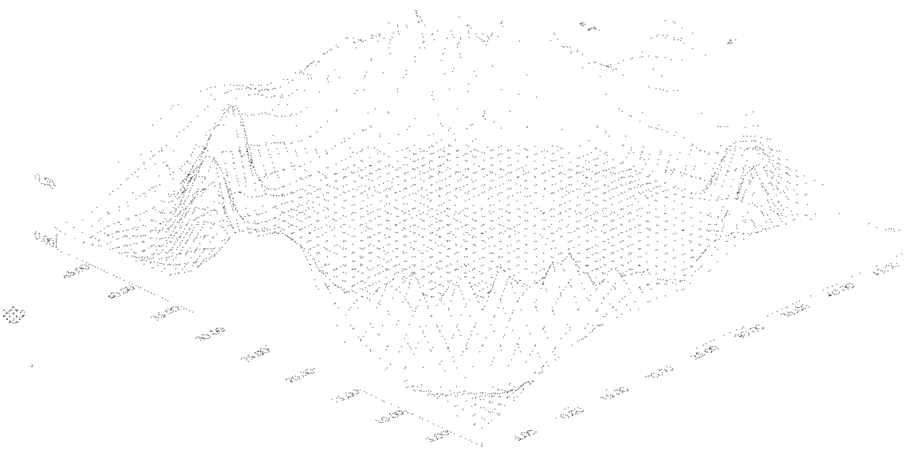
Грант РФФИ № 96-04-084

ИЗДАНИЕ
ИПРИМ РАН

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

АПРЕЛЬ-ИЮНЬ 1996
ТОМ 2, №2



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

МОДЕЛИ СПЛОШНЫХ СРЕД С ОБОБЩЕННОЙ КИНЕМАТИКОЙ. СВОЙСТВА И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Лурье С.А., Белов П.А., *Орлов А.П.

Институт прикладной механики РАН, Москва
**Институт механики гетерогенных сред (при ВЦ РАН), Москва*

РЕЗЮМЕ

В работе делается попытка построить определяющие соотношения, полную систему уравнений и граничных условий и установить некоторые общие свойства сплошной среды на основе лишь самых общих предположений относительно кинематических связей в рассматриваемом континууме.

В результате найдены две квадратуры уравнений Сен-Венана и определены условия их интегрируемости. Впервые установлены не интегрируемые далее в квадратурах соотношения совместности третьего порядка, записанные относительно компонент тензора девиатора деформаций. Построены обобщенные формулы Чезаро и найдена группа обобщенных перемещений рассматриваемого континуума, в которую помимо трансляций и поворотов как твердого тела входят глобальное изменение объема и объемно-вращательные перемещения. Новая группа переменных представляет интерес с точки зрения полевой теории дефектов.

Для линейно-упругих сред с введенными связями, без каких-либо дополнительных предположений, вариационным путем получены определяющие соотношения и полная система разрешающих уравнений . Они описывают среды с непарностью касательных напряжений и распределенными по объему и поверхности упругими связями типа распределенных упругих оснований. Показано, что в частном случае, при дополнительных кинематических связях предложенный алгоритм описания сред позволяет построить традиционные варианты моментной теории упругости.

Установлена система линейных и квадратичных изопериметрических соотношений, первые из которых являются обобщением глобальных уравнений равновесия континуума, соответствующих новой группе обобщенных перемнenных в формуле Чезаро. Квадратичные изопериметрические соотношения являются по построению некоторыми условиями сохранения.

В качестве приложений рассмотрены проблемы определения эффективных характеристик неоднородных сред на базе квадратичных изопериметрических соотношений. Построена система термодинамических определяющих соотношений и полная система разрешающих инкрементальных уравнений для нелинейной связанной задачи деформирования конструктивных элементов из материалов с памятью формы.

ВВЕДЕНИЕ

Используя идеи Л.И.Седова, связанные с вариационным формализмом при описании сплошных сред по заданной кинематике [1], в работе строится математическая модель линейно-упругой сплошной среды, которая подчиняется наиболее общим кинематическим связям. Устанавливаются определяющие соотношения, записывается полная система разрешающих уравнений и граничных условий, анализируются некоторые общие свойства среды. Формулируются изопериметрические соотношения, являющиеся обобщенными уравнениями сохранения. Рассматриваются приложения полученных изопериметрических условий, в частности применительно к связанной нелинейной задаче механики материалов с памятью формы. Здесь термодинамические определяющие соотношения получены на основе предложенного Л.И.Седовым [2] метода описания неголономных систем, а изопериметрические условия, найденные в работе, применяются для описания приведенных характеристик .

1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Запишем полную систему кинематических соотношений сплошной среды исходя из самых общих представлений для компонентов тензора дисторсии

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_i} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij} - \Omega_k \acute{Y}_{ijk} \tag{1.1}$$

Здесь, как обычно, по повторяющимся индексам осуществляется свертка, γ_{ij} — компоненты тензора - девиатора деформаций , Θ - объемная деформация , Ω_k - вектор поворотов или упругих вращений, $\acute{Y}_{ijk}$ - компоненты кососимметричного тензора Леви-Чевита.

Представление (1.1) соответствует разложению тензора второго ранга на составляющие : девиаторную часть, шаровой тензор и ротор. Интегрируя соотношение (1.1) по пространственной координате, получим

$$R_i = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_x} [\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij} - \Omega_k \acute{Y}_{ijk}]dy_j \tag{1.2}$$

Условия существования криволинейного интеграла в формуле (1.2) запишутся в виде

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \gamma_{\beta j}}{\partial x_\alpha}\acute{Y}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\frac{\partial \Theta}{\partial x_\alpha}\acute{Y}_{\alpha ij} \tag{1.3}$$

Интегрирование соотношения (1.3), по аналогии с выражением (1.1) , дает следующее равенство:

$$\omega_i = \omega_i^0 + \int_{M_0}^{M_x} (\frac{\partial \gamma_{\beta j}}{\partial y_\alpha}\acute{Y}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\frac{\partial \Theta}{\partial y_\alpha}\acute{Y}_{ij\alpha})dy_j \tag{1.4}$$

Соответственно условия существования криволинейных интегралов в (1.4), приобретают вид

$$\frac{\partial^2(\gamma_{\beta\mu} + \frac{1}{3}\Theta\delta_{\beta\mu})}{\partial x_\alpha \partial x_m} \acute{Y}_{\alpha\beta i}\acute{Y}_{m\mu j} = 0 \tag{1.5}$$

Нетрудно видеть, что соотношения (1.5), обеспечивающие непрерывность упругих поворотов, совпадают с уравнениями совместности Сен-Венана. Представленная форма записи уравнений неразрывности смещений позволяет разрешить последние относительно производных от объемной деформации в явной форме, выразив их через компоненты тензора- девиатора дефомаций

$$\frac{1}{3}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \gamma_{m\mu}\acute{Y}_{\alpha m i}\acute{Y}_{\beta\mu j}\right) \tag{1.6}$$

Очевидно, что систему (1.6) можно проинтегрировать в вадратурах:

$$\Theta = \theta^0 + \theta_i^0(x_i - x_i^0) +$$

$$+3\int_{M_0}^{M_x}(x_i - y_i)\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \gamma_{m\mu}\acute{Y}_{\alpha m i}\acute{Y}_{\beta\mu j}\right)dy_j$$

Необходимыми и достаточными условиями (для односвязных сред) интегрируемости системы (1.6) являются, по-видимому неизвестные ранее, уравнения совместности третьего порядка, записанные относительно только компонентов тензора- девиатора деформаций:

$$\frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_q}\left[\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ip} + \gamma_{m\mu}\acute{Y}_{\alpha m i}\acute{Y}_{\beta\mu p}\right]\acute{Y}_{pqj} = 0$$

Эта система уравнений совместности представляет собой тензорное уравнение второго ранга, ненулевые компоненты которого составляют тензор-девиатор. Так как тензор-девиатор имеет только пять линейно независимых компонент, дальнейший поиск квадратур не имеет смысла, потому что для построения следующей квадратуры потребовалось бы десять урвнений для определения третьих производных хотя бы одной функции.

Вернемся к представлению вектора смещения с помощью криволинейного интеграла (1.2) и преобразуем его таким образом, чтобы затем исключить в подинтегральном выражении упругие повороты с помощью соотношений интегрируемости (1.3). С этой целью проинтегрируем по частям в (1.2) два последних слагаемых, а затем исключим производные от упругих поворотов, воспользовавшись равенством (1.3). В результате найдем

$$R_i = R_i^0 + \omega_\alpha^0(x_\beta - x_\beta^0)\acute{Y}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\theta^0(x_i - x_i^0) +$$

$$+\int_{M_0}^{M_x}\left[\gamma_{ij} + (x_k - y_k)\left(\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial y_k} - \frac{\partial\gamma_{ki}}{\partial y_j}\right) + \frac{1}{3}\frac{\partial\Theta}{\partial y_j}(x_i - y_i) - \right. \tag{1.7}$$

$$\left. -\frac{1}{3}\frac{\partial\Theta}{\partial y_i}(x_j - y_j) + \frac{1}{3}\frac{\partial\Theta}{\partial y_k}(x_k - y_k)\delta_{ij}\right]dy_j$$

Покажем теперь, что выражение для компонент вектора перемещений (1.7) может быть переписано таким образом , что под знаком криволинейного интеграла будет стоять выражение, определяющие исключительно деформации изменения формы. Взяв по частям в представлении (1.7) три последних слагаемых, найдем

$$
\begin{aligned}
R_i &= R_i^0 + \omega_\alpha^0\left(x_\beta - x_\beta^0\right)\acute{Y}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\theta^0\left(x_i - x_i^0\right) + \\
&+ \frac{1}{3}\theta_j^0\left(x_j - x_j^0\right)\left(x_i - x_i^0\right) - \frac{1}{6}\theta_i^0\left(x_j - x_j^0\right)\left(x_j - x_j^0\right) + \\
&+ \int_{M_0}^{M_x}\left[\gamma_{ij} + (x_k - y_k)\left(\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial y_k} - \frac{\partial\gamma_{kj}}{\partial y_j}\right) + \right. \\
&+ (x_i - y_i)(x_k - y_k)\frac{1}{3}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y_j \partial y_k} - \\
&\left. - \frac{1}{2}(x_k - y_k)(x_k - y_k)\frac{1}{3}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y_i \partial y_j}\right]dy_j
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Теперь понятно, что последние два слагаемых в равенстве (1.8) можно с помощью равенства (1.6) записать через компоненты тензора девиатора деформации γ_{ij}. Следовательно, криволинейный интеграл в последнем выражении описывает перемещения, вызванные лишь деформациями изменения формы. Обозначая этот интеграл через r_i запишем

$$
\begin{aligned}
R_i &= R_i^0 + \omega_\alpha^0\left(x_\beta - x_\beta^0\right)\acute{Y}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\theta^0\left(x_i - x_i^0\right) + \\
&+ \frac{1}{3}\theta_j^0\left(x_j - x_j^0\right)\left(x_i - x_i^0\right) - \frac{1}{6}\theta_i^0\left(x_j - x_j^0\right)\left(x_j - x_j^0\right) + r_i
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Таким образом, с точностью до полинома, вектор перемещений определяется деформациями изменения формы.

Аналогичным образом покажем, что объемная деформация и упругие повороты с точностью до полиномов также определяются лишь деформациями изменения формы:

$$
\Theta = \theta^0 + \theta_i^0(x_i - x_i^0) + \frac{\partial r_k}{\partial x_k} \tag{1.10}
$$

$$
\Omega_i = \omega_i^0 + \frac{1}{3}\theta_\alpha^0(x_\beta - x_\beta^0)\acute{Y}_{\alpha\beta i} - \frac{1}{2}\frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta}\acute{Y}_{\alpha\beta i} \tag{1.11}
$$

$$
\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{\partial r_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3}\frac{\partial r_k}{\partial x_k}\delta_{ij} \tag{1.12}
$$

Действительно, подставляя вектор смещения R_i с помощью формулы (1.9) в равенство (1.1), убедимся в справедливости формул (1.10), (1.11) и (1.12). Следовательно, вектор r_i, являясь, по существу, перемещениями упругих изменений формы, полностью определяет деформации упругого тела.

Следовательно, можем записать следующие общие соотношения

$$R_i = R_i^0 + \omega_\alpha^0(x_\beta - x_\beta^0)\acute{Y}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\theta^0(x_i - x_i^0) +$$

$$+\frac{1}{3}\theta_j^0(x_j - x_j^0)(x_i - x_i^0) - \frac{1}{6}\theta_i^0(x_j - x_j^0)(x_j - x_j^0) + r_i$$

$$\theta = \frac{\partial r_k}{\partial x_k}, \qquad \omega_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\acute{Y}_{ijk} \tag{1.13}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{\partial r_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij}$$

$$\Theta = \theta^0 + \theta_i^0\left(x_i - x_i^0\right) + \theta, \qquad \Omega_k = \omega_k^0 + \frac{1}{3}\theta_\alpha^0\left(x_\beta - x_\beta^0\right)\acute{Y}_{\alpha\beta k} + \omega_k$$

Представление для перемещений R_i, найденные в форме соотношений (1.13), являются обоющением формулы Чезаро и, представляя самостоятельный интерес, в дальнейшем могут быть привлечены для описания поведения упругой среды с дефектами в рамках так называемой полевой теории дефектов.

По всей видимости, новое представление для перемещений, вернее его полиномиальная состовляющая, наряду с традиционными дефектами, определяемыми трансляцией (дислокации) и вращением (дисклинация), позволяет ввести в рассмотрение расширенную группу дефектов типа обьемной дислокации и обьемно-вращательными дисклинациями. Этот результат представляется новым с фундаментальной точки зрения и может быть принципиально реализован, если только функционал Лагранжа будет инвариантен относитеоьно действия неоднородной группы, определяемой внеинтегральными слагаемыми в выражении (1.13). Сейчас остановимся на формулировке обобщенных физических соотношений линейного упругого тела.

2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Полагаем, что единственными кинематическими связями являются расширенные соотношения Коши (1.1), на основании которых запишем Лагранжиан и установим систему его обобщенных аргументов. Запишем выражение принципа возможной работы внутренних сил

$$\delta U = \iiint \lambda_{ij}\delta\left(\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\Theta\delta_{ij} - \Omega_k\acute{Y}_{ijk} - R_{i,j}\right)dv = 0 \tag{2.1}$$

Где λ_{ij} - силы реакции, обеспечивающие выполнение связей(1.1).

Взяв последнее слагаемое по частям, получим

$$\delta U = \iiint \left\{\left[\frac{1}{2}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) - \frac{1}{3}\lambda_{kk}\delta_{ij}\right]\delta\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\lambda_{kk}\delta\Theta +\right.$$
$$\left. +\left[-\lambda_{ij}\acute{Y}_{ijk}\right]\delta\Omega_k + \lambda_{ij,j}\delta R_i\right\}dv + \oint(-\lambda_{ij}n_j)\delta R_i dF = 0 \tag{2.2}$$

Таким образом установлено, что для сред, кинематика которых подчиняется лишь расширенным соотношениям Коши, потенциальная энергия в общем случае определяется обьемной и поверхностной плотностям. Однако одно из главных обстоятельств состоит в том, что кинематика характеризуется в объеме обобщенными переменными $\gamma_{ij}, \Theta, \Omega_k$, R_k и обобщенной поверхностной переменной R_i, так что можно записать

$$
\begin{aligned}
&W_V = W_v(\gamma_{ij}, \Theta_k, \Omega_k, R_k) \\
&W_F = W_F(R_k) \\
&U = \iiint_V W_V dV + \iint_F W_F dF
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

Теперь, когда описано поле обобщенных переменных, вариационный метод сред позволяет сформулировать определяющие уравнения и построить замкнутую систему уравнений среды, дающую в конце концов полное математическое описание исследуемой среды.

Для линейно-упругих сред достаточно дать полную запись квадратичного функционала, условия потенциальности которого и позволят получить определяющие соотношения.

В качестве наиболее простого примера рассмотрим изотропную среду. Имея в виду тензорную размерность обобщенных переменных, выражения для плотностей W_F, W_V запишутся следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&W_V = \alpha_1 \gamma_{ij}\gamma_{ij} + \alpha_2 \Theta^2 + \alpha_3 \Omega_k \Omega_k + \alpha_4 R_i R_i + \alpha_5 R_i \Omega_i \\
&W_F = \frac{1}{2} A R_i R_j n_i n_j + \frac{1}{2} B R_i R_j (\delta_{ij} - n_i n_j)
\end{aligned}
\qquad (2.4)
$$

В формумах (2.4) семь постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ и A,B определяют упругие свойства среды. Причем, если постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ являются обобщенными модулями упругости среды в объеме тела, то A и B характеризуют ее поверхностные характеристики.

Получим соотношения упругости, определяя дифференциал энергии деформации dU. Можно записать следующие определения тензора напряжений

$$
\sigma_{ij} = \frac{\partial W_V}{\partial R_{i,j}} \qquad (2.5)
$$

и вектора внутренних сил в исследуемой среде

$$
\sigma_i = \frac{\partial W_V}{\partial R_i} \qquad (2.6)
$$

и на поверхности

$$
P_i = \frac{\partial W_F}{\partial R_i} \qquad (2.7)
$$

Имея в виду формумы (2.4), в соответствии с (2.5), (2.6) получим:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij} = 2\alpha_1 \gamma_{ij} + 2\alpha_2 \Theta \delta_{ij} - 2\alpha_3 \Omega_k \acute{Y}_{ijk} - \frac{1}{2}\alpha_5 R_k \acute{Y}_{ijk} \\
&\sigma_i = 2\alpha_4 R_i + \alpha_5 \Omega_i
\end{aligned}
\qquad (2.8)
$$

Внутренние усилия на поверхности среды определяются соотношениями, которые записываются с помощью формул (2.7):

$$P_i = AR_j n_i n_j + BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j) \qquad (2.9)$$

Обратим внимание, что первые два слагаемых в первой группе уравнений (2.8) будут соответствовать классической записи уравнений закона Гука для изотропного тела, если ввести обозначения $\alpha_1 = \mu, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\mu}{3} + \lambda\right)$.

Кроме того переобозначим остальные постоянные

$$\alpha_3 = 2k, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}C, \quad \alpha_5 = D$$

Тогда соотношения упругости (2.8) запишутся в виде

$$\sigma_{ij} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + \lambda R_{k,k}\delta_{ij} +$$

$$+k(R_{i,j} - R_{j,i}) - \frac{1}{2}DR_k \acute{Y}_{ijk} \qquad (2.10)$$

$$\sigma_i = CR_i + D\Omega_i$$

Здесь естественно считать μ и λ - известными в теории упругости коэффициентами Ламе (μ - модуль сдвига) , а κ , A, B, C, D новыми упругими постоянными среды. При этом уравнения (2.9), (2.10) описывают модель среды с несимметричным тензором напряжений и внутренними упругими связями типа объемных упругих относительно сил и моментов винклеровских оснований. Свойственные данной среде распределенные винклеровские основания характеризуются упругими постоянными C и D. Непарность касательных напряжений характеризуется упругими постоянными κ и D. Здесь необходимо отметить, что соотношения (2.10) описывают, таким образом, вариант моментной теории упругости, особенностью которого является то, что учет непарности касательных напряжений не вносит повышение порядка разрешающей системы уравнений.

Построенные соотношения упругости дают классификацию моделей деформирования сред и указывают достаточно общий алгоритм построения усложненных сред.

Из соотношений упругости (2.9) следует, что упругие свойства внутри обьема и на поверхности различны даже для изотропного тела. Более того, допустима анизотропия упругих свойств на поверхности, так как нормаль к поверхности как особое направление выделяется естественным образом. Упругие свойства поверхности в касательной плоскости и по нормали к ней характеризуются соответственно постоянными B и A.

Если в соотношениях (2.9), (2.10) принять A=B=C=D=κ=0, то получим систему определяющих уравнений классического изотропного тела. Полагая в (2.4) $\alpha_3 = \alpha_5 = 0$ или (κ=D=0), получим соотношения упругости для среды с симметричным тензором напряжений. При этом мы освобождаем среду от связей, обусловленных упругими поворотами, и полагаем равными нулю связи $\lambda_{ij}\acute{Y}_{ijk}$. Полученная упрощенная модель среды может быть построена в соответствии с изложенным выше подходом, используя принцип возможных перемещений, если в качестве кинематических связей вводить соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{j,i})$$

Вообще, чем больше кинематических связей введено в конкретной модели, тем многообразнее внутренние силовые взаимодействия в ней, что непосредственно следует из предлагаемого подхода к формулировке моделей сред.

При использовании для формулировки модели расширенных соотношений Коши мы опираемся на выражение для тензора дисторсии, не вводя симметричный тензор деформации. В результате получаем более общую модель с непарностью касательных напряжений. Классическую же модель среды можно рассматривать как первое приближение главного итерационного процесса в асимптотическом решении с малым параметром, определяемым, например, как отношение норм физических констант одинаковой размерности:

$$\max\left(\frac{k}{\mu}, \frac{Cl^2}{\mu}, \frac{Dl}{\mu}, \frac{Al}{\mu}, \frac{Bl}{\mu}\right),$$

где l -некоторый характерный параметр размерности длины.

Если же расширить пространство кинематических связей, введя дополнительно, например, требования непрерывности перемещений в форме:

$$\Omega_{i,j} = \varepsilon_{j\beta,\alpha} Y_{\alpha\beta i},$$

где $\varepsilon_{j\beta}$ - тензор деформаций, то вместо соотношений (2.9), (2.10) получим соотношения упругости для классической моментной теории упругости с соответствующим повышением порядка.

3. РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Следуя принципу Лагранжа, получим теперь систему разрешающих уравнений и естественные граничные условия для модели среды с определяющими соотношениями (2.9), (2.10). Полагаем, что в объеме тела и на его границе (или на части границы) действуют известные массовые и, соответственно, поверхностные силы X_i, Y_i. Тогда Лагранжиан L можно представить в виде

$$L = A - U,$$

где A- работа внешних сил:

$$A = \iiint_V X_i R_i dV + \iint_F Y_i R_i dF$$

U- потенциальная энергия деформации:

$$U = \iiint_V W_V dV + \iint_F W_F dF$$

В соответствии с принципом Лагранжа система разрешающих уравнений и естественных граничных условий запишется:

$$
\begin{aligned}
\delta L = \iiint \Bigg[& (\mu + k)\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\mu + \lambda - k)\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} + \\
& + D\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}\acute{Y}_{\alpha\beta i} - CR_i + X_i \Bigg]\delta R_i dV + \\
& + \iint \Bigg[Y_i - \mu\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right)n_j - \lambda\frac{\partial R_k}{\partial x_k}n_i - \\
& - k\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right)n_j + \frac{1}{2}DR_k n_j \acute{Y}_{ijk} - \\
& - AR_j n_j n_i - BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j)\Bigg]\delta R_i dF = 0
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

Подинтегральное выражение в интеграле по объему тела определяет уравнение равновесия среды , а подинтегральное выражение в поверхностном интеграле определяет весь спектр граничных условий.

В целом соотношениями (2.9)-(3.1) дается замкнутая математически непротиворечивая модель изотропной упругой среды с непарностью касательных напряжений, распределенными по обьему винклеровскими основаниями и с поверхностным взаимодействием типа поверхностного натяжения.

Очевидно, что аналогичным образом может быть описана общая анизотропная модель подобной среды. Для этого следовало бы только при определении квадратичного функционала упругой энергии использовать тензорное поле упругих постоянных вместо упругих констант. Тогда, например, первое слагаемое в выражении (2.4) представилось бы в форме $C_{ijkm}\gamma_{ij}\gamma_{km}$ и т. д., где C_{ijkm} - тензор упругих постоянных, определяющих сдвиговые жесткости вместо модуля сдвига. Наличие физических параметров среды различной размерности в уравнениях (2.9)-(3.1), описывающих общий случай среды, указывает на необходимость формулировки соответствующих условий подобия. Соотношения подобия, включающие систему безразмерных параметров, определяют условия моделирования деформирования такой среды.

Учитывая систему разрешающих уравнений и естественных граничных условий, найдем следующую систему безразмерных параметров, которые должны быть постоянными при моделировании исследуемой среды

$$
P_k = \frac{k}{\mu},\quad P_\lambda = \frac{\lambda}{\mu},\quad P_c = \frac{Cl^2}{\mu},\quad P_D = \frac{Dl}{\mu}
$$

$$
P_{X_i} = \frac{X_i L}{\mu},\quad P_{Y_i} = \frac{Y_i}{\mu},\quad P_A = \frac{Al}{\mu},\quad P_B = \frac{Bl}{\mu}
$$

Можно показать, что модуль D описывает анизотропию поверхностных тангенциальных свойств Среды. В дальнейшем для простоты модуль D будем полагать равным нулю.

4 УСЛОВИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ (ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ. ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ)

Обобщенные формулы Чезаро расширяют пространство внеинтегральных составляющих в представлении вектора перемещений. Теперь доля вектора перемещений, определяемая слагаемым, стоящим вне криволинейного интеграла, содержит наряду с традиционными трансляциями и поворотами исследуемого континиума дополнительные члены: линейный полином, с коэффициентом θ^0 и квадратичный полином с коэффициентами θ_i^0. Возникает естественный вопрос об инвариантности решения относительно произвольных $R_i^0, \omega_\alpha^0, \theta^0, \theta_i^0$. Исследуем этот вопрос и установим условия инвариантности. Рассмотрим, предварительно, разрешающие уравнения и граничные условия, записанные в вариационной форме (3.1) и заменим в них вариации перемещений с помощью обобщенной формулы Чезаро на соответствующие выражения. Исключая, в целях уменьшения записи, слагаемые, соответствующие работе заданных обьемных и поверхностных сил, и комбинируя, получим

$$
\begin{aligned}
&\{\int CR_i dV + \oint (AR_j n_j n_i + BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j)) dF\}\delta R_i^0 - \\
&-\{\int (\sigma_{ij} + CR_i(x_j - x_j^0)) dV + \\
&+\oint [AR_r n_r n_i + BR_r(\delta_{ir} - n_i n_r)](x_j - x_j^0)\} Y_{ija}\delta(\Omega_a^0) - \\
&-\{\int [-\sigma_{kk} + CR_i(x_i - x_i^0)] dV + \\
&+\oint [AR_r n_r n_i + BR_r(\delta_{ir} - n_i n_r)](x_i - x_i^0) dF\}\delta\left(\frac{1}{3}\Theta^0\right) - \\
&-\{[-\sigma(x_\rho - x_\rho^0) - (\sigma_{i\rho} - \sigma_{\rho i})(x_i - x_i^0) + CR_i P_{i\rho}] dV + \\
&+\oint [AR_i n_j n_i + BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j)] P_{i\rho} dF\}\delta\left(\frac{1}{3}\theta_\rho^0\right) + \\
&+\int \left(CR_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\right)\delta r_i dV + \\
&+\oint [\sigma_{ij} n_j + AR_j n_j n_i + BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j)]\delta r_i dF = 0
\end{aligned}
$$

где

$$
P_{i\rho} = (x_i - x_i^0)(x_\rho - x_\rho^0) - \frac{1}{2}\delta_{ij}(x_k - x_k^0)(x_k - x_k^0)
$$

Нетрудно видеть, что записанное выражение может быть представлено в форме изопериметрических условий при вариациях R_i^0, ω_i^0, θ^0, θ_i^0.

Покажем, что при выполнении этих десяти изопериметрических условий, которые по форме и физическому смыслу являются естественным обобщением классических шести законов сохранения (для векторов равнодействующих сил и моментов) имеет место упомянутая инвариантность.

Запишем возможную работу сил связей (изопериметрических условий), используя множители Лагранжа R_i^*, Ω_α^*, $\frac{1}{3}\Theta^*$, $\frac{1}{3}\Theta_\rho^*$. Проводя очевидные преобразования, найдем

$$\delta U^* = \int \{C[R_i^* + \Omega_\alpha^*(x_j - x_j^*)\acute{Y}_{\alpha\beta ij} +$$

$$+\frac{1}{3}\Theta^*(x_i - x_i^*) + \frac{1}{3}\Theta_\rho^* P_{i\rho}]\delta r_i -$$

$$-2k[\Omega_\alpha^* + \frac{1}{3}\Theta_\rho^*(x_k - x_k^*)\acute{Y}_{k\rho\alpha}]\delta\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\acute{Y}_{ij\alpha} +$$

$$+\left(\frac{\mu}{2} + \lambda\right)\left[\frac{1}{3}\Theta^* + \frac{1}{3}\Theta_\rho^*(x_\rho - x_\rho^*)\right]\delta\frac{\partial r_k}{\partial x_k}]dV$$

$$\oint\left\{\left[R_i^* + \Omega_\alpha^*(x_j - x_j^0)\acute{Y}_{\alpha ji} + \frac{1}{3}\Theta^*(x_i - x_i^0) +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3}\Theta_\rho^* P_{i\rho}\right]\left[A n_i n_j + B(\delta_{ij} - n_i n_j)\right]\delta r_j\right\}dF = 0$$

Полагаем, что изопериметрические условия выполняются. Тогда $\delta U^* = 0$ и, следовательно, имея ввиду полученное равенство, можно исходные уравнения (3.1) переписать в виде

$$\delta A - \int\left[Cr_i^* - (\mu + k)\frac{\partial^2 r_i^*}{\partial x_j \partial x_j} - (\mu + \lambda - k)\frac{\partial^2 r_j^*}{\partial x_i \partial x_j}\right]\delta r_i dV +$$

$$+\oint\left[\mu\left(\frac{\partial r_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial r_j^*}{\partial x_i}\right)n_j + \lambda\frac{\partial r_k^*}{\partial x_k}n_i + k\left(\frac{\partial r_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial r_j^*}{\partial x_i}\right)n_j +\right. \qquad (4.1)$$

$$\left.+Ar_j^* n_j n_i + B_j^*(\delta_{ij} - n_i n_j)\right]\delta r_i dF = 0$$

где

$$r_i^* = R_i - R_i^* - \Omega_\alpha^*(x_k - x_k^*)\acute{Y}_{\alpha ki} - \frac{1}{3}\theta^*(x_i - x_i^*) - \frac{1}{3}\theta_\rho^* P_{i\rho}$$

Найденное выражение совпадает полностью с вариационным равенством, дающим вариационную формулировку рассматриваемой задачи если положить $r_i^* = r_i$.

Таким образом доказано следующее утверждение:

Всякое решение задачи (3.1) из пространства решений краевых задач механики сплошной среды с обобщенной кинематикой (1.1), удовлетворяющих обобщенному равновесному состоянию, инвариантно относительно трансляций и поворотов как твердого тела и объемно-вращательных движений, т.е. определяется с точностью до квадратичного полинома

$$R_i^* + \Omega_\alpha^*(x_k - x_k^*)Y_{\alpha ki} + \frac{1}{3}\Theta^*(x_i - x_i^*) - \frac{1}{3}\Theta_\rho^* P_{i\rho}$$

При этом под обобщенным равновесным состоянием понимается всякое решение задачи (3.1), удовлетворяющее десяти изопериметрическим соотношениям (4.1). Очевидно, что решения из класса обобщенных равновесных состояний всегда могут быть построены.

4.1. Изопериметрические квадратичные соотношения.

Помимо линейных изопериметрических соотношений, которые легко трактуются как обобщения законов сохранения энергии - импульса, моментов импульса и т.д. уравнения (3.1) порождают и еще одну группу условий - квадратичные изопериметрические условия в физически-линейных моделях.
Вновь рассмотрим вариационное равенство (3.1) и перепишем его в следующем виде

$$\begin{aligned}
&\delta L = \delta A - \\
&-\delta\int\left\{\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{2} + \lambda\right)\theta^2 + 2k\omega_i\omega_i + \frac{1}{2}CR_iR_i\right\}dV + \\
&+\delta\oint\left\{\frac{1}{2}AR_iR_jn_in_j + \frac{1}{2}BR_iR_j(\delta_{ij} - n_in_j)\right\}dF = \\
&= \delta A - \\
&-\mu\delta\left(\int\gamma_{ij}\gamma_{ij}dV - C_\mu\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{2} + \lambda\right)\delta\left(\int\theta^2 dV - C_\lambda\right) + \\
&+2k\delta\left(\int\omega_i\omega_i dV - C_k\right) + \frac{1}{2}C\delta\left(\int R_iR_i dV - C_c\right) + \\
&+\frac{A}{2}\delta\left(\oint R_iR_jn_in_j dF - C_A\right) + \\
&+\frac{B}{2}\delta\left(\oint R_iR_j(\delta_{ij} - n_in_j)dF - C_B\right) = 0
\end{aligned} \qquad (4.2)$$

Последнее выражение можно рассматривать не как работу внутренних связей (если не принимать во внимание работу внешних сил), а как сумму изопериметрических условий, записанных на квадратичные инварианты аргументов действия.

С другой стороны получим эти условия как уравнения Эйлера при вариации расширенного Лагранжиана (модифицированного действия), включив в список аргументов соответствующие модули упругости:

$$L = \mu\left(\int \gamma_{ij}\gamma_{ij} dV - C_\mu\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{2} + \lambda\right)\left(\int \theta^2 dV - C_\lambda\right) +$$

$$+2k\left(\int \omega_{ij}\omega_{ij} dV - C_k\right) + \frac{1}{2} C\left(\int R_i R_i dV - C_c\right) +$$

$$+\frac{A}{2}\left(\oint R_i R_j n_i n_j dF - C_A\right) +$$

$$+\frac{B}{2}\left(\oint R_i R_j (\delta_{ij} - n_i n_j) dF - C_B\right)$$

$$\delta \bar{L} = \delta L + \left(\int \gamma_{ij}\gamma_{ij} dV - C_\mu\right)\delta\mu + \left(\int \theta^2 dV - C_\lambda\right)\delta\frac{(\mu + 2\lambda)}{4} +$$

$$+\left(\int \omega_{ij}\omega_{ij} dV - C_k\right)\delta(2k) + \left(\int R_i R_i dV - C_c\right)\delta\left(\frac{C}{2}\right) +$$

$$+\left(\oint R_i R_j n_i n_j dF - C_A\right)\delta\frac{A}{2} +$$

$$+\left(\oint R_i R_j (\delta_{ij} - n_i n_j) dF - C_B\right)\delta\frac{B}{2} = 0 \qquad (4.3)$$

Квадратичные изопериметрические условия являются по построению обобщенными условиями сохранения.

Не трудно доказать, что выполнение указанных квадратичных изопериметрических условий является необходимым и достаточным условием инвариантности сформулированного расширенного функционала относительно преобразования физических свойств сплошных сред.

5. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ.

В этом разделе проиллюстрируем возможность использования квадратичных изопериметрических соотношений для определения эффективных характеристик сред.

В качестве первого примера рассмотрим плоскую задачу теории упругости для полосы. В данном случае функционал Лагранжа является аддитивной функцией $\gamma_{ij}\gamma_{ij}$ и Θ^2 соответственно. Следует помнить, однако, что в силу определения компонент дензора девиатора деформаций имеет место следующее равенство $\gamma_{11} + \gamma_{22} = 0$. Однако описанная выше процедура построения квадратичных изопериметрических соотношений может быть записана с использованием компонент тензора деформаций, а именно, для ортотропного материала в полосе имеем

$$C_{E_x} = \iint \varepsilon_x^2 dxdy, \quad C_{E_y} = \iint \varepsilon_y^2 dxdy, \quad C_G = \iint \gamma^2 dxdy.$$

Рассмотрим теперь изотропную полосу длиной L и площадью поперечного сечения F, нагруженную нормальными и касательными напряжениями σ_x^0, τ_{xy}^0 . Полагаем, что в полосе под действием напряжений возникают микротрещины. Определим приведенные характеристики полосы с учетом поврежденности материала, которая контролируется указанными микродефектами. Постоянные, входящие в изопериметричяеские соотношения преобретают в рассматриваемом случае следующий вид

$$C_{E_x} = \left(\sigma_x^0 / E_0\right)^2 FL, \qquad C_G = \left(\tau_{xy}^0 / G_0\right)^2 FL,$$

где E_0, G_0 - искомые приведенные характеристики. Представим компоненты деформации поврежденной полосы в форме

$$\varepsilon_x = \tilde{\varepsilon}_x + \Delta\varepsilon_x, \quad \varepsilon_y = \ldots, \quad \gamma_{xy} = \tilde{\gamma}_{xy} + \Delta\gamma_{xy}, \tag{5.1}$$

где $\tilde{\varepsilon}_x$, $\tilde{\gamma}_{xy}$ -деформации неповрежденного материалав, $\Delta\varepsilon_x$, $\Delta\gamma_{xy}$ - приращения компонент деформаций, вызванных микротрещинами. Последние находятся с помощью формул

$$\Delta\varepsilon_x = \frac{16}{3}\left(1-\nu^2\right)\omega\sigma_x / \tilde{E}_x, \qquad \Delta\gamma_{xy} = \frac{32}{3}\frac{1-\nu}{2-\nu}\omega\tau_{xy} / 2\tilde{G}$$

В последних формулах $\tilde{E}$, $\tilde{G}$ - - характеристики неповрежденного материала, ω - плотность микродефектов, $\omega = \dfrac{Nr^3}{FL}$. Полагаем далее, что $N = N_0\sigma_x^m$. Следовательно можем записать

$$\Delta\varepsilon_x = \alpha\sigma_x^m \frac{\sigma_x}{\tilde{E}}, \quad \Delta\gamma_{xy} = \beta\sigma_x^m \frac{\tau_{xy}}{\tilde{G}}, \tag{5.2}$$

$$\alpha = \frac{16}{3}\left(1-\nu^2\right)\frac{N_0 r^3}{FL}, \qquad \beta = \frac{16}{3}\frac{(1-\nu)}{(2-\nu)}\frac{N_0 r^3}{FL}$$

В результате, изопериметрические соотношения после подстановки в них деформаций с помощью формул (5.1), (5.2) дают следующее решение проблемы

$$E_0 = \tilde{E} / \left(1 + \alpha\sigma_x^m\right), \quad G_0 = \tilde{G} / \left(1 + \beta\sigma_x^m\right)$$

Рассмотрим теперь задачу изгиба полосы. Полагая справедливыми гипотезы классической теории балок и используя соотношения (5.2), запишем

$$\tilde{\varepsilon}_x = \frac{\sigma_x}{\tilde{E}} = \left[M / E\tilde{J}\right]y, \qquad \Delta\varepsilon_x = \alpha\left[M / E\tilde{J}\right]^{m+1} y^{m+1}$$

$$C_{J_x}^0 = \int_0^1 \int_{-h}^{h} \left[M / EJ_0\right]^2 y^2 dx dy = \frac{2}{3}\left[M / EJ_0\right]^2 h^3 L.$$

Применение изопериметрических соотношений в данном случае дает следующее выражение для приведенной изгибной жесткости

$$EJ_0 = E\tilde{J}\left(1 + 3\left(1-(-1)^m\right)\alpha\left[\frac{M}{E\tilde{J}}\right]^m \frac{h^{m-1}}{m+2} + 3\alpha^2\left[\frac{M}{E\tilde{J}}\right]^{2m} \frac{h^{2m}}{2m+3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Полученный здесь результат знаменателен тем, что он не может быть найден в результате использования формулы смеси.

Небходимо отметить, что предлагаемый подход учитывает характер напряженного состояния при получении приведенных характеристик, что несомненно является его большим достоинством.

Рассмотрим еще один пример. Пусть композитная, армированная волокнами полоса (f -коэффициент наполнения), нагружена продольным сдвигом. Деформация сдвига при этом находится с помощью формулы смеси для сдвиговой податливости

$$\gamma = \frac{\tau_0}{G} = \left(\frac{f}{G_B} + \frac{1-f}{G_m}\right)\tau_0$$

Пусть требуется определить теперь приведенную сдвиговую жесткость, если коэффициент наполнения является переменной функцией по сечению полосы. Применение к данной проблеме изопериметрического соотношения дает следующее решение

$$\frac{1}{G_0} = \frac{1}{F}\left[\left(\frac{1}{G_B^2} + \frac{1}{G_m^2} - \frac{1}{G_B G_m}\right)\int_F f^2 dF + \left(\frac{1}{G_B G_m} - \frac{1}{G_m^2}\right)\int_F f^2 dF \frac{F}{G_m^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(G_B >> G_m), \qquad \frac{1}{G_0} = \frac{1}{G_m}\left[\int_F \left(1 - f^2\right) dF\right]^{\frac{1}{2}}$$

Рассмотрим еще один пример, связанный с вычислением приведенных механических характеристик двухфазных сред. В целом такая среда изотропна, двухфазность учитывается объемной долей содержания одной из фаз f в материнской фазе. Самый простой способ определения приведенных характеристик основан на формулах смеси. Однако, нетрудно убедиться что эти формулы могут приводить к значительным погрешностям. По видимому, более точные значения характеристик могут быть получены при использовании предположения аддитивности потенциальной энергии деформации двухфазной среды относительно составляющих фаз. В этом случае получаем следующие формулы для коэффициента Пуассона μ и модуля упругости E приведенной среды

$$\mu = \frac{\mu_1(1-\mu_2^2)E_1 f + \mu_2(1-\mu_1^2)E_2(1-f)}{(1-\mu_2^2)E_1 f + (1-\mu_1^2)E_2(1-f)}$$

$$E = \frac{(1-\mu_2^2)E_1^2 f^2 + 2(1-\mu_1\mu_2)E_1 E_2 f(1-f)}{(1-\mu_2^2)E_1 f + (1-\mu_1^2)E_2(1-f)} + \frac{(1-\mu_1^2)E_2^2(1-f)^2}{(1-\mu_2^2)E_1 f + (1-\mu_1^2)E_2(1-f)} \tag{5.3}$$

здесь характеристики с индексом 2 соответствуют материнской фазе.

Анализ этих формул показывает, что модуль упругости практически в точности описывается зависимостью формулы смеси в то время как использование формулы смеси для коэффициента Пуассона может привести к значительным погрешностям. Недостатком такого способа определения приведенных характеристик является неучет конкретного вида напряженного состояния.

Получим те же характеристики, используя изопериметрические соотношения для двухфазной среды, в которой реализуется однородное напряженное состояние под действием одноосного нагружения. Вводим предположение, что деформация среды складывается из суммы деформаций фаз. В результате получим следующие уравнения для определения коэффициента Пуассона и модуля упругости

$$B(D-f)\mu^2+[(A+D)f-f^2-AD-BC]\mu+(A-f)=0$$

$$E=\frac{(1-f)(1-\mu)\Delta}{a}+E_1(1+\mu_1)(1-\mu) \tag{5.4}$$

где

$$A=1-\frac{E_2-E_1}{a}z+\frac{E_1 b}{\Delta}\mu_1$$

$$B=\frac{E_1 b}{\Delta}-\frac{E_2-E_1}{a}z$$

$$C=\frac{E_2\mu_2-E_1\mu_1}{a}z+\frac{E_1 b}{\Delta}\mu_1$$

$$D=1+\frac{E_2\mu_2-E_1\mu_1}{a}z+\frac{E_1 b}{\Delta}$$

$$a=E_2(1-\mu_2)-E_1(1-\mu_1)$$

$$b=E_2(1+\mu_2)-E_1(1+\mu_1)$$

$$\Delta=(E_2-E_1)^2-(E_2\mu_2-E_1\mu_1)^2$$

Анализ полученных в результате характеристик и их численное сравнение с результатами, найденными по формулам (5.4) показывает их практически полное совпадение. Тем самым доказано, что формулы (5.3) могут быть использованы, если реализуется однородное напряженное состояние.

6. О НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Проблема определения эффективных характеристик возникает и является одной из определяющих в связанных нелинейных задачах, когда нелинейный процесс деформирования связан, например, с процессом фазового превращения, который, в свою очередь, зависит от напряженного состояния. В таком случае соотношения для эффективных характеристик многофазной среды должны включаться в общую систему связанных уравнений.

Приведем термодинамические определяющие соотношения для сред, существенно нелинейное поведение которых определяется как изменением некоторого характерного параметра процесса, так и характером напряженного состояния. К таким материалам относятся и так называемые материалы с прогрессирующими свойствами и, в частности, материалы с памятью формы. Рассмотрим термолдинамический потенциал Гиббса и положим, что он является функцией температуры, компонентов тензора деформаций, напряжений и скалярного параметра процесса q, а приращение некомпенсираванного тепла в необратимом процессе пропорционально приращению параметра процесса [2]

$$\Phi = \Phi(q, \varepsilon, \sigma, T), \quad dQ' = \psi \frac{\partial \chi}{\partial q} dq.$$

Здесь ε, σ -тензоры деформаций и напряжений.

Используя первый закон термодинамики

$$\varepsilon d\sigma + d\Phi + dQ' + SdT = 0 \tag{6.1}$$

примем также, что выполняется следующее равенство

$$d\varepsilon = A \cdot \cdot d\sigma + BdT + Cd\chi \tag{6.2}$$

Последнее соотношение необходимо чтобы сохранить допущение о независимости параметров $\varepsilon, \sigma, T, \chi$.

Следует иметь ввиду, что приращения $d\varepsilon, d\sigma, d\chi$ здесь являются независимыми, а величины A, B, C являются тензорными функциями $\varepsilon, \sigma, T, \chi$. Естественно принять для изотропного тела, что матрица податливости A и матрица коэффициентов теплового расширения определяется как и в термоупругости

$$\hat{A}_{ij\alpha\beta} = \hat{\lambda}\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + \hat{\mu}\left(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \delta_{j\alpha}\delta_{i\beta}\right)$$

$$B = \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial T} I_1(\sigma) + \delta_{ij} + 2\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial T}\sigma_{km}\delta_{ik}\delta_{jm} + \alpha\delta_{ij}. \tag{6.3}$$

Здесь скаляры $\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \alpha$ -являются функциями температуры и параметра процесса.

Уравнения (6.1),(6.2) приводят к следующей системе соотношений

$$\begin{gathered} \varepsilon + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \cdot \cdot A = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial T} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \cdot \cdot B + S = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} \cdot \cdot C + \psi \frac{\partial \chi}{\partial q} = 0 \end{gathered} \tag{6.4}$$

Первые две уравнения системы (6.3) выполняются тождественно если принять

$$\Phi = -\frac{\lambda}{2} I_1^2(\sigma) - \hat{\mu} I_2(\sigma) + \varepsilon \cdot \cdot \sigma + f(\chi, T), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = \sigma$$

$$S = -f_T(q, T) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial T} I_1^2(\sigma) + 2\frac{\partial \hat{\mu}}{\partial T} I_2(\sigma)\right] - \alpha I_1(\sigma) \tag{6.5}$$

Здесь f - некоторая функция T и χ, $I_1(\sigma), I_2(\sigma)$ - первый и второй инварианты тензора напряжений.

Третье уравнение системы (6.4) определяет величину ψ, а следовательно по второму закону термодинамики и приращение плотности энтропии dS. Имеем

$$\psi = -\frac{\partial f}{\partial \chi} + \frac{1}{2}\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \chi} I_1^2(\sigma) + \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial q} I_2(\sigma) + C \cdot \cdot \sigma \qquad (6.6)$$

Величина приращения плотности энтропии необходима для оценки диссипативных характеристик материалов с памятью формы.

Возвращаясь к определяющему уравнению (6.2), перепишем его в виде

$$d\varepsilon = \tilde{N} d\chi + d_{\chi=\mathrm{const}} \sigma^e, \qquad (6.7)$$

где второе слагаемое соответствует обычной термоупругости, а первое связано с нелинейными необратимыми процессами, контролируемыми, например, фазовыми превращениями.

Для замыкания системы определяющих соотношений введем матрицу физических констант модели, например в виде

$$C_{km} = \zeta I_1(\varepsilon_{km})\delta + 2\eta\varepsilon_{km} \qquad (6.8)$$

где ζ, η -скалярные функции $\varepsilon, \sigma, T, \chi$.

Нетрудно видеть, что приведенные формулы описывают полные деформации как аддитивную функцию упругих, термических и фазовых деформаций.

Уравнениями (6.3), (6.5)-(6.8) дается полная система определяющих соотношений например материалов с памятью формы. Действительно, достаточно принять, что $\chi \equiv q$ определяет объемную долю мартенситной фазы и соответственно является параметром процесса. Тогда скалярная функция $q = q(T, J(\sigma))$, ($J(\sigma)$ - некоторые инварианты напряжений) имеет термодинамическое описание в соответствии со вторым законом термодинамики и в соответствии с известными в литературе данными может быть представлено в форме линейных, экспоненциальных либо тригонометрических зависимостей от температуры, характерных температур фазовой диаграммы и инвариантов напряжений. полные. В результате определяющее соотношение (6.7) может быть представлено в следующем общем виде

$$d\sigma = G \cdot \cdot d\varepsilon^e + K dT \qquad (6.9)$$

где матрица четвертого ранга G соответствует классической термоупругости, матрица второго ранга K зависит от параметров ε, σ, а первое слагаемое соответствует упругому закону..

Записанное выражение легко может быть получено из (6.7) с учетом зависимости $q = q(T, J(\sigma))$ и является обобщенным определяющим соотношением в приращениях, к которому могут быть приведены известные определяющие уравнения: полученные, например, на базе термодинамических [4,7], структурно-аналитических [5] и микромеханических моделей [6].

Соотношения (6.9) позволяют описывать явления памяти формы, ориентированного превращения и др. в рамках связанной постановки задачи.

Получим уравнения, описывающие в нелинейной связанной постановке деформирование исследуемого элемента. Будем использовать соотношения в приращениях (инкрементальное описание) [8]. Для конкретности рассмотрим обобщенное плоское напряженное состояние.

Основные уравнения нелинейно деформируемой среды записываются в следующей форме

$$\nabla \cdot N + f = 0, \quad N = \int_0^h \sigma dz, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\left[\nabla u + (\nabla u)^T\right] \tag{6.10}$$

Здесь N, f - векторы внутренних и внешних усилий в полосе, $\hat{u}$ - вектор перемещений, σ, ε - тензоры напряжений и деформаций.

Положим, что модули упругости за висят от параметра процесса q и напряжений σ.

$$E = E(\sigma, q) \text{ и } q = q(\sigma, T) \tag{6.11}$$

Тогда из уравнений (6.10),(6.11) получим следующую систему уравнений в приращениях

$$\nabla(\Delta N) = 0, \qquad \Delta N = \int_0^h \Delta\sigma dz \tag{6.12}$$

$$\Delta\sigma = E \cdot\cdot \Delta\varepsilon + E_{,q}\,\Delta q = E \cdot\cdot \Delta\varepsilon + E_{,q}\,q_{,\sigma}\,\Delta\sigma + E_{,q}\,q_{,T}\,\Delta T$$

или

$$\Delta\sigma = C \cdot\cdot \Delta\varepsilon + C_T \Delta T,$$

$$C = E \,/\, (1 - E_{,q}\,q_{,\sigma}), \quad C_T = E_{,q}\,q_{,T} / (1 - E_{,q}\,q_{,\sigma})$$

$$\Delta N = B \cdot\cdot \Delta\varepsilon + \Delta N_0 \tag{6.13}$$

где

$$\Delta N_0 = B \cdot\cdot \Delta\varepsilon + B_T \Delta T, \quad B = E \cdot h, \quad B_T = C_T h$$

Уравнения (6.12), (6.13) определяют полое напряжений в полосе ΔN при начальном распределении поля напряжений ΔN_0.

Соответствующий Лагранжиан имеет в приращениях следующий вид

$$L = \iint \left[\frac{1}{2}\Delta\varepsilon \cdot\cdot B \cdot\cdot \Delta\varepsilon + \Delta N_0 \cdot\cdot \Delta\varepsilon\right] dV \tag{6.14}$$

Разобьем рассматриваемую область на элементы и в пределах каждого элемента аппроксимируем компоненты вектора смещений $\Delta u = \Delta u_\alpha l_\alpha$ (l_α-определяют базис, $\alpha = 1,2$), $\Delta u_\alpha = \Delta u_{\alpha k} f_u^k$, а также приращение параметра $\Delta T = \Delta T_k f_T^k$.

Имея ввиду последние равенства запишем выражения для лагранжиана в виде

$$L_e = \Delta u_{se}\left(\frac{1}{2}\varphi_{mkse}\Delta u_{mk} + \varphi_{pse}\Delta T_p\right),$$

где

$$\varphi_{mkse} = \iint \Delta\varepsilon_{mk} \cdot\cdot B \cdot\cdot \Delta\varepsilon_{se} dV, \quad \varphi_{pse} = \iint B_T \cdot\cdot \Delta\varepsilon_{se} f_T^p dV,$$

$$\Delta\varepsilon_{se} = \frac{1}{2}\left(\delta_{s\beta}\nabla_\alpha f_u^k + \delta_{s\alpha}\nabla_\beta f_u^k\right),$$

$\Delta u_{\alpha k}$, ΔT_k - узловые значения, f_u^k, f_T^k - аппроксимирующие функции.

Здесь по индексу k производится суммирование, а по индексу e суммирования нет.

Записанный выше Лагранжиан может быть представлен в матричной форме

$$L_e = \{\Delta u\}^T \left(\frac{1}{2}[g]\{\Delta u\} + [g]\{\Delta T\}\right) \tag{6.15}$$

где $[g]$ - матрица касательных жесткостей элемента "е", $[g_T]$ - матрица влияния приращений ΔT на узловые реакции.

Дифференциальная форма уравнений равновесия, соответствующая (6.15) имеет вид

$$[g]\{\Delta u\} + [g_T]\Delta T = 0 \tag{6.16}$$

Совокупность уравнений (6.16) образуют систему линейных уравнений для конструкции в приращениях, если известной является матрица касательных жесткостей B и B_T. Следовательно для связанной задачи к уравнениям (6.16) следует присоединить изопериметрические соотношения. Для изотропного тела их можно представить в форме соотношений

$$\int \gamma_{ij}\gamma_{ij} dV = C_\mu, \quad \int \theta^2 dV = C_\lambda \tag{6.17}$$

переписав в виде инкрементальных равенств. Очевидно это нетрудно сделать по аналогии с соотношениями для L_e и с равенствами (6.16). Следует иметь ввиду , что предварительно следует привлечь некоторые предположения, аналогичные тем, что использовались в разделе 5 для получения эффективных характеристик двухфазных сред, либо использовать формулы типа формул смеси для модулей сдвига, учитывая при этом что коэффициент наполнения изменяется с напряжениями (см. раздел 5). Изопериметрические соотношения дают уравнения для приведенных физических постоянных для каждого элемента разбиения области с учетом напряженного состояния и вида аппроксимирующих функций. При этом постоянные в правой части соотношений (6.17) олпределяется по предыдущему приближению.

Совокупная система уравнений в инкрементальной форме определяет численный алгоритм, который позволяет решать нелинейные задачи в связанной постановке.

Повышение точности определения физических параметров в пределах каждого элемента разбиения позволяет уменьшать число разбиений и тем самым повышает эффективность численного алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант No 96-04-084), и в сотрудничестве с Институтом гетерогенных сред при ВЦ РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И., Об основных принципах механики сплошной среды, в кн. Некоторые проблемы математики и механики, Изд. Сибирск. отд. АН СССР, Новосибирск, 1961.
2. Седов Л.И. и Эглит М.Э., Построение неголономных моделей сплошных сред с учетом конечности деформаций и некоторых физико-химических эффектов, ДАН, т. 149, № 4, 1963.
3. Кадич А. и Эделен Д., Калибровочная теория дислокации и дисклиминации, М., Мир, 1987, 169 с.

4. Tanaka K. A. phenomenological description on thermomechanical behhavior of shape memory alloys, J.Pressure Vessel Technology Trans. ASME, vol. 112, 1990, N2. pp.157-163.
5. Волков А.Е., Лихачев В.А., Пущаенко О.В., Щербакова Л.Н. Численное моделирование мартенситной неупругости в условиях реализации пластичности превращения. В кн. Материалы с новыми функциональными свойствами. Новгород, Материалы семинара, 1990, с. 38-40.
6. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы, Проблемы машиностроения и надежности машин, 1994, № 6.
7. Boyd, J.G., and Lagoudas, D.C., Thermomechanical Response of Shape Memory Composites, Journal of Intelligent Materials and Structures, Vol. 5, 1994, pp. 333-346.
8. Гиоцинтов А.Е. и Либерзон А.С. К решению задач оптимального растяжения и изгиба нелинейно деформируемых ортотропных пластин, В кн. Механика конструкций из композиционных материалов, М., Машиностроение, 1992, с. 177-183.