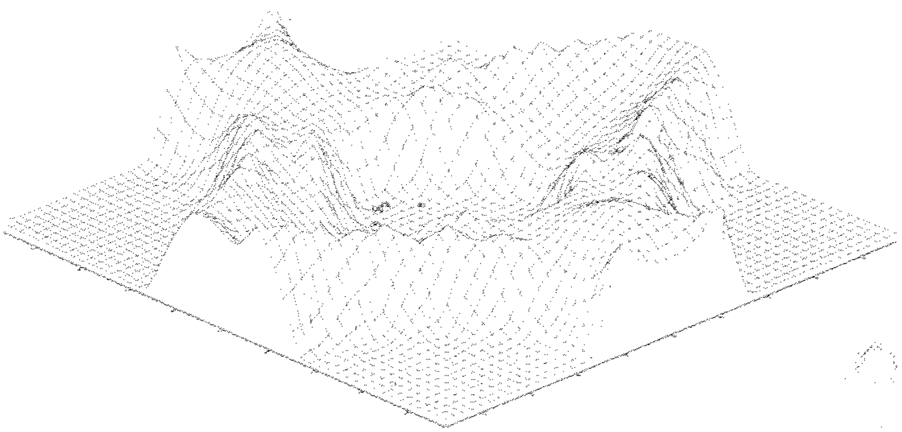
РФФИ Грант N 96-01

ИЗДАНИЕ
ИПРИМ·РАН

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

ИЮЛЬ-СЕНТЯБРЬ 1997
ТОМ 3, №3



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

ОБ ОБОБЩЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ Х К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

И.Ф. Образцов, С.А. Лурье, П.А. Белов

Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

Обсуждаются проблемы представления решений прикладных задач теории упругости и, в частности, решений двумерных задач ортотропного тела, задач теории композитных плит и оболочек в виде разложений по некоторой первоначально выбранной системе базисных решений. Как правило, любое решение сколько-нибудь сложной проблемы при решении в точной или приближенной постановке находится в виде некоторого разложения по системе заданных координатных функций. Исключение составляет пожалуй лишь аналитические решения весьма ограниченного класса простых задач. Решения, определяемые с помощью численных методов конечных элементов, конечных разностей и др. также можно трактовать как разложения по специальной системе функций, определенных в узлах сетки или конечных элементов. В результате, проблема построения решений сводится к проблеме нахождения коэффициентов в указанных разложениях, которая, в свою очередь, приводится к соответствующей алгебраической проблеме, в общем случае допускающей лишь приближенное решение. Одной из важнейших задач, поэтому, является повышение эффективности построенных таким образом приближенных решений. их физическая прозрачность и обоснованность, строгое математическое обоснование и оценка точности. В статье отмечаются некоторые новые методы, позволяющие найти точные решения в форме разложений в канонических областях с использованием специальных систем функций и биортогональных разложений. Далее обсуждаются некоторые аспекты построения моделей сред с обобщённой кинематикой и органически вытекающие из них новые формы представления искомых решений задач механики деформируемого твердого тела в достаточно общей трехмерной постановке в форме разложений по подпространствам кинематических состояний в энергетической норме, определяемой потенциальной энергией деформации.

1. О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО ПОДСИСТЕМЕ ЗАДАННЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

Предлагается строить решения прикладных задач теории упругости, теории пластин и оболочек в форме разложений по системе заданных, частных кинематических состояний. В этом случае возникает ряд вспомогательных задач, традиционных [1] с точки зрения проблемы представления решения некоторой краевой задачи в виде разложения в ряды по заданной системе функций, играющих роль обобщенных координатных функций: определение энергетического пространства, энергетического произведения и энергетической нормы, построение минимизирующей последовательности функций и исследование ее сходимости и т.п. Прежде чем перейти к существу дела сделаем некоторое отступление, связанное с интегральными законами сохранения.

1.1. Некоторые замечания об интегральных уравнениях сохранения.

В работе [2] были предложены модели сред с обобщённой кинематикой, построенные с использованием известного приема путем введения лишь достаточно общих кинематических связей в виде выражения для несимметричного тензора дисторсии. При этом в предположении линейной упругости были установлены определяющие соотношения, соответствующие варианту теории упругости с отсутствием парности касательных напряжений. Этот факт следует из несимметричности введенных кинематических связей и напрямую связан с учетом упругих поворотов в кинематике. В данной работе вопрос о моделях с непарностью касательных напряжений построенных в [2] затронут лишь потому, чтобы отметить интегральный характер законов сохранения относительно несимметричных компонент тензора напряжений. Последнее обстоятельство, наряду с тем что дифференциальных (локальных) уравнений равновесия, полученных как уравнения Эйлера, имеется в точности как и в классической теории упругости всего лишь три, не должно вызывать удивления. Физический смысл этих соотношений сохранения точно такой же как и физический смысл интегральных уравнений равновесия упругого тела относительно главного вектора объемных и поверхностных сил и главного момента этих сил. При подобной формулировке сред не нарушается не одно из исходных положений, выполняются соотношения сохранения. В частности, в случае отсутствии парности касательных напряжений поворот упругого тела как твердого отсутствует если напряжения в объеме удовлетворяют следующему соотношению сохранения:

$$\int\left(\sigma_{\alpha\beta} Э_{\alpha\beta i} - k\Omega_n Э_{\alpha\beta i} \right) dV = 0$$

В работе [2] показано, что при соответствующем выборе начального состояния отсчета всегда найдется соответствующее количество постоянных, чтобы уравнения сохранения выполнялись. При этом попытка получить из интегральных уравнений сохранения локальных уравнений, записанных в дифференциальной форме, возможна, но требует дополнительных и весьма жестких дополнительных ограничений при описании среды. Поясним последнее на примере рассуждений, используемых обычно при обосновании парности касательных напряжений в классический теории упругости. При традиционном подходе после того как из уравнений равновесия моментов, записанных для всего исследуемого тела с помощью локальных уравнений равновесия получают интегральные соотношения сохранения (они получаются в форме записанных выше соотношений, если принять в последних $k = 0$) относительно касательных напряжений, делают дополнительное предположение о том что для выполнения этих условий необходимо, чтобы соответствующие подынтегральные выражения обращались в ноль. В результате приходим к условиям парности касательных напряжений. Единственным аргументом в пользу столь сильного предположения является утверждение о том, что интегральные соотношения должны выполняться для произвольного объема V, что очевидно, является дополнительным предположением, ибо исходные глобальные уравнения равновесия для исследуемой среды будут выполняться и в том случае, если всего лишь удовлетворяются интегральные соотношения сохранения. Сделанные выше рассуждения необходимы для большей ясности при дальнейшем изложении, когда интегральные уравнения сохранения будут получены как необходимые условия стационарности Лагранжиана и далее используются при определении коэффициентов в разложении искомого решения по заданной системе некоторых частных кинематических начальных состояний.

1.2. Некоторые примеры разложений по кинематическим состояниям.

Здесь будут рассмотрены некоторые примеры представления решения в форме прямой суммы частных решений, т.е. некоторые частные виды разложений. Используем далее следующие обозначения. Полагаем, что X_i и Y_i - соответственно силы, действующие в объеме V и на поверхности F, ограничивающей исследуемое упругое тело, L - Лагранжиан, соответствующий, принятой модели среды, U - потенциальная энергия деформации, A-работа заданных объемных и поверхностных усилий на возможных перемещениях упругого тела. Следовательно, можем записать

$$L = A - U$$

$$A = \iiint_V X_i R_i dV + \iint_{S_y} Y_i R_i dF \qquad (1.1)$$

Конкретное выражение для потенциальной энергии может быть записано для каждой конкретной модели деформирования. Уравнения равновесия в дифференциальной форме и соответствующие граничные тогда легко записываются как уравнения Эйлера и естественные граничные условия, соответствующие функционалу Лагранжа. Иначе говоря, чтобы сформулировать краевую задачу при решении в перемещениях достаточно, как известно, записать вариацию функционала Лагранжа. Например, для среды с изотропными свойствами, в которой перемещения, будучи непрерывными и дифференцируемыми функциями подчиняются связям, соответствующим несимметричным соотношениям для тензора дисторсии [ ] вариация Лагранжиана имеет вид:

$$
\begin{aligned}
\delta L = \iiint \Bigg[& (\mu+k)\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_i \partial x_j} + (\mu+\lambda-k)\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} + \\
& + D\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}Э_{\alpha\beta i} - CR_i + X_i \Bigg]\delta R_i dV + \\
+ \iint \Bigg[& Y_i - \mu\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right)n_j - \lambda\frac{\partial R_k}{\partial x_k}n_i - k\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right)n_j + \\
& + \frac{1}{2}DR_k n_j Э_{ijk} - AR_j n_j n_i - BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j)\Bigg]\delta R_i dF = 0
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Вариационное уравнение (1.2) обеспечивает формулировку как системы разрешающих дифференциальных уравнений, так и системы соответствующих граничных условий для среды с непарностью касательных напряжений (k, D), распределенными по объему (C) и поверхности (B, A) связями типа упругих оснований. Считаем необходимым отметить, что уравнения, записанные выше, в силу того, что они содержат слагаемое пропорциональное смещениям (постоянная C), представляют на наш взгляд значительный интерес в теории тонких пленок, а также при описании динамического поведения сред. Выражение (1.2) записано для случая первой основной задачи, т.е. поверхностное интегрирование ведется по той части поверхности где вариация перемещений не равна нулю. Было показано, что вектор перемещений в среде может быть представлен в виде обобщенной формулы Чезаро, в которой интегральная составляющая определяется лишь через компоненты тензора девиатора деформаций, отвечающего за изменение формы. Внеинтегральная составляющая представляет из себя полином второго порядка (в отличие от обычной формулы Чезаро) и определяет не только трансляции R_i^0 и повороты как твердого тела ω_α^0, но и группу движений, связанную с объемными и объемно-вращательными движениями- θ^0 и θ_i^0. Имеем [2]

$$
R_i = R_i^0 + \omega_\alpha^0\left(x_\beta - x_\beta^0\right)Э_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\theta^0\left(x_i - x_i^0\right) + + \frac{1}{3}\theta_j^0 P_{ij} + r_i \tag{1.3}
$$

Величина r_i выражается с помощью контурного интеграла лишь через компоненты тензора девиатора деформаций. Кроме того, в дальнейшем будем использовать следующее обозначение: $P_{ij} = (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) - \frac{1}{2}\delta_{ij}(x_k - x_k^0)(x_k - x_k^0)$

Представление (1.3) можно трактовать как некоторое разложение искомых перемещений в пространстве частных кинематических состояний.

1. Рассмотрим более подробно частный случай, когда $a = B = C = k = 0$. В этом случае вариация Лагранжиана записывается в следующем виде

$$
\begin{aligned}
\delta L(R) = & \left\{ \int X_i dV + \oint Y_i dF \right\} \delta R_i^0 + \\
& + \left\{ \int X_i \left(x_\beta - x_\beta^0\right) Э_{\alpha\beta ш} dV + \oint Y_i \left(x_\beta - x_\beta^0\right) Э_{\alpha\beta ш} dF \right\} \delta\omega_\alpha^0 + \\
& + \left\{ \int X_i \left(x_i - x_i^0\right) dV + \oint Y_i \left(x_i - x_i^0\right) dF - (2\mu + 3\lambda) \int \theta dV \right\} \delta\left(\frac{1}{3}\theta^0\right) + \\
& + \left\{ \int X_i P_{ij} dV + \oint Y_i P_{ij} dF - \int \left[(2\mu + 3\lambda) \theta \left(x_j - x_j^0\right) dV \right] \right\} \delta\left(\frac{1}{3}\theta_j^0\right) + \\
& + \int \left[C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 r_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_j} + X_i \right] \delta r_i dV + \oint \left[Y_i - C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta} \right] \delta r_i dF = 0
\end{aligned}
$$

Здесь $Э_{\alpha\beta Э}$ - тензор Леви- Чивита, $C_{\alpha\beta ij}$ -тензор упругих модулей, n_j - единичная нормаль к поверхности F.

Множители при соответствующих вариациях обобщенных переменных здесь являются интегральными законами сохранения. Причем первые два из них:

$$
\int X_i dV + \oint Y_i dF = 0
$$

$$
\int X_i \left(x_\beta - x_\beta^0\right) Э_{\alpha\beta i} dV + \oint Y_i \left(x_\beta - x_\beta^0\right) Э_{\alpha\beta i} dF = 0
$$

соответствуют условиям глобального равновесия рассматриваемого тела как абсолютно твердого, т.е. равенству нулю векторов заданных объемных и поверхностных сил и моментов.

Попробуем выяснить физический смысл последних двух слагаемых в полиномиальной части разложения вектора перемещений (1.3), содержащих множители θ^0, θ_i^0. Положим, что объемная деформация θ представляется в виде прямой суммы, соответствующей разложению (1.3):

$$
\theta = \theta^0 + \theta_i^0 x_i + \theta^\Phi \tag{1.4}
$$

здесь $\theta^\Phi = \dfrac{\partial r_i}{\partial x_i}$ - кинематическое состояние, связанное с изменением формы, а $\theta^0 + \theta_i^0 x_i$ -линейная комбинация состояний $1, x_i$. Далее рассматривается кинематическое состояние, соответствующее выражению (1.4). Представлению (1.4) соответствует, очевидно, следующее представление для вектора перемещений

$$
R_i = \frac{1}{3}\theta^0 x_i + \frac{1}{3}\theta_i^0 P_{ij} + r_i
$$

Подставляя выражение для θ с помощью (1.4) в оставшиеся два изопериметрические соотношения (1.3), получим

$$\theta^0 V+\theta_j^0\left(S_j-x_j^0 V\right)+\int\theta dV=$$
$$=\frac{1}{(2\mu+3\lambda)}\left[\int X_i\left(x_i-x_i^0\right)dV+\oint Y_i\left(x_i-x_i^0\right)dF\right]+\frac{1}{(2\mu+3\lambda)}\int\frac{\partial r_i}{\partial x_i}dV$$
$$\theta^0\left(S_j-x_j^0 V\right)+\theta_\rho^0\left[J_{\rho j}-S_\rho x_j^0-S_j x_\rho^0+x_\rho^0 x_j^0 V\right]+\int\theta_i\left(x_j-x_j^0\right)dV=$$
$$=\frac{1}{(2\mu+3\lambda)}\int\frac{\partial r_i}{\partial x_i}(x_i-x_i^0)dV+\frac{1}{(2\mu+3\lambda)}\left[\int X_i P_{ij}dV+\oint Y_i P_{ij}dF\right] \tag{1.5}$$

Здесь $V=\int 1dV$ - объём, $S_i=\int x_i dV$ - вектор статических моментов и $J_{ij}=\int x_i x_j dV$ - тензор моментов инерции.

Отсюда найдем неизвестные амплитуды в разложении (1 .4). Предварительно в качестве системы отсчета выберем центральные оси: $x_i^0=\frac{S_i}{V}$, тогда система уравнений (.4) распадается и ее решение записывается в виде:

$$\theta^0=-\frac{1}{V}\int\theta dV+\frac{1}{(2\mu+3\lambda)V}\left[\int X_i\left(x_i-\frac{S_i}{V}\right)dV+\oint Y_i\left(x_i-\frac{S_i}{V}\right)dF\right]+$$
$$+\theta^\Phi-\frac{1}{V}\int\theta^\Phi dV,$$
$$\theta_i^0=-I_{ij}\int\theta\left(x_j-\frac{S_i}{V}\right)dV+\frac{I_{ij}}{(2\mu+3\lambda)}\left[\int X_\alpha P_{\alpha j}dV+\oint Y_\alpha P_{\alpha j}dF\right]+ \tag{1.6}$$
$$+\left(x_\beta-\frac{S_\beta}{V}\right)I_{\beta j}\int\theta^\Phi\left(x_j-\frac{S_j}{V}\right)dV$$

где $I_{ij}\left(J_{\rho j}-\frac{S_\rho S_j}{V}\right)=\delta_{i\rho}$

Подставляя найденные величины в выражение для объемной деформации, получим:

$$\theta=\frac{1}{(2\mu+3\lambda)V}\left[\int X_\alpha\left(x_\alpha-\frac{S_\alpha}{V}\right)dV+\oint Y_\alpha\left(x_\alpha-\frac{S_\alpha}{V}\right)dF\right]+$$
$$+\frac{\left(x_\beta-\frac{S_\beta}{V}\right)I_{\beta j}}{(2\mu+3\lambda)}\left[\int X_\alpha P_{\alpha j}dV+\oint Y_j P_{\alpha j}dF\right]+ \tag{1.7}$$
$$+\theta^\Phi-\frac{1}{V}\int\theta^\Phi dV-\left(x_\beta-\frac{S_\beta}{V}\right)I_{\beta j}\int\theta^\Phi\left(x_j-\frac{S_j}{V}\right)dV$$

Таким образом построено решение в классе кинематических состояний: 1, x_i и θ^Φ

Введем новый базис, как линейную комбинацию выбранных в соответствии с (1.4) кинематических состояний:

$$1,\ x_i - \frac{S_i}{V} \ \text{и}$$

$$\theta^{\Phi} - \frac{1}{V}\int \theta^{\Phi} dV - \left(x_i - \frac{S_i}{V}\right) I_{ij} \int \theta^{\Phi} \left(x_j - \frac{S_j}{V}\right) dV$$

Покажем, что этот новый базис - ортогональный. Для этого вычислим выражения:

$$\int \theta dV = \frac{1}{(2\mu + 3\lambda)} \left[\int X_\alpha \left(x_\alpha - \frac{S_\alpha}{V}\right) dV + \oint Y_\alpha \left(x_\alpha - \frac{S_\alpha}{V}\right) dF \right]$$

$$\int \theta \left(x_k - \frac{S_k}{V}\right) dV = \frac{1}{(2\mu + 3\lambda)} \left[\int X_\alpha P_{\alpha k} dV + \oint Y_\alpha P_{\alpha k} dF \right]$$

$$\begin{aligned} &\int \theta \left[\theta^{\Phi} - \frac{1}{V}\int \theta^{\Phi} dV - \left(x_\beta - \frac{S_\beta}{V}\right) I_{\beta j} \int \theta^{\Phi} \left(x_j - \frac{S_j}{V}\right) dV \right] dV = \\ &= \int \left[\theta^{\Phi} - \frac{1}{V}\int \theta^{\Phi} dV - \left(x_\alpha - \frac{S_\alpha}{V}\right) I_{k\beta} \int \theta^{\Phi} \left(x_\beta - \frac{S_\beta}{V}\right) dV \right] \times \\ &\times \left[\theta^{\Phi} - \frac{1}{V}\int \theta^{\Phi} dV - \left(x_i - \frac{S_i}{V}\right) I_{ij} \int \theta^{\Phi} \left(x_j - \frac{S_j}{V}\right) dV \right] dV \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Правые части (1.8) являются проекциями объемной деформации на новый базис. Очевидно, что структура правых частей в (1.8) доказывает ортогональность выбранных кинематических состояний, которые далее принимаем за ортогональный базис. Соотношения (1.6) позволяют дать физическую интерпретацию величинам θ^0 и θ_i^0, входящим в разложения (1.4) и обобщенную формулу Чезаро. Ими определяется кинематика тела, абсолютно твердого по отношению к изменению формы. Нетрудно убедиться, что эти кинематические состояния могут быть возбуждены постоянной и, соответственно, линейно изменяющейся температурной нагрузкой. Действительно, положим, что имеет место температурная нагрузка: $\Delta t = T_1 + T_2(x_i - \frac{S_i}{V})$. Легко показать , что такому нагружению соответствуют следующие объемные и поверхностные усилия в выражении (1.7):

$$\begin{aligned} X_i^t &= -\frac{\alpha}{3}(2\mu + 3\lambda)\frac{\partial \Delta t}{\partial x_i} \\ Y_i^t &= \frac{\alpha}{3}(2\mu + 3\lambda)\Delta t n_i \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Непосредственной подстановкой (1.9) в (1.8) можно убедиться, что проекция на первое кинематическое состояние- «1», соответствующее θ_0, зависит только от величины T_1, проекция на второе кинематическое состояние- «$(x_i - \frac{S_i}{V})$» зависит только от величины T_2, а проекция на их замыкание в пространстве кинематических состояний равно нулю. Следует дополнительно отметить также, что эти два кинематические состояния ортогональны.

Естественным следствием является тот факт, что если упругое тело свободно от закреплений, то напряженно-деформированное состояние определяется только разложением по первым двум ортогональным кинематическим состояниям, а проекция на третье кинематическое состояние тождественно равна нулю, что, естественно, вполне соответствует известному в теории упругости результату. Приведенный пример позволяет прояснить физический смысл квадратичного полинома в обобщенной формуле Чезаро и является иллюстрацией разложения по ортогональным кинематическим состояниям.

2. Рассмотрим еще один пример, который моделирует часто возникающую в прикладных задачах ситуацию при стремлении выделить и приближенно описать краевой эффект, например в окрестности края пластин и оболочек. Положим, что рассматривается модель деформирования, в соответствии с которой в среде изменяется лишь одна компонента перемещений в направлении некоторой фиксированной оси N_i: $R_i = UN_i$. Выражение для вариации потенциальной энергии потенциальной W энергии в этом случае имеет вид:

$$\delta W = \int\left[(\mu+k)\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_j}N_i + (\mu+\lambda-k)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}N_j - CUN_i\right]\delta UN_i dV -$$

$$-\oint\left[(\mu+k)\frac{\partial U}{\partial x_j}n_j N_i + \lambda\frac{\partial U}{\partial x_j}N_j n_i + (\mu-k))\frac{\partial U}{\partial x_i}N_j n_j - A_{ij}N_j U\right]\delta U_n N_i dF$$

где $A_{ij} = An_i n_j + B(\delta_{ij} - n_i n_j),\ D = 0$

Пусть рассматривается плоская задача теории упругости и выбранное направление оси N_i совпадает с осью x. Тогда выражение для вариации потенциальной энергии потенциальной энергии примет вид

$$\delta W = \int\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\mu+k)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - cU\right]\delta U dx dy -$$

$$-\int\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial U}{\partial x} + AU\right]\delta U dy\Bigg|_{x=x_2}^{x=x_1} - \int\left[(\mu+k)\frac{\partial U}{\partial y} + BU\right]\delta U dx\Bigg|_{y=y_2}^{y=y_1} \tag{1.10}$$

Следует отметить, что именно к гармонической проблеме ($c = 0,\ A = 0,\ B = 0$) сводятся задачи при приближенном описании плит и оболочек, в том числе ортотропных плит и оболочек исследуемых в рамках вариантов уточненных теорий. Если подобно (1.3) вектор перемещений представляется в виде разложения

$$UN_i = \omega_\alpha^0\left(x_\beta - x_\beta^0\right)Э_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\theta^0\left(x_i - x_i^0\right) +$$
$$+\frac{1}{3}\theta_j^0\left(x_j - x_j^0\right)\left(x_i - x_i^0\right) - \frac{1}{3}\theta_i^0\left(x_j - x_j^0\right)\left(x_j - x_j^0\right) + uN_i \qquad (1.11)$$

то из выражения для вариации Лагранжиана легко получить соответствующие интегральные уравнения сохранения. В данном случае при отсутствии объемных и поверхностных сил уравнения сохранения принимают вид:

$$\int cUN_i dV + \oint A_{ij}N_jUdF = 0$$
$$\int cUN_i\left(x_\beta - x_\beta^0\right)E_{\alpha\beta i}dV + \oint A_{ij}N_jU\left(x_\beta - x_\beta^0\right)E_{\alpha\beta i}dF = \int 2k\frac{\partial U}{\partial x_j}N_iE_{ij\alpha}dV$$
$$\int cUN_i\left(x_\beta - x_\beta^0\right)dV + \oint A_{ij}N_jU\left(x_\beta - x_\beta^0\right)dF = -\int(2\mu + 3\lambda)\frac{\partial U}{\partial x_j}N_jdV \qquad (1.12)$$
$$\int cUN_iP_{ip}dV + \oint A_{ij}N_jUP_{ip}dF =$$
$$= \int\left[(2\mu + 3\lambda)\frac{\partial U}{\partial x_j}N_j\left(x_p - x_p^0\right) - 2k\frac{\partial U}{\partial x_j}N_i\left(x_\beta - x_\beta^0\right)E_{ijk}E_{p\beta k}\right]dV$$

Подстановка в уравнения (1.12) UN_i с помощью равенств (1.11) приводит в результате к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $R_i^0, \omega_\alpha^0, \theta^0\theta_j^0, U$, которые вместе с уравнениями, вытекающими из вариационного равенства (1.10) образуют замкнутую систему разрешающих уравнений относительно функции U и системы постоянных $R_i^0, \omega_\alpha^0, \theta^0\theta_j^0$. В этом случае исследуемое кинематическое состояние, связанное с функцией U ищется в системе отсчета определяемой заранее выделенными простыми кинематическими состояниями, связанными с полиномиальными слагаемыми в представлении (1.11). В реальных исследованиях и расчетах указанное представление может быть полезно, например, при описании краевых эффектов в пластинах и оболочках, нагруженных не только системой усилий и моментов, но и линейно распределенной по координатам температурной нагрузкой, когда деформированное состояние соответствующее температурному нагружению выделяется заранее и им определяется начальное состояние. По поводу интегральных уравнений состояния (1.12) можно сделать следующее обобщение: любой системе кинематических состояний R_i^k предлагаемый выше подход ставит в соответствие $"k"$ интегральных законов сохранения, которые позволяют определить амплитуды (проекции) произвольного кинематического состояния в базисе R_i^k.

2.ОБЩАЯ ФОРМА РАЗЛОЖЕНИЙ РЕШЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ПО ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ (КООРДИНАТНЫХ ФУНКЦИЙ). АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЙ, НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ.

Рассмотрим анизотропное упругое тело, свойства которого описываются тензором упругих жесткостей $C_{\alpha\beta ij}$. Уравнение равновесия в перемещениях имеет вид:

$$C_{\alpha\beta ij}\frac{\partial^2 R_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_j}+X_i=0 \qquad (2.1)$$

Приближенное решение уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям на поверхности ограничивающей упругую область в классе обобщенных решений из энергетического пространства, определяемого соответствующим лагранжианом [1]. В дальнейшем предполагается, что на той части границы упругого тела, где заданы перемещения, имеют место однородные граничные условия. В качестве минимизируемого функционала энергии принимается Лагранжиан $L(R_i)$, решение (минимизирующая последовательность функций) ищется из энергетического пространства с нормой $[R]=2U$, где U - потенциальная энергия деформации:

$$2U=\int C_{\alpha\beta ij}\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}dV$$

где R_i-компоненты вектора перемещений R. Для двух любых элементов из энергетического пространства R^m и R^n соответствующим образом определяется и скалярное произведение:

$$\left[R^n,R^m\right]=2U^{mn}=\int C_{\alpha\beta ij}\frac{\partial R^n_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial R^m_i}{\partial x_j}dV \qquad (2.2)$$

Будем , сначала, представлять искомое решение R_i в виде:

$$R_i=r_i+a^k R_i^k \qquad (2.3)$$

где R_i^k - априори известная система координатных функций, a^k- искомые коэффициенты разложений, r_i- функция , являющаяся разностью между истинным решением и разложением решения в ряд по конечной системе известных функций R_i, т.е. ошибка при приближенном представлении решения.

Подставляя (2.3) вместо перемещений в выражение для Лагранжиана и вычисляя первую вариацию, получим

$$\delta L(R)=\delta L(r)+\left[A^k-\int C_{\alpha\beta ij}\frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial R_i^m}{\partial x_j}dV-2U^{km}a^m\right]\delta a^k \qquad (2.4)$$

где $A^k=\int X_i R_i^k dV+\oint Y_i R_i^k dF$

Нетрудно видеть, что по построению выражения, стоящие в квадратных скобках в (2.4) являются по построению изопериметрическими условиями, выполнение которых является необходимым условием инвариантности вариации Лагранжиана относительно преобразования (2.3). На этой основе предлагается новая процедура определения коэффициентов в искомых разложениях, в соответствии с которой в выражении для первой вариации Лагранжиана должны быть равными нулю слагаемые при вариациях по коэффициентам разложения. При этом вариационные формулировки задач в терминах R и r полностью совпадают, имеет место инвариантность в указанном смысле. Определим тензор обобщенных податливостей $\overline{U^{nk}}$ через тензор обобщенных жесткостей , каковыми можно считать величины U^{km}.

$$\overline{U}^{nk}U^{km} = \delta^{nm}$$

Тогда приравнивая нулю множители при вариациях δa^k, можем получить

$$a^n = \frac{1}{2}\left[A^k - \int C_{\alpha\beta ij}\frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}dV\right]\overline{U}^{nk} \tag{2.5}$$

Подставляя найденные коэффициенты с помощью (2.5) в выражение для перемещений (2.3), запишем

$$R_i = \left[r_i - R_i^n\frac{\overline{U}^{nm}}{2}\int C_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial R_\gamma^m}{\partial x_\delta}dV\right] + R^n\frac{\overline{U}^{nm}}{2}A^m \tag{2.6}$$

Соотношение (2.6) примечательно по ряду причин. Во -первых оно дает разложение перемещений в виде прямой суммы двух функциональных подпространств. Одно из них определено совокупностью заданных координатных функций R^n (в общем случае неортогональных и не нормированных). Второе подпространство является замыканием первого. Существенно, что скалярное произведение, определенное ранее в энергетическом пространстве, любых функций из этих подпространств равно нулю, т.е. ортогональны в указанном смысле в энергетической норме. Во- вторых, как следствие, из (2.6) следует равенство:

$$\frac{1}{2}\int C_{\alpha\beta ij}\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}dV = \frac{1}{2}A^k \tag{2.7}$$

Для того, чтобы его получить достаточно найти из (2.6) градиент вектора R, составить скалярное произведение $\left[R, R^k\right]$ и воспользоваться соотношением (2.6) с учетом определения обобщенной податливости. Исключим теперь из равенства (2.6) величину A^k с помощью соотношения (2.7). В результате получим следующее важное выражение:

$$R_i - R_i^n\frac{\overline{U}^{nm}}{2}\int C_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial R_\gamma^m}{\partial x_\delta}dV = r_i - R_i^n\frac{\overline{U}^{nm}}{2}\int C_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial R_\gamma^m}{\partial x_\delta}dV \tag{2.8}$$

Используя (2.8) перепишем соотношение (2.6) окончательно в следующем виде:

$$R_i = \left[R_i - R_i^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} \int C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_\gamma^m}{\partial x_\delta} dV \right] + R_i^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m = \overline{R}_i + \overline{a}^n R_i^n, \quad (2.9)$$

$$\frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m = \overline{a}^n$$

Здесь, очевидно, $\overline{R}_i = R_i - R_i^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} \int C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_\gamma^m}{\partial x_\delta} dV$.

Эта формула определяет искомое разложение решения и является одним из основных результатов данного раздела. Важно отметить, что коэффициенты разложения $\frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m = \overline{a}^n$ в (2.9) находятся только по известным координатным функциям с помощью интегрирования по объему и поверхности, явным образом. Величина, стоящая в квадратных скобках, является новым определением вектора погрешности искомого решения, который по построению всегда ортогонален пространству заданных кинематических состояний R^n. Таким образом справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Функции $\overline{R}_i$, определяющие компоненты вектора погрешности, ортогональны каждой из координатных функций в норме энергетического пространства:

$$\left[\overline{R_\alpha}, R_i^k \right] = \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} dV \equiv 0 \quad (2.10)$$

Доказательство непосредственно следует из определения $\overline{R}_i$ достаточно провести очевидные вычисления. Следовательно вектор-функция погрешности $\overline{R}$ ортогонален вектору, построенному как линейная комбинация координатных вектор-функций (заданных кинематических состояний). Если разложение искомого решения с коэффициентами $\overline{a}^n$ считать приближенным решением, а величину $\overline{R}_i$ в (2.9) погрешностью этого решения, то предложенный алгоритм обеспечивает наилучшую аппроксимацию, т.к. вектор-функция ошибки всегда находится в ортогональном подпространстве к приближенному решению. Следующее важное следствие относительно заданной системы функций R_i и системы функций $\overline{R}_i$ из ортогонального подпространства, определяемой равенствами (2.9), непосредственно вытекает из свойства ортогональности (2.9).

Лемма 1. Лагранжиан инвариантен относительно преобразования (2.9) Доказательство леммы следует из выражения для функционала Лагранжа, записанного с помощью соотношения (2.9)

$$
\begin{aligned}
L(R) &= L(\overline{R}) - \overline{\overline{a}}^{k} \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \overline{R}_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} dV + \\
&+ \left[A^n \overline{\overline{a}}^{n} - U^{nm} \overline{\overline{a}}^{n} \overline{\overline{a}}^{m} \right] = L(\overline{R}) + \left[A^n \overline{\overline{a}}^{n} - U^{nm} \overline{\overline{a}}^{n} \frac{\overline{\overline{U}}^{mk}}{2} A^k \right] = \qquad (2.11) \\
&= L(\overline{R}) + \frac{1}{2} A^n \overline{\overline{a}}^{n} = L(\overline{R}) + \frac{1}{4} A^n A^m \overline{\overline{U}}^{nm}
\end{aligned}
$$

Из равенств (2.12) следует, что Лагранжиан для каждой из двух указанных систем функций отличаются на постоянную величину (т.к. система функций R_i является априори заданной), а это и означает инвариантность. Отсюда, в частности, сразу следует, что если для некоторой системы кинематических состояний ошибка равна нулю, то соответствующее разложение по заданной системе координатных функций дает точное решение проблемы теории упругости. Докажем далее ряд вспомогательных, функций R_i но важных лемм, касающихся разложений по заданной системе функций R_i всех величин, определяющих формальное описание сред на базе вариационного принципа Лагранжа.

Лемма 2. Объемные и поверхностные силы представляются в виде разложений по системе заданных и дополнений к ним (последние могут трактоваться как невязки в разложениях усилий) в ортогональных подпространствах к этим системам.

Для доказательства рассмотрим уравнение равновесия

$$
C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_{\alpha}}{\partial x_{\beta} \partial x_j} + X_i = 0
$$

преобразуем его, воспользовавшись разложением (2.9). В результате уравнение равновесия преобразуется к виду

$$
C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_{\alpha}}{\partial x_{\beta} \partial x_j} + \left[X_i + \overline{U}^{nm} \frac{1}{2} C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_{\alpha}}{\partial x_{\beta} \partial x_j} \int C_{\sigma\tau\gamma\delta} \frac{\partial R_{\sigma}}{\partial x_{\tau}} \frac{\partial R_{\gamma}^m}{\partial x_{\delta}} dV \right] = 0
$$

Последнее уравнение определяет разложение объемной нагрузки

$$
X_i = \overline{X}_i - C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_{\alpha}}{\partial x_{\beta} \partial x_j} \frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m \qquad (2.12)
$$

где $\overline{X_i} = X_i + \overline{U}^{nm} \frac{1}{2} C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_{\alpha}}{\partial x_{\beta} \partial x_j} \int C_{\sigma\tau\gamma\delta} \frac{\partial R_{\sigma}}{\partial x_{\tau}} \frac{\partial R_{\gamma}^m}{\partial x_{\delta}} dV$

Совершенно аналогичным путем, рассматривая статические граничные условия, получим

$$
Y_i = \overline{Y}_i + C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial R_{\alpha}^n}{\partial x_{\beta}} \frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m \qquad (2.13)
$$

Осталось доказать, что система нагрузок $\overline{X_i}$, $\overline{Y_i}$ не совершают работы в кинематических состояниях R_i. Действительно, с учетом (2.12), (2.13) запишем

$$\int \overline{X}_i R_i^k dV + \oint \overline{Y}_i R_i^k dF = \int \left(X_i + C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_j} \frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m \right) R_i^k dV +$$
$$+ \oint \left(Y_i - C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial R_\alpha^n}{\partial x_\beta} \frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m \right) R_i^k dF =$$
$$= A^k - \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \overline{R}_\alpha^n}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} dV \frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m = A^k - 2U^{nk} \frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m =$$
$$= A^k - \delta^{km} A^m \equiv 0 \tag{2.14}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Для заданной системы кинематических состояний R_i^k система функций из ортогонального подпространства, определяемая равенствами (2.9) не совершает работы на главных частях разложений усилий(2.12),(2.13), распределенных в исследуемом объеме и на поверхности, определяемых равенствами

$$X_i^n = -C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_\alpha^n}{\partial x_\beta \partial x_j}$$

$$Y_i^n = -C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial R_\alpha^n}{\partial x_\beta}$$

т.е. справедливо следующее равенство

$$\int X_i^n \overline{R}_i dV + \oint Y_i^n \overline{R}_i dF = 0 \tag{2.14}$$

Доказательство леммы следует из теоремы1 и следующих равенств

$$\int X_i^n \overline{R}_i dV + \oint Y_i^n \overline{R}_i dF =$$
$$= -\int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_\alpha^n}{\partial x_\beta \partial x_j} \overline{R}_i dV + \oint C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial R_\alpha^n}{\partial x_\beta} \overline{R}_i dF == \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial R_\alpha^n}{\partial x_\beta} \frac{\partial \overline{R}_i}{\partial x_j} dV = 0$$

Лемма 4. Невязка в разложениях нагрузок в объеме и на поверхности ортогональна системе заданных кинематических состояний, т.е. работа заданной системы кинематических состояний на остатках в разложении нагрузок (2.12), (2.13) равна нулю

$$\int \overline{X}_i R_i^k dV + \oint \overline{Y}_i R_i^k dF = 0 \tag{2.15}$$

Доказательство леммы дается равенствами (2.12)

Лемма 5. Для составляющих векторов перемещений и нагрузок, представимых в форме разложений по заданной системе кинематических состояний справедлив аналог теоремы Бетти, т.е.

$$\int X_i^n R_i^m dV + \oint Y_i^n R_i^m dF = 2U^{nm} \qquad (2.16)$$

где величины $2U^{nm}$ определены равенствами (2.2)

Для доказательства достаточно воспользоваться определением входящих в (2.16) величин. В результате найдем:

$$\int X_i^n R_i^m dV + \oint Y_i^n R_i^m dF =$$

$$= -\int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_\alpha^n}{\partial x_\beta \partial x_j} R_i^m dV + \oint C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial R_\alpha^n}{\partial x_\beta} R_i^m dF =$$

$$= \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial R_\alpha^n}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_i^m}{\partial x_j} dV = 2U^{nm}$$

Лемма доказана.

Леммы, доказанные выше, позволяют сформулировать более общее утверждение относительно предлагаемого алгоритма представления решения исходной задачи теории упругости в форме разложений по координатным функциям (кинематическим состояниям) и свойств этих разложений.

Теорема 2. Для задач теории упругости при статических граничных условиях и при смешанных граничных условиях, но однородных на той части поверхности где заданы перемещения представление искомого решения в форме разложения по системе заданных координатных функций, а также соответствующие разложения для внешних объемных и поверхностных усилий и разложения для работы этих усилий на искомых перемещениях являются однотипными, а именно: осуществляются с одними и теми же коэффициентами разложений.

Для доказательства теоремы рассмотрим сначала выражения, определяющие разложения объемных и поверхностных усилий (2.12), (2.13) и перепишем их в виде

$$X_i = \overline{X}_i + X_i^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m$$

$$Y_i = \overline{Y}_i + Y_i^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m$$

Отсюда, имея ввиду, что $\frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m = \overline{a}^n$ сразу получаем требуемые соотношения

$$X_i = \overline{X}_i + X_i^n \overline{a}^n$$

$$Y_i = \overline{Y}_i + Y_i^n \overline{a}^n$$

Нетрудно доказать, что работа A записывается в аналогичном виде. Достаточно учесть лемму 2 и лемму 3. В результате получим

$$A = \left[\oint \overline{Y}_i \overline{R}_i dF + \int \overline{X}_i \overline{R}_i dV \right] + A^n \overline{a^n}^m = \overline{A} + A^n \overline{a^n}^m$$

что и требовалось доказать.

3. О ПРИМЕНЕНИИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО КИНЕМАТИЧЕСКИМ СОСТОЯНИЯМ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

Приведенный выше алгоритм построения разложения искомого решения по заданной системе координатных функций обеспечивает во-первых ортогональность вектор-функции погрешности к подпространству, определенному заданной базисной системой кинематических состояний, а во-вторых дает зависимости для нахождения коэффициентов разложений. В результате построений приближенного решения сводится к прямому вычислению интегралов по объему, занимаемому упругим телом и по поверхности, ограничивающей этот объем. Все это делает изложенные выше результаты, привлекательными для построения приближенных решений прикладных задач теории упругости. При этом форма области и характер анизотропии свойств среды может быть произвольным, а алгоритм построения приближенного решения, основанный на использовании энергетической нормы дает большие возможности для обобщения предлагаемого подхода, ибо достаточно лишь сформулировать лагранжиан и воспользоваться для нахождения коэффициентов теми же формулами (2.5),(2.9). Здесь в дополнение к изложенному требуется определить величину погрешности приближенного решения, которая бы позволяла оценить степень близости приближенного решения к точному и допускала бы достаточно простое вычисление. В качестве такой величины введем следующее выражение:

$$\Delta = A_{ij} \int \overline{X_i X_j dV} + B_{ij} \int \overline{Y_i Y_j} dF \qquad (3.1)$$

Из соображений размерности коэффициенты в представлении (3.1) можно ввести в следующем виде: $A_{ij} = V\delta_{ij}$ и $B_{ij} = F\delta_{ij}$.

Нетрудно видеть, что если разложение искомых перемещений по заданной системе кинематических состояний R_i^k удовлетворяет системе уравнений равновесия и граничным условиям на поверхности, то $\Delta = 0$. Если не выполняется для разложения перемещений точно граничное условие, то интеграл по поверхности в равенстве (3.1) будет не равен нулю, определяя погрешность выполнения граничных условий. Такая ситуация возникает когда в качестве заданных кинематических состояний принимается поле перемещений построенная с привлечением однородных решений, удовлетворяющих уравнению внутри области и части граничных условий [3-5]. Для таких задач предложенный алгоритм оказывается весьма эффективным. В приложениях удобно также, чтобы выбранные в качестве координатных функций кинематические состояния образовывали ортогональное семейство функций. Легко видеть, что любая заданная система кинематических состояний может быть преобразована в ортогональную систему в рассматриваемом энергетическом пространстве путем последовательного применения представления (2.9). В число заданных кинематических состояний в разложениях (2.9), вероятно, следует включать состояния, построенные в разделе 1.2 и соответствующие при температурном нагружении линейному закону распределения температур по координатам, а также кинематические состояния, определяющие в главном напряженное состояние в зонах краевого эффекта (1.10)-(1.12). В общем случае при выборе координатных функций можно пользоваться физическими или иными соображениями. Например, полученные в работах [6,7] общие требования к выбору корректной кинематике при построении прикладных теорий пластин и оболочек из композиционных материалов, дают основание использовать следующие представления для перемещений в качестве базисных кинематических состояний

$$u(x,y,z) = u_0 + zu_1(x,y) + \sum_i^I u_i(x,y)\varphi_i(z)$$

$$v(x,y,z) = v_0 + zv_1(x,y) + \sum_i^I v_i(x,y)\psi_i(z)$$

$$w(x,y,z) = w_1(x,y) + \sum_i^I w_i(x,y)\chi_i(z)$$

Причем для пластин функции, определяющие распределение перемещений по толщине связаны между собой соотношениями $\chi_i(z) = \dfrac{d\varphi_i}{dz}$. Для оболочек с радиусами кривизны R_1 и R_2 для корректной кинематики должны выполнять соотношения:

$$\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)\varphi_i' - \frac{\varphi_i}{R_1} = \chi_i$$

$$\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)\psi_i' - \frac{\psi_i}{R_2} = \chi_i$$

Для пологой оболочки [7] следует принять $\varphi_i = z^i, \psi_i = z^i, \chi_i = z^{i-1}$.

В направлении координат x, y выбор координатных функций в достаточной степени произволен.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (№ 96-01-01236)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен новый алгоритм представления решения исходной проблемы теории упругости, теории пластин и оболочек в форме разложений по заданным кинематическим состояниям, который позволяет определять коэффициенты в разложениях в явном виде. Для реализации алгоритма достаточно задать Лагранжиан и пространство координатных функций (кинематических состояний). В этом отношении предлагаемый метод решения прикладных задач является достаточно общим и пригоден для построения приближенных решений теорий пластин и оболочек выполненных из материалов с усложненными свойствами, например, с учетом связности механических и различного рода физических полей. Кроме того предлагаемый способ представления решения является удобным инструментом для построения прикладных моделей деформирования, когда в качестве начала отсчета принимается некоторое априори заданное напряженно-деформированное состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. Наука. 1970.
2. Лурье С.А., Белов П.А., Орлов А.П. Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые приложения. Издание ИПРИМ РАН. 1996, том 2, N2.
3. Васильев В.В., Лурье С.А. Метод однородных решений и биортогональные разложения в плоской задаче теории упругости для ортотропного тела. Прикладная математика и механика, Издательство РАН. 1996, N4.
4. Lurie S. F., Vasiliev V.V. The Biharmonic problem in the theory of elasticity. Gordon and Breach Publishers, 1995, p. 265
5. Лурье С.А. Обобщенный метод однородных решений в задачах теории плит и оболочек с оператором разрешающего уравнения порядка 2n. Издание ИПРИМ РАН.1996, том 2, N3-4 .
6. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассических теорий пластин. Известия АН СССР. МТТ. 1990. N2. с. 158-167.
7. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек. Механика твердого тела. Изв. РАН,1990, №6.