различных отраслях народного хозяйства способствовало развитию исследований, посвященных прикладным уточненным теориям и методам расчета на прочность изделий из композитов. Основной целью таких исследований являлось уточнение напряженного состояния в связи с низкими трансверсальными жесткостями полимерных композитов. Отмеченное обстоятельство не позволяет использовать классические теории балок пластин и оболочек, особенно с точки зрения оценки прочности, так как для полимерных композитов характерна еще и невысокая сдвиговая прочность.

Уточнение напряженного состояния особенно необходимо в окрестности линий возмущения (окрестность закреплений, линии разного изменения механических и геометрических параметров и т.п.), поскольку для композиционных материалов распределение максимальных напряжений, длина зоны краевого эффекта существенно зависят от соотношения механических характеристик материала.

Исчерпывающий ответ на вопрос о построении корректных уточненных вариантов теории композитных балок и оболочек дан в работе В.В. Васильева "Механика конструкций из композиционых материалов" (М.: Машиностроение, 1988. – 271 с.).Указано, что диапазон их применимости ограничен некоторой областью, непосредственно примыкающей к линии возмущения.

В данной работе делается попытка построить метод оценки напряженного состояния непосредственно в зоне краевого эффекта. В отличие от большинства исследований, посвященных этому вопросу, данное уточнение напряженного состояния не приводит к повышению порядка системы соответствующих разрешающих уравнений.

Рассмотрим прямоугольную ортотропную полосу. Разрешающее уравнение, записанное относительно функции перемещений φ в безразмерных координатах x и y, отнесенных к длине L и полуширине $h/2$, запишем в виде

$$t^4 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\right) t^2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \qquad (1)$$

где $\frac{U}{U^{o}}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\sigma_x}{\sigma_x^{o}}=-t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y}+\nu\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}$, $\frac{\tau}{\tau^{o}}=t^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-\nu\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}$,

$$\frac{V}{V^{o}}=(1+2\nu\varepsilon^2+\varepsilon^4)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+(1-\nu^2)\varepsilon^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\quad \frac{\sigma_y}{\sigma_y^{o}}=-t^2\int_0^y\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}dy+\nu\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y},$$

$$t=\frac{h}{2L}\sqrt[4]{\frac{E_{xx}}{E_{yy}}},\quad \nu=\frac{E_{xy}}{\sqrt{E_{xx}E_{yy}}},\quad g=\frac{G}{\sqrt{E_{xx}E_{yy}}},\quad \varepsilon=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1-\nu^2}{g}-2\nu\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1-\nu^2}{g}-2\nu\right)-1}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $U^{o}, V^{o}, \sigma_x^{o}, \tau^{o}, \sigma_y^{o}$ – нормирующие множители, имеющие соответствующие размерности; t, ν, ε, g – малые параметры.

Представим уравнение (I) в виде системы двух уравнений второго порядка, выделяя при этом малый параметр $\delta=\varepsilon^2 t^2$:

$$\begin{cases}\frac{t^2}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\Phi\,,\\ \delta\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0\,.\end{cases}\tag{2}$$

Граничные условия на краях полосы могут быть статическими, кинематическими и смешанными. Запишем их в виде

$$\begin{aligned}&x=\pm 1 \qquad n^{+}(\varphi)=f_1^{+}, \qquad n^{-}(\varphi)=f_1^{-};\\ &y=\pm 1 \qquad m(\varphi)=f_2,\end{aligned}\tag{3}$$

где n^{+}, n^{-}, m – граничные операторы.

Будем считать, что на краях полосы заданы статические или кинематические граничные условия и тип их может меняться при переходе через угловые точки.

Покажем, что при разложении решения задачи (2)-(3) по малому параметру, процедура построения решения сводится к итерационному процессу.

Представим функцию Φ в следующем виде:

$$\Phi(x,y)=\sum_{n=0}^{n=N}\Phi_n(x,y)\,\delta^{n}.\tag{4}$$

Тогда второе уравнение системы (2):

$$\frac{\partial^2\Phi_n}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2\Phi_{(n-1)}}{\partial x^2}.\tag{5}$$

Решение уравнения (5) может быть записано с помощью рекуррентного соотношения

$$\Phi_n(x,y)=\psi_n''(x)-\iint\frac{\partial^2\Phi_{(n-1)}}{\partial x^2}dy\,dy\,,$$

или $$\Phi_n(x,y)=\sum_{m=0}^{m=n}(-1)^{(n-m)}\frac{y^{2(n-m)}}{[2(n-m)]!}\,\frac{d^{2(n-m+1)}\psi_m(x)}{dx^{2(n-m+1)}}.\tag{6}$$

Решив первое уравнение системы (2) с учетом формулы (6), получим

$$\varphi_n(x,y)=\overset{\circ}{\varphi}_n(x,y)+\sum_{m=0}^{m=n}\sum_{k=0}^{k=n-m}\frac{(-1)^{(n-m+k+1)}\,y^{2(n-m-k)}}{\omega^{2(k+1)}[2(n-m-k)]!}\,\frac{d^{2(n-m-k)}\varphi_m(x)}{dx^{2(n-m-k)}}. \quad (7)$$

Здесь первое слагаемое в выражении (7) является разложением решения однородного гармонического уравнения в ряд по малому параметру δ : $\overset{\circ}{\varphi}=\sum\overset{\circ}{\varphi}_n\delta^n$; $\overset{\circ}{\varphi}_n$ – гармонические функции; $\omega=t/\varepsilon$.

Отметим, что формулы (6), (7) получены с помощью метода математической индукции.

Нетрудно видеть, что граничные условия (3) могут быть записаны отдельно для каждого члена разложения. Установим порядок удовлетворения граничных условий. Гармоническая составляющая решения позволяет выполнить точно по одному из граничных условий на краях полосы. Более того, на продольных кромках $y=\pm 1$ всегда можно полностью точно удовлетворить граничные условия, даже если в разложении (4) удержано конечное число членов. Действительно, как следует из формулы (7), в разложении частного решения и в соответствующих разложениях перемещений и напряжений всегда присутствует слагаемое φ_n. Следовательно, независимо от того, каким образом определяется весь оставшийся набор функций $\varphi_m (m<n)$, функцией $\hat{\varphi}_n$, являющейся в общем случае некоторой комбинацией функций φ_n и их производных $(m\leqslant n)$, можно распорядиться так, что граничные условия на краях полосы $y=\pm 1$ удовлетворяются полностью.

Рассмотрим теперь оставшиеся невыполненными граничные условия на торцах полосы $x=0$ и $x=1$. Предположим, что эти граничные условия являются статическими. При построении решения n-го приближения в соответствии с формулой (7) проблема выполнения указанного условия сводится к приближению заданной граничной функции полиномом степени $P_{2n}(x_o,y)$, где $x_o=0$ или $x_o=1$.

Пусть, например, анализируемое граничное условие имеет вид

$$\tau(0,y)=f_o(y), \qquad \tau(L,y)=f_1(y),$$

тогда, учитывая (3), приходим к следующей задаче приближения функции φ полиномом:

$$f_o(y)=\sum_{n=0}^{N}\Big[(\varepsilon^2+\nu)\omega^2\frac{\partial^3\varphi_n(0,y)}{\partial x^3}+t^2\sum_{m=0}^{m=n}\sum_{k=0}^{k=(n-m)}\frac{(-1)^{(n-m+k+1)}}{\omega^{2(k+1)}}\,\frac{y^{2(n-m-k)}}{[2(n-m-k)]!}\times$$

$$\times C_{2(n-m-k+1)}-\nu\sum_{m=0}^{m=n}\sum_{n=0}^{k(n-m)}\frac{(-1)^{n-m+n+1}}{\omega^{2(k+1)}}\,\frac{y^{2(n-m-k-1)}}{[2(n-m-k-1)]!}C_{2(n-m-k)}\Big] \quad \text{и т.д.}$$

Следовательно, если граничные функции являются непрерывными, то в соответствии с теоремой Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами при увеличении N, указанные граничные условия могут быть выполнены с любой наперед заданной точностью.

Так как в предложенном алгоритме каждое последующее приближение строится независимо, то в целом решение имеет рекуррентную структуру. При этом граничные условия выполняются с какой угодно точностью. Точность удовлетворения исходного уравнения Δ определяется функцией ошибки, которая для N-го приближения оценивается следующим образом:

$$\Delta = O(\delta^{N+1}),$$

и связана, следовательно, с изменяемостью напряженного состояния.

Справедливо следующее утверждение. Если напряженное состояние в ортотропной полосе, включая границы, таково, что во всей области $\bar{G} = \{0 \leqslant x \leqslant L, |y| \leqslant h/2\}$ $|\sigma| < P_{2N}$, где P_{2N} – полином степени $\leqslant 2N$; $\sigma = \{\sigma_x, \tau, \sigma_y\}$, то решение удовлетворяет граничным условиям и сходится к точному решению соответствующей плоской задачи (I)–(3).

Данное утверждение дает конструктивный способ определения области $G^* \in \bar{G}$, где справедливо решение, построенное в соответствии с предложенным алгоритмом, даже если граничные условия соответствуют краевой задаче с быстроизменяемыми краевыми эффектами и сингулярными решениями в окрестности угловых точек. При этом размер исключенных областей может быть связан с номером N, а следовательно, с порядком приближения построенного решения.

УДК 533.6.013.42

М.И. Мартиросов, А.И. Шуршалов

УДАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим начальный этап взаимодействия трехслойных пологих сферических оболочек с идеальной несжимаемой жидкостью при вертикальном ударе о свободную поверхность. Оболочка крепится с помощью опорного шпангоута к абсолютно твердому массивному телу. Предполагается, что вся конструкция до момента соприкосновения с поверхностью жидкости движется вертикально вниз с постоянной скоростью v_0, которая намного меньше скорости распространения звука в жидкости c.

При определении гидродинамических нагрузок, действующих на оболочку, ее смоченная поверхность аппроксимируется плоским расширяющимся диском. Движение оболочки описывается уравнениями момент-