

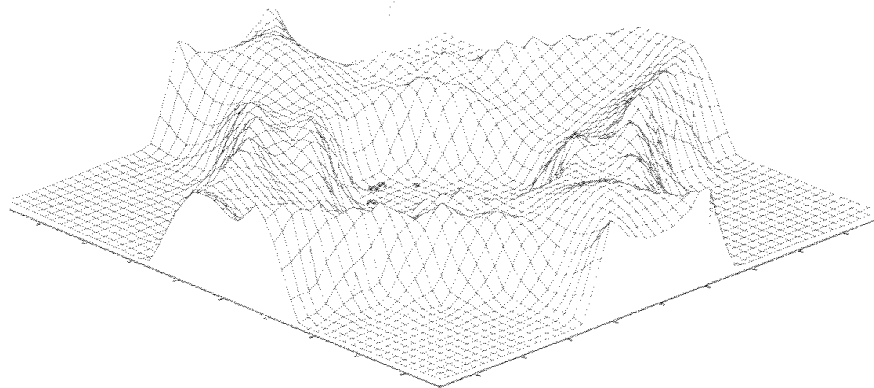
Грант РФФИ № 95-01-1236



ИЗДАНИЕ
ИГРИМ РАН

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

ЯНВАРЬ-МАРТ 1997
ТОМ 3, №1



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

Рост отслоений в элементах конструкций из композитов при циклическом нагружении Болотин В.В., Нефедов С.В., Митричев Т.В.....	3
Проблемы проектирования, расчета и создания композитов с памятью формы и конструкций из них Образцов И.Ф., Мовчан А.А.....	23
Прогнозирование эффективных упругих свойств композитов со случайными структурами из составных или полых включений обобщенным методом самосогласования Паньков А.А.....	40
Влияние типа растворителя на поведение сорбированной полимерной цепи в простом сдвиговом потоке Лемак А.С., Балабаев Н.К., Карнет Ю.Н., Яновский Ю.Г.....	56
К проблеме редукции плоской задачи теории упругости к последовательности одномерных краевых задач Амосов А.А., Жаворонок С.И.....	69
Собственные колебания плоских дискретно подкрепленных прямоугольных панелей Рыбаков Л.С., Сильченко Л.Г.....	81
О корректности классической и прикладных теорий пластин Лурье С.А., Белов П.А.....	96
Механические характеристики слоя макромолекул вблизи поверхности наполнителя Згаевский В.Э., Яновский Ю.Г.....	105
Кинематические свойства физической реальности Кононенко М.М.....	113

О КОРРЕКТНОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНЫХ ТЕОРИЙ ПЛАСТИН

Лурье С. А., Белов П. А. *

Институт прикладной механики РАН, Москва.

**Институт механики гетерогенных сред (при ВЦ РАН), Москва*

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена анализу классической проблемы прикладной теории упругости о корректном и полном построении двумерных уравнений теории плит, исходя из уравнений трехмерной теории упругости. В статье последовательно дается асимптотический вывод разрешающих уравнений теории трансверсально-изотропных плит в перемещениях с анализом граничных условий как на лицевых так и на торцевых поверхностях плиты. Полученные уравнения дают значительные поправки даже для классического варианта теории пластин, связанные с асимптотически точным учетом изменяемости действующих на пластину нагрузок. Устанавливаются особенности асимптотического вывода уравнений прикладных теорий пластин, учитывающих в среднем деформации сдвига.

ВВЕДЕНИЕ

Теория пластин, являясь объектом исследования прикладной теории упругости, представляется на сегодняшний день завершенной логически и формально обоснованной теорией. Тем не менее, именно классическая теория пластин наиболее широко обсуждается на протяжении многих лет [1-3]. По всей видимости, это связано с тем, что несмотря на четкость и ясность постановки задачи, обоснованность используемых для построения теории методов исследования, не удается в классической теории пластин избежать явных противоречий [1]. Следует иметь в виду, что проблемы, встречающиеся при построении теории пластин являются актуальными и для теории оболочек. Этим также объясняется интерес к указанной проблеме.

Первоначально желание модифицировать классическую теорию возникло, по-видимому, с связи с необходимостью учесть в расчетах влияние поперечного сдвига хотя бы приближенно для плит средней толщины, трансверсально-изотропных и ортотропных пластин. Одновременно с этим тот факт, что в рамках классической теории невозможно удовлетворить граничным условиям для усилий и моментов на торцах, привело к попыткам провести некоторую ревизию ставших уже привычными представлений о месте классической теории как корректной, последовательно построенной теории, имеющей строгое математическое обоснование [1,3]. Главными критериями при всякого рода уточнениях здесь должны быть не только возможность удовлетворения полному набору статических условий на торцах, их соответствие кинематическим условиям, но и полнота описания напряженного состояния с точки зрения учета

краевых эффектов и погранслоев соответствующей изменяемости. В данной работе в отличие от известных исследований [3-5] предлагается асимптотический подход к проблеме, использующий решение в перемещениях. В качестве исходных уравнений рассматриваются уравнения в перемещениях трехмерной теории упругости для трансверсально-изотропного тела.

1. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим упругое трансверсально-изотропное цилиндрическое тело, отнесенное к декартовой ортогональной системе координат X, Y и нормали к лицевой поверхности - N . Плоскости изотропии параллельны лицевым поверхностям (перпендикулярны нормали N). В плоскостях изотропии характеристики материала определяются параметрами Ламе μ и λ , а величинами E, Λ и G задаются соответственно модули упругости и модуль сдвига материала из плоскости изотропии.

Полагаем в дальнейшем, что координаты ортов X, Y и N , связанных с исследуемым упругим телом в некоторой фиксированной системе координат $x = (x_1, x_2, x_3)$ равны соответственно величинам X, Y и N . Поле перемещений определяется вектором R с координатами R_i в заданной фиксированной системе координат $\{x_i\}$, $i = 1, 2, 3$. По вектору перемещений легко определить компоненты тензора деформаций и записать выражения для компонент тензора напряжений. В общем случае для трансверсально-изотропного тела получим следующую формулу для напряжений [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \mu \left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial R_\beta}{\partial x_\alpha} \right) (\delta_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta) (\delta_{ij} - N_i N_j) + \\ & + \lambda \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} (\delta_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta) (\delta_{ij} - N_i N_j) + \\ & + \Lambda \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} N_\alpha N_\beta (\delta_{ij} - N_i N_j) + \Lambda \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} (\delta_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta) N_i N_j + \\ & + E \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} N_\alpha N_\beta N_i N_j + G \left(\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial R_\beta}{\partial x_\alpha} \right) N_\alpha N_\beta (\delta_{ij} - N_i N_j) = \\ = & \mu \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \left[(\delta_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta) (\delta_{ij} - N_i N_j) + (\delta_{\alpha i} - N_\alpha N_i) (\delta_{\beta j} - N_\beta N_j) \right] + \\ & \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} E N_\alpha N_\beta N_i N_j + \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \lambda (\delta_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta) (\delta_{ij} - N_i N_j) + \\ & \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \Lambda \left[N_\alpha N_\beta (\delta_{ij} - N_i N_j) + N_i N_j (\delta_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta) \right] + \\ & + G \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \left[N_\alpha N_\beta (\delta_{ij} - N_i N_j) + N_i N_j (\delta_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta) \right]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь δ_{ij} - дельта Кронеккера.

Запишем теперь выражения для компонент тензора напряжений в осях связанных с исследуемым телом. Выражения, соответствующие нормальным напряжениям в направлении осей X , Y и N , а также выражения для касательных напряжений последовательно можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \sigma_{ij} X_i X_j = \left\{ 2\mu X_\alpha X_\beta + \lambda(\delta_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta) + \Lambda N_\alpha N_\beta \right\} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \\
 \sigma_y &= \sigma_{ij} Y_i Y_j = \left\{ 2\mu Y_\alpha Y_\beta + \lambda(\delta_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta) + \Lambda N_\alpha N_\beta \right\} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \\
 \sigma_z &= \sigma_{ij} N_i N_j = \left\{ \Lambda(\delta_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta) + EN_\alpha N_\beta \right\} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \\
 \tau_{xy} &= \sigma_{ij} X_i Y_j = \left\{ \mu(X_\alpha Y_\beta + Y_\alpha X_\beta) \right\} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \\
 \tau_{yz} &= \sigma_{ij} Y_i N_j = \left\{ G(N_\beta Y_\beta + N_\alpha Y_\beta) \right\} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \\
 \tau_{zx} &= \sigma_{ij} X_i N_j = \left\{ G(X_\alpha N_\beta + N_\alpha X_\beta) \right\} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Формулы (1.2) определяют напряжения и необходимы в дальнейшем для формулировки статических граничных условий в перемещениях на лицевых и торцевых поверхностях цилиндрической плиты. Для формулировки уравнений равновесия в перемещениях запишем также дивергенцию тензора напряжений

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \mu(\delta_{\alpha\alpha} - N_\alpha N_\alpha) \nabla^2 R_\alpha + \mu(\delta_{\beta\beta} - N_\beta N_\beta) \frac{\partial \theta}{\partial x_\beta} + \lambda(\delta_{ij} - N_i N_j) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \\
 &+ \Lambda(\delta_{ij} - N_i N_j) \frac{\partial W'}{\partial x_j} + \Lambda N_i \theta' + EN_i W'' + GN_i \nabla^2 W + G(\delta_{\alpha\alpha} - N_\alpha N_\alpha) R_\alpha'' \\
 &+ G(\delta_{\beta\beta} - N_\beta N_\beta) \frac{\partial W'}{\partial x_\beta} + GN_i \theta' = (1.3) \\
 &= \left[\mu \nabla^2 R_\alpha + (\mu + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + (G + \Lambda) \frac{\partial W'}{\partial x_\alpha} + GR_\alpha'' \right] (\delta_{\alpha\alpha} - N_\alpha N_\alpha) + \\
 &+ [GN_i \nabla^2 W + (G + \Lambda) \theta' + EW''] N_i
 \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения, в соответствии с которыми $\theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$.

$2\omega = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$, U, V и W проекции вектора перемещения R соответственно на оси X , Y и N ; штрихом обозначается дифференцирование по поперечной координате z ; как обычно по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Учитывая уравнения (1.3), запишем систему трех уравнений равновесия в перемещениях

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 U + G U'' + (\mu + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x} + (G + \Lambda) \frac{\partial W'}{\partial x} = 0 \\ \mu \nabla^2 V + G V'' + (\mu + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial y} + (G + \Lambda) \frac{\partial W'}{\partial y} = 0 \\ G \nabla^2 W + E W'' + (G + \Lambda) \theta' = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

В работе [6] подобные уравнения были использованы для того, чтобы получить новое представление решения теории упругости в перемещениях через потенциальные функции. При этом уравнения пространственной теории упругости для потенциалов оказалось по форме идентичным двумерным уравнениям теории пластин Рейсснера-Тимошенко. В данном исследовании мы используем новую запись уравнений, показывающую, что в общем случае для трехмерной задачи краевые задачи для перемещения W и поворота ω могут быть сформулированы отдельно. Т.е. трехмерная краевая задача преобразуется к виду, аналогичному тому, что встречается в двумерной прикладной теории плит [1]. Для этого осуществим операцию ротора и дивергенции от первых двух уравнений и воспользуемся третьим уравнением равновесия (1.4). Получим следующую преобразованную систему уравнений равновесия

$$\begin{cases} G \omega'' + \mu \nabla^2 \omega = 0 \\ E W'' + \left[\frac{E(2\mu + \lambda) - \Lambda(2G + \Lambda)}{G} \right] \nabla^2 W' + (2\mu + \lambda) \nabla^2 \nabla^2 W^{(-1)} = 0 \\ \theta = -\frac{1}{(G + \Lambda)} [E W' + G \nabla^2 W^{(-1)}] \end{cases} \quad (1.5)$$

Наконец запишем через перемещение W и поворот ω систему соотношений для нормальных напряжений σ_z , а также ротора и дивергенции касательных напряжений τ_{xz} , τ_{yz} необходимых для постановки граничных условий на лицевых поверхностях цилиндрической плиты.

$$\begin{cases} \sigma_z = E W' + \Lambda \theta = \frac{G}{(G + \Lambda)} [E W' - \Lambda \nabla^2 W^{(-1)}] \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{G}{(G + \Lambda)} [E W'' - \Lambda \nabla^2 W^{(0)}] \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 2G \omega' \end{cases} \quad (1.6)$$

Системы уравнений (1.5) и (1.6) доказывают возможность разделения исходной системы уравнений (1.1) на независимые разрешающие уравнения относительно перемещения W и поворота ω , также отдельно ставятся граничные условия на лицевых поверхностях при $z = const$. В целом же, естественно, краевая задача остается связанной из-за граничных условий на торцевой поверхности плиты.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ

В соответствии с асимптотическим подходом представим компоненты вектора перемещений в виде формальных разложений по малому параметру δ^2 . Предполагая в дальнейшем построить асимптотический вариант уравнений теории тонких пластин принимаем, что малый параметр равен относительной толщине пластины $\delta = h/l$, где $2h$ - толщина пластинки, а l - характерный размер пластинки в плане. Используется следующее разложение компонент перемещений

$$U = \delta^{2n+1} U_n, \quad V = \delta^{2n+1} V_n, \quad W = \delta^{2k+2M} W_k \quad (2.1)$$

где U_n , V_n , W_k , отнесенные к толщине пластины компоненты смещений U , V и W соответственно n -ого и k -ого приближения, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

В дальнейшем рассматривается задача чистого изгиба, поэтому, учитывая одинаковый характер изменяемости и нечетность функций U и V по толщине, в разложениях (2.1) принимаются нечетные степени по δ для этих компонент смещений. Соответственно для функции W используется четное разложение. Показатель M указывает на возможность отличной от U и V изменяемости W . В формулах (2.1) предполагается суммируемость по повторяющимся индексам. При $M=0$ асимптотическое представление (2.1) совпадает с разложениями, используемыми А.Л.Гольденвейзером [5]. Случай $M < 0$ соответствует различным моделям потенциального характера (в том числе краевой плоской деформации, когда $U = 0$ или $V = 0$), а при $M > 0$ соответствует различным моделям вихревого характера (в том числе моделям краевого скручивания $W = 0$).

Подставляя разложения (2.1) в уравнения равновесия (1.5) и интегрируя полученные так выражения по поперечной координате z получим следующую систему соотношений

$$\begin{aligned} U_n &= u_n z + \frac{2\mu}{G} \frac{\partial \bar{\sigma}_{(n-1)}^{(-2)}}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{E(2\mu + \lambda) - (G + \Lambda)^2}{G(G + \Lambda)} W_{(n-M)}^{(-1)} + (2\mu + \lambda) \frac{G}{(G + \Lambda)} \nabla^2 W_{(n-M-1)}^{(-3)} \right] \\ V_n &= v_n z - \frac{2\mu}{G} \frac{\partial \bar{\sigma}_{(n-1)}^{(-2)}}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{E(2\mu + \lambda) - (G + \Lambda)^2}{G(G + \Lambda)} W_{(n-M)}^{(-1)} + \frac{(2\mu + \lambda)}{(G + \Lambda)} \nabla^2 W_{(n-M-1)}^{(-3)} \right] \\ W_k &= w_k^* + \varepsilon_k \frac{z^2}{2} - \frac{E(2\mu + \lambda) - \Lambda(2G + \Lambda)}{EG} \nabla^2 W_{(k-1)}^{(-2)} - \frac{(2\mu + \lambda)}{E} \nabla^2 \nabla^2 W_{(k-2)}^{(-4)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь u_n , v_n , ε_k и w_k^* являются плоскими функциями координат x, y в плоскости пластины, причем имеет место равенство

$\varepsilon_k = -\frac{(G + \Lambda)}{E} \left(\frac{\partial W_{(k+1)}}{\partial x} + \frac{\partial W_{(k+M+1)}}{\partial y} \right)$; индексы, стоящие сверху при перемещениях в скобках со знаком минус обозначают неопределенное интегрирование по поперечной координате; что плоская функция w_k^* , по-существу, (с точностью до $O(\delta^2)$), определяет прогиб пластинки (прогиб определяется как интегральная величина $w_k = \int W_k dz$).

Нетрудно видеть, что соотношения (2.2) для перемещений в плоскости плиты на произвольном шаге приближения могут быть представлены через градиент некоторой потенциальной функции (выражение в квадратных скобках) и функцию скручивания; которая пропорциональна повороту ω . Такие соотношения вполне соответствуют формулам для записи тех же самых перемещений с помощью потенциальной функции и функции скручивания в теории пластин Рейсснера-Тимошенко-Генки [1]. Используя равенства системы (2.2) и (1.6), запишем граничные условия на торцевой поверхности пластинки для нормальных напряжений σ_z и градиента касательных напряжений

$$\begin{aligned} E\varepsilon_k - (EA + \Lambda)\nabla^2 W_{(k-1)}^{(-1)}(z=1) - (2\mu + \lambda)\nabla^2 \nabla^2 W_{(k-2)}^{(-2)}(z=1) &= q_k \\ E\varepsilon_k - (EA + \Lambda)\nabla^2 W_{(k-1)}^{(0)}(z=1) - (2\mu + \lambda)\nabla^2 \nabla^2 W_{(k-2)}^{(-2)}(z=1) &= -P_k \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $A = \frac{E(2\mu + \lambda) + \Lambda(2G + \Lambda)}{EG}$, а правые части для каждого k -ого приближения определяются по заданной нормальной q и касательным P_x и P_y нагрузкам с помощью следующих формул

$$\delta^{2k+2M} q_k = \frac{G + \Lambda}{G} q, \quad \delta^{2k+2M+1} P_k = \frac{(G + \Lambda)}{G} \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} \right)$$

Остается невыполненным граничное условие для ротора касательных усилий на лицевой поверхности пластинки. Однако нетрудно видеть (1.6), что оно сводится к граничному условию на нормальную производную от поворотов ω .

Рассмотрим систему уравнений (2.3). Сначала найдем из этой системы величину ε_k и подставим результат в выражение для перемещения (в третье уравнение системы (2.2)). Теперь исключим из системы уравнений (2.3) ε_k , вычитая одно уравнение из другого. Нетрудно убедиться, что в результате, в слагаемом, содержащем оператор Лапласа, происходит потеря точности, т.е. в этом слагаемом следует использовать представления, содержащие более высокий порядок приближения. Поэтому полученное описываемым образом уравнение следует переписать, используя третье уравнение системы (2.3), преобразованное после подстановки туда ε_k . В результате получим следующее разрешающее уравнение, записанное относительно прогиба пластинки w_k^* .

$$\begin{aligned}
& \frac{(G + \Lambda)}{3G} \left(2\mu + \lambda - \frac{\Lambda^2}{E} \right) \nabla^2 \nabla^2 w_{(k-1)}^* = \\
& = (q_k + p_k) - \frac{\left(A + \frac{\Lambda}{E} \right)}{6} \nabla^2 (q_{(k-1)} - p_{(k-1)}) - \\
& - \left[\frac{1}{18} \left(A + \frac{\Lambda}{E} \right)^2 + \frac{1}{60} \left(-A \left(A + \frac{\Lambda}{E} \right) + \frac{(2\mu + \lambda)}{E} \right) \right] \nabla^2 \nabla^2 (q_{(k-2)} - p_{(k-2)}) + O(\delta^6)
\end{aligned} \quad (2.4)$$

Для замыкания задачи получим естественные граничные условия на торцах плиты. Для этого можно воспользоваться вариационной формулировкой трехмерной задачи теории упругости, приведенной в [6]. С учетом записанных уже уравнений равновесия вариация лагранжиана приобретает следующий вид

$$\begin{aligned}
\delta L = & \oint \left\{ \left[H - \mu \left(\frac{\partial R_s}{\partial v} + \frac{\partial R_v}{\partial s} \right) \right] \delta R_s + \right. \\
& + \left[M - \left(\mu \frac{\partial R_s}{\partial s} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial R_v}{\partial v} + \Lambda W' \right) \right] \delta R_v + \\
& + \left[Q - G \left(R_s + \frac{\partial W}{\partial v} \right) \right] \delta W \Big\} ds dz = \\
& \oint \left\{ \left[\left(H - \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial v} \right] \delta \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \right. \\
& + \left[\left(M - (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 \psi}{\partial s \partial v} \right) + \left(\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial v^2} - \Lambda W' \right) \right] \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) + \\
& + \left. \left[\left(Q - G \frac{\partial \psi'}{\partial s} \right) - G \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial v} - \frac{\partial W}{\partial v} \right) \right] \delta W \right\} ds dz = 0
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь интегрирование проводится по торцевой поверхности плиты, s и v соответственно контурная координата и нормаль торцевой поверхности, φ и ψ соответственно потенциальная функция, равная выражению в квадратных скобках в формулах (2.2) и функция скручивания, пропорциональная ω ; H , M и Q - заданные крутящий, изгибающий моменты и перерезывающая сила.

Выражения в квадратных скобках, стоящие множителями при варьируемых величинах в (2.5) соответствуют граничным условиям на крутящий и изгибающий моменты и перерезывающую силу на торце. Легко видеть, что эти граничные условия записываются через функций прогиба и поворота.

3. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ

Уравнение (2.4) является обобщением бигармонического разрешающего уравнения классической теории пластин. Если в нем не удерживать последнее слагаемое, имеющее точность $O(\delta^4)$, то получим уточнение известного

уравнения Генки [1]. Уравнение Софи-Жармен, обобщенное на случай трансверсально-изотропной пластинки, получится из (2.4), если в правой части последнего удержат лишь первое слагаемое:

Разрешающее уравнение (2.4) является асимптотически точным и поэтому приводит к следующему важному выводу. Бигармоническое уравнение классической теории пластин следует использовать для построения решений теории тонких пластин лишь в случае нагружения по лицевым поверхностям с малой изменемостью нагрузки по координатам. В случае быстро изменяемых нагрузок использование уравнения Софи-Жармен с традиционной правой частью представляется некорректным и может привести к ошибочным результатам.

Обратим внимание на уравнение для функции поворота с оператором Гельмгольца. Если к этому уравнению подходить с точки зрения асимптотического метода в рамках разложения (2.1), то легко показать, что с точностью до $O(\delta^2)$ функция ω определяется по заданным значениям ротора касательных усилий на лицевой поверхности плиты

$$\omega = \frac{1}{2G} \left(\frac{\mathcal{P}_x}{x} - \frac{\mathcal{P}_y}{y} \right) z + O(\delta^2). \quad \text{В таком случае не имеется произволов для}$$

выполнения трех граничных условий на торце пластины и приходим к некоторой модифицированной классической задаче пластин с поправками из-за учета функций поворотов в граничных условиях (2.5) на торце в изгибающий, крутящий моменты и перерезывающую силу.

Казалось бы что это говорит в пользу классической теории упругости, которая должна быть несколько модифицирована указанным выше образом с учетом изменчивости заданных нагрузок. Однако встает вопрос: не слишком ли большие потери при этом будут в основном напряженном состоянии из-за такого приближенного учета функций скручивания?

Рассмотрим снова трехмерное уравнение для ω и, поступая несколько непоследовательно, не используя асимптотического подхода, построим решение методом разделения переменных. При отсутствии касательных усилий на лицевых поверхностях функцию ω можно задать как произведение $\omega = \Omega(x, y)\omega^*(z)$. Тригонометрическая функция $\omega^*(z)$ подбирается так чтобы выполнить условие на лицевой поверхности. Функция же Ω удовлетворяет тогда уравнению вида:

$$\nabla^2 \Omega - k^2 \frac{\mu}{G} \Omega = 0$$

Это уравнение, очевидно, полностью совпадает с уравнением на функцию скручивания в теориях пластин, учитывающих в среднем деформации сдвига [1]. При этом имеется дополнительный произвол для удовлетворения трех граничных условий (2.5) на торце пластины. Обратим внимание на то важное обстоятельство, что пограничные, порожденные в основном напряженном состоянии учетом трехмерного уравнения на ω имеют меньшую изменчивость чем краевое скручивание и краевая плоская деформация изученные в работе [5] в результате анализа вспомогательных итерационных схем. Поправки в основное напряженное состояние отмеченные в предлагаемом здесь исследовании не могут быть получены в результате упомянутых вспомогательных итерационных процессов. Этот факт может быть использован как аргумент в пользу теорий пластин Тимошенко-Рейсснера-Генки. Заметим, что для корректного

асимптотического учета полного уравнения для функции ω в системе разрешающих уравнений прикладной теории пластин следовало бы провести асимптотический вывод уравнений с учетом разложений компонент перемещений вида (2.1) по малому параметру δ .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате рассмотрения трехмерных уравнений теории упругости трансверсально-изотропного тела в перемещениях и последовательного вывода на их основе разрешающих уравнений двумерной теории плит с использованием асимптотических разложений компонент перемещений с малым параметром, равным относительной толщине пластинки, построено асимптотически точное разрешающее уравнение относительно прогиба пластинки. Полученное бигармоническое разрешающее уравнение относительно прогиба пластинки позволяет отметить ограничения на использование уравнений классической теории, накладываемые изменчивостью приложенных нагрузок, и указывает на возможность обобщения уравнения классической теории изгиба в случае нагрузок большой изменчивости. Показано, что учет скручивания, который следует проводить с использованием трехмерного уравнения на функцию поворотов ω , дает поправки в основное напряженное состояние существенно меньшей изменчивости нежели краевое скручивание и краевая плоская деформация, изученные с помощью в [5] вспомогательных итерационных схем.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда
Фундаментальных Исследований (грант № 95-01-1236)*

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Известия РАН. Механика твердого тела. 1992. № 3. С.26-47.
2. Жилин П.А. О теории пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Известия РАН. Механика твердого тела. 1992. № 3.
3. Гольденвейзер А.Л. Несколько замечаний о неклассических теориях пластин // Прикладная математика и механика. 1994. № 2.
4. Гольденвейзер А.Л. К теории изгиба пластинок Рейсснера // Изв. АН СССР. 1958. №4. С. 102-109.
5. Гольденвейзер А.Л. Построение теории изгиба пластин методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. Т. XXVI. 1962. С.668-686.
6. S.A.Lur'e, A.R.Vvedenskii, and N.P.Shumova Correct variants of the refined theories of composite beams, plates, and shells. Composite Mechanics and Design, v.2, N1, 1996, pp.79-96.