УДК 539.3

П.А.Белов, С.А.Лурье

МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И ИХ АНАЛОГИ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Для линейно-упругого тела на основе общих предположений относительно кинематических связей в рассматриваемом континууме. вариационным путем построены определяющие соотношения, получена полная система уравнений и граничных условий. Установлены неинтегрируемые далее в квадратурах соотношения совместности третьего порядка, записанные относительно компонент тензора девиатора деформаций. Построено обобщение формулы Чезаро и определена группа обобщенных перемещений, соответствующая внеинтегральным слагаемым, в которую помимо трансляций и поворотов как твердого тела входят объемно-вращательные трансляции и объемно-вращательные повороты. Приводится кинематический и силовой анализ моделей. Получена система линейных изопериметрических соотношений (условий сохранения), соответствующих новой группе обобщенных перемененных и являющихся обобщением интегральных уравнений равновесия. твердого тела. Предлагается естественное обобщение моделей на четырехмерный пространственно-временной континуум. Установлено, что полученные разрешающие уравнения в целом непротиворечивы, включают в себя полную систему уравнений электродинамики Максвелла, уравнения Эйнштейна для токов.

1. Кинематические соотношения Используя подход Л.И.Седова, связанный с вариационным формализмом при описании сплошных сред по заданной кинематике [1], построим математическую модель линейно-упругой сплошной среды, которая подчиняется общим кинематическим связям в форме расширенных соотношений Коши для компонентов тензора дисторсии

$$R_i,_j = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k Э_{ijk} \qquad (1.1)$$

Здесь, как обычно по повторяющимся индексам осуществляется свертка, γ_{ij} — компоненты тензора девиатора деформаций , θ - объемная деформация , ω_k - вектор поворотов или упругих вращений, $Э_{ijk}$ - компоненты кососимметричного тензора Леви-Чевиты.

Представление (1.1) соответствует разложению тензора второго ранга на составляющие: : девиаторную часть, шаровой тензор и ротор. Интегрируя соотношение (1.1) по пространственной координате, получим

$$R_i = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_x} [\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k Э_{ijk}]dy_j \qquad (1.2)$$

Условия существования криволинейного интеграла в формуле (1.2) запишутся в виде

$$\omega_i,_j = \gamma_{\beta j},_\alpha Э_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\theta,_\alpha Э_{\alpha ij} \qquad (1.3)$$

Интегрирование соотношения (1.3), по аналогии с выражением (1.1) , дает следующее равенство:

$$\omega_i = \omega_i^0 + \int\limits_{M_0}^{M_x} (\gamma_{\beta j},_{\alpha} Э_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\theta_{\alpha} Э_{ij\alpha}) dy_j \tag{1.4}$$

Соответственно условия существования криволинейных интегралов (1.4), приобретают вид

$$(\gamma_{\beta\mu} + \frac{1}{3}\theta\delta_{\beta\mu}),_{jm} Э_{\alpha\beta i} Э_{m\mu j} = 0 \tag{1.5}$$

Соотношения (1.5), обеспечивающие непрерывность упругих поворотов, являются уравнениями совместности Сен-Венана. Предложенная форма записи уравнений неразрывности позволяет разрешить последние относительно производных от объемной деформации в явной форме, выразив их через компоненты тензора- девиатора деформаций:

$$\frac{1}{3}\theta,_{ij} = \left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \gamma_{m\mu} Э_{\alpha m i} Э_{\beta\mu j}\right),_{\alpha\beta} \tag{1.6}$$

Систему уравнений (1.6) можно проинтегрировать в квадратурах:

$$\theta = \theta^0 + \theta_i^0 (x_i - x_i^0) + 3\int\limits_{M_0}^{M_x} \left(x_i - y_i\right)\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \gamma_{m\mu} Э_{\alpha m i} Э_{\beta\mu j}\right),_{\alpha\beta} dy_j$$

Необходимыми и достаточными условиями (для односвязных сред) интегрируемости системы (1.6) являются, новые уравнения совместности третьего порядка, записанные относительно только компонент тензора- девиатора деформаций:

$$\left[\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ip} + \gamma_{m\mu} Э_{\alpha m i} Э_{\beta\mu p}\right],_{\alpha\beta q} Э_{pqj} = 0$$

Полученная система уравнений совместности представляет собой тензорное уравнение второго ранга, ненулевые компоненты которого составляют тензор-девиатор. Так как тензор-девиатор имеет только пять линейно независимых компонент, дальнейший поиск квадратур не имеет смысла, потому что для построения следующей квадратуры потребовалось бы десять уравнений для определения третьих производных хотя бы одной функции.

Преобразуем (1.2) таким образом, чтобы под знаком криволинейного интеграла осталось выражение, определяющее исключительно деформации изменения формы. С этой целью воспользуемся процедурой интегрирования по частям и учтем равенства (1.3), (1.6). В результате, придем к новому выражению для вектора перемещения, в котором криволинейный интеграл записывается только через компоненты тензора- девиатора деформации γ_{ij} и, следовательно, описывает перемещения, вызванные лишь деформациями изменения формы. Обозначая этот интеграл через r_i запишем:

$$\begin{aligned} R_i = R_i^0 + \omega_\alpha^0 \left(x_\beta - x_\beta^0\right) Э_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\theta^0 \left(x_i - x_i^0\right) + \\ + \frac{1}{3}\theta_j^0 \left(x_j - x_j^0\right)\left(x_i - x_i^0\right) - \frac{1}{6}\theta_i^0 \left(x_j - x_j^0\right)\left(x_j - x_j^0\right) + r_i \end{aligned} \tag{1.7}$$

Таким образом, с точностью до полинома второго порядка, вектор перемещений определяется деформациями изменения формы. Нетрудно убедиться, что объемная деформация и упругие повороты с точностью до полиномов также определяются лишь деформациями изменения формы:

$$\theta=\theta^0+\theta_i^0(x_i-x_i^0)+r_{k,k}\,,\ \omega_i=\omega_i^0+\frac{1}{3}\theta_\alpha^0(x_\beta-x_\beta^0)Э_{\alpha\beta i}-\frac{1}{2}r_{\alpha,\beta}Э_{\alpha\beta i} \quad (1.8)$$

Для компонент тензора девиатора деформаций имеем следующие равенства

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{2}\left(R_{i,j}+R_{j,i}\right)-\frac{1}{3}R_{k,k}\delta_{ij}=\frac{1}{2}\left(R_{i,j}+R_{j,i}\right)-\frac{1}{3}\theta\delta_{ij}$$

$$=\frac{1}{2}\left(r_{i,j}+r_{j,i}\right)-\frac{1}{3}r_{k,k}\delta_{ij}=\frac{1}{2}\left(r_{i,j}+r_{j,i}\right)-\frac{1}{3}\theta^\gamma\delta_{ij}\ ,\quad где \quad \theta^\gamma=r_{k,k}$$

Представление для перемещений *Ri*, найденные в форме соотношений (1.7), являются обобщением формулы Чезаро и представляют интерес с точки зрения описания поведения упругой среды с дефектами в рамках так называемой полевой теории дефектов[2]. Новое представление для перемещений, его полиномиальная составляющая, наряду с традиционными дефектами, определяемыми трансляцией (дислокации) и вращением (дисклинация), позволяет ввести в рассмотрение расширенную группу дефектов (несовместностей) типа объемных дислокаций и обьемно-вращательных дисклинаций. Такой вариант модели полевой теории дефектов может быть принципиально реализован, если функционал Лагранжа будет инвариантен относительно действия неоднородной группы, определяемой внеинтегральными слагаемыми в выражении (1.7). Вопрос инвариантности будет обсуждаться в дальнейшем. Сейчас остановимся на формулировке обобщенных физических соотношений линейно- упругого тела.

2. Определяющие соотношения Полагаем, что единственными кинематическими связями являются расширенные соотношения Коши (1.1). На основе этих соотношений запишем Лагранжиан и установим систему его обобщенных аргументов. Запишем выражение принципа возможной работы внутренних сил

$$\delta U=\iiint\lambda_{ij}\delta\left(\gamma_{ij}+\frac{1}{3}\theta\delta_{ij}-\omega_kЭ_{ijk}-R_{i,j}\right)dV=0 \quad (2.1)$$

Где λ_{ij} - силы реакции, обеспечивающие выполнение связей (1.1).

Взяв последнее слагаемое по частям, получим

$$\delta U=\iiint\{\left[\frac{1}{2}(\lambda_{ij}+\lambda_{ji})-\frac{1}{3}\lambda_{kk}\delta_{ij}\right]\delta\gamma_{ij}+\frac{1}{3}\lambda_{kk}\delta\theta+$$
$$+\left[-\lambda_{ij}Э_{ijk}\right]\delta\omega_k+(\lambda_{ij,j})\delta R_i\}dV+\oint(-\lambda_{ij}n_j)\delta R_i dF=0 \quad (2.2)$$

Следовательно потенциальная энергия в общем случае представима объемной и поверхностной плотностями, являющимися функциями. обобщенных переменных $\gamma_{ij}, \theta, \omega_k$, R_k и обобщенной поверхностной переменной R_i :

$$U=\iiint_V W_V(\gamma_{ij}\theta,\omega_k,R_k)dV+\iint_F W_F(R_k)dF \quad (2.3)$$

Для линейно-упругих сред плотности энергии являются квадратичного формами обобщенных переменных. Для изотропной среды. имеем соответственно:

$$W_V = \mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{1}{2}(\mu/2+\lambda)\theta^2 + \chi\omega_k\omega_k + \frac{1}{2}CR_iR_i$$
$$W_F = \frac{1}{2}AR_iR_jn_in_j + \frac{1}{2}BR_iR_j(\delta_{ij} - n_in_j) = \frac{1}{2}A_{ij}R_iR_j \tag{2.4}$$
Определяя внутренние силовые факторы как производные от потенциальной энергии по обобщенным кинематическим переменным получаем, что модель сплошной среды, обусловленная соотношениями (1) допускает существование внутри объема внутренних силовых факторов типа напряжений $\sigma_{ij} = \partial W_V / \partial R_{i,j}$ и типа объемных сил $\sigma_i = \partial W_V / \partial R_i$, а на поверхности- типа внутренних поверхностных сил $P_i = \partial W_F / \partial R_i$
В результате соотношения упругости, справедливые внутри тела, запишутся в виде
$$\sigma_{ij} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + \lambda R_{k,k}\delta_{ij} + \chi(R_{i,j} - R_{j,i})$$
$$\sigma_i = CR_i \tag{2.5}$$
На поверхности исследуемого твердого тела справедливы следующие физические уравнения:
$$P_i = \frac{1}{2}A_{ij}R_j \tag{2.6}$$
Здесь естественно считать μ и λ - известными в теории упругости коэффициентами Ламе (μ - модуль сдвига) , а χ, A, B, C, новыми упругими постоянными среды. При этом уравнения (2.5),(2.6) описывают модель среды с несимметричным тензором напряжений и внутренними упругими связями типа объемных упругих сил и моментов типа винклеровских оснований. Свойственные данной среде распределенные винклеровские основания характеризуются упругими постоянными C и χ. Непарность касательных напряжений определяется упругой постоянной χ. Необходимо отметить, что соотношения (2.5) дают, таким образом, вариант моментной теории упругости, особенность которого состоит в том, что общий порядок системы разрешающих уравнений не повышается. Имеет место также анизотропия поверхностных свойств среды по нормали к поверхности и касательной к ней, которые описываются с помощью соответственно физических постоянных A и B.

3. Разрешающие уравнения Следуя принципу Лагранжа, получим систему разрешающих уравнений и естественные граничные условия для модели среды с определяющими соотношениями (2.5), (2.6). Полагаем, что в объеме тела и на его границе (или на части границы) действуют известные массовые и, соответственно, поверхностные силы X_i, Y_i. Тогда Лагранжиан L можно представить в виде
$$L = A - U\ ,\quad U = \iiint\limits_V W_V dV + \iint W_F dF\ ,\ A = \int\int\int\limits_V X_iR_i dV + \int\int\limits_{S_y} Y_iR_i dF$$
где A- работа внешних сил, U- потенциальная энергия деформации:
Систему разрешающих уравнений и естественных граничных условий запишем в форме вариационного равенства

$$
\begin{aligned}
&\delta L = \iiint\left[(\mu+\chi)R_i,_{jj} + (\mu+\lambda-\chi)R_j,_{ij} - CR_i + X_i\right]\delta R_i dV + \\
&+ \iint\left[Y_i - \mu\left(R_i,_j + R_i,_j\right)n_j - \lambda R_k,_k n_i - \chi\left(R_i,_j - R_j,_i\right)n_j - \right. \\
&\left. - AR_j n_j n_i - BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j)\right]\delta R_i dF = 0
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Подынтегральное выражение определяет уравнения равновесия и весь спектр естественных граничных условий. В целом соотношения (2.5),(2.6),(3.1) дают замкнутую математически непротиворечивую формулировку модели изотропной упругой среды с несимметричным тензором напряжений, распределенными по объему винклеровскими основаниями и с поверхностным взаимодействием типа поверхностного натяжения. Очевидно, что аналогичным образом может быть описана общая анизотропная модель подобной среды. Для этого следовало бы только при определении квадратичного функционала упругой энергии использовать тензорное поле упругих постоянных вместо упругих констант. Тогда, например, первое слагаемое в выражении (2.4) представилось бы в форме $C_{ijkm}\gamma_{ij}\gamma_{km}$ и т. д., где C_{ijkm} - тензор упругих постоянных, определяющих сдвиговые жесткости вместо модуля сдвига. Наличие физических параметров среды различной размерности в уравнениях (2.5)-(3.1) указывает на возможность формулировки соответствующих условий подобия, включающие систему безразмерных параметров. Учитывая систему разрешающих уравнений и естественных граничных условий, запишем следующую систему безразмерных параметров

$$
P_\chi = \frac{\chi}{\mu},\quad P_\lambda = \frac{\lambda}{\mu},\quad P_C = \frac{Cl^2}{\mu},\quad P_{X_i} = \frac{X_i l}{\mu},\quad P_{Y_i} = \frac{Y_i}{\mu},\quad P_A = \frac{Al}{\mu},\quad P_B = \frac{Bl}{\mu}
$$

Построенные модели сред с характеристиками отличающимися по размерности на величину характерного размера представляют интерес с точки зрения описания когезионных полей в окрестности сингулярных точек, теории тонких пленок и т.п.

4 Условия инвариантности(законы сохранения). Обобщенные формулы Чезаро расширяют пространство внеинтегральных составляющих в представлении вектора перемещений. Теперь доля вектора перемещений, определяемая слагаемым, стоящим вне криволинейного интеграла, содержит наряду с традиционными трансляциями и поворотами исследуемого континуума дополнительные члены: линейный полином, с коэффициентом θ^0, и квадратичный полином с коэффициентами θ_i^0. В классической теории линейно-упругой среды интегральные уравнения равновесия для векторов сил и моментов являются условиями инвариантности решения соответствующих задач относительно трансляций и поворотов тела как абсолютно твердого. Для рассматриваемой неклассической модели, учитывая, что вектор перемещений может быть представлен с помощью обобщенной формулы Чезаро, исследуем вопрос об инвариантности решения относительно произвольных $R_i^0, \omega_\alpha^0, \theta^0, \theta_i^0$., установим условия инвариантности и отметим физический смысл кинематических состояний, связанных с этими величинами. Следует также заметить, что условия инвариантности являясь соотношениями замыкающими систему дифференциальных уравнений равновесия, позволяют найти параметры $R_i^0, \omega_\alpha^0, \theta^0, \theta_i^0$.

Рассмотрим разрешающие уравнения и граничные условия, записанные в вариационной форме (3.1) и заменим в них вариации перемещений с помощью обобщенной формулы Чезаро на соответствующие выражения, беря интегралы по частям и комбинируя, получим

$$
\begin{aligned}
&\{\int (CR_i + X_i)dV + \oint (AR_j n_j n_i + BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j) + Y_i)dF\}\delta R_i^0 - \\
&- \{\int (\sigma_{ij} + CR_i(x_j - x_j^0) + X_i(x_\beta - x_\beta^0)Э_{\alpha\beta i})dV + \\
&+ \oint [AR_p n_p n_i + BR_p(\delta_{ip} - n_i n_p)](x_j - x_j^0) + Y_i(x_j - x_j^0)\}Э_{ij\alpha}\delta(\omega_\alpha^0) - \\
&- \{\int [-\sigma_{kk} + CR_i(x_i - x_i^0) + X_i(x_i - x_i^0) + (2\mu + 3\lambda)\theta]dV + \\
&+ \oint [AR_p n_p n_i + BR_p(\delta_{ip} - n_i n_p) + Y_i](x_i - x_i^0)dF\}\delta\left(\frac{1}{3}\theta^0\right) - \\
&- \{[+\sigma_{kk}(x_p - x_p^0) + CR_i P_{ip} - ((\sigma_{ip} - \sigma_{pi}) - (2\mu + 3\lambda)\theta)(x_i - x_i^0) + X_i P_{ip}]dV + \\
&+ \oint [AR_i n_j n_i + BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j) + Y_i]P_{ip}dF\}\delta\left(\frac{1}{3}\theta_p^0\right) + \\
&+ \int \left(\sigma_{ij,j} - CR_i + X_i\right)\delta r_i dV + \\
&+ \oint [Y_i - \sigma_{ij}n_j - AR_j n_j n_i - BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j)]\delta r_i dF = 0,
\end{aligned}
\qquad (4.1)
$$

где

$$P_{i\rho} = (x_i - x_i^0)(x_\rho - x_\rho^0) - \frac{1}{2}\delta_{ij}(x_k - x_k^0)(x_k - x_k^0)$$

Нетрудно видеть, что записанное выражение может быть представлено в форме изопериметрических условий при вариациях $R_i^0,\ \omega_i^0,\ \theta^0,\ \theta_i^0..$

Эти десять изопериметрических условий по форме и физическому смыслу являются естественным обобщением классических шести законов сохранения (для векторов равнодействующих сил и моментов). Нетрудно установить, что если изопериметрические соотношения выполняются, т.е. выполняются равенства стоящие при вариациях $R_i^0,\ \omega_i^0,\ \theta^0,\ \theta_i^0.$, то имеет место упомянутая инвариантность. Имеет место следующее утверждение: Всякое решение задачи (3.1) из пространства решений краевых задач механики сплошной среды с обобщенной кинематикой (1.1), удовлетворяющих обобщенному равновесному состоянию, инвариантно относительно трансляций и поворотов как твердого тела и объемно-вращательных движений, т.е. определяется с точностью до квадратичного полинома

$$R_i^0 + \omega_\alpha^0(x_k - x_k^*)Э_{\alpha\beta ki} + \frac{1}{3}\theta^0(x_i - x_i^*) - \frac{1}{3}\theta_\rho^0 P_{i\rho}$$

При этом под обобщенным равновесным состоянием понимается всякое решение задачи (3.1), удовлетворяющее десяти изопериметрическим соотношениям (4.1). Очевидно, что решения из класса обобщенных равновесных состояний всегда могут быть построены. Заметим, что первое изопериметрическое соотношение (4.1) для среды с внутренними связями типа упругих оснований при отсутствии объемных сил X_i и поверхностных эффектов(упругие постоянные A и B равны нулю) требуют для обеспечения инвариантности относительно смещений как твердого тела самоуравновешанности перемещений по объему. Тот же результат легко получить, если в частной задаче об изгибе балки на упругом основании попытаться найти систему отсчета кинематического состояния, для которой выполняется условие инвариантности решения относительно смещений как твердого тела. Можно выяснить физический смысл последних двух слагаемых в полиномиальной части разложения вектора перемещений (1.3), содержащих множители θ^0, θ_i^0. Ими определяется кинематика тела, абсолютно твердого по отношению к изменению формы. Нетрудно убедиться, что эти кинематические состояния могут быть возбуждены постоянной и, соответственно, линейно изменяющейся температурной нагрузкой. Действительно, положим, что имеет место температурная нагрузка: $\Delta t = T_1 + T_2(x_i - S_i / V)$, где S_i - статический момент. Легко показать , что такому нагружению соответствуют следующие объемные и поверхностные усилия в выражении (1.7):

$$X_i^t = -\frac{\alpha}{3}(2\mu + 3\lambda)\frac{\partial \Delta t}{\partial x_i}, \qquad Y_i^t = \frac{\alpha}{3}(2\mu + 3\lambda)\Delta t n_i$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что проекция вектора перемещений на кинематическое состояние- соответствующее θ_0, зависит только от величины T_1, а проекция на кинематическое состояние, определяемое величиной θ_i^0 зависит только от величины T_2. Очевидно, что процедура построения изопериметрических соотношений может быть обобщена и использована с целью определения систем отсчета в пространстве кинематики по заранее выделенным простым кинематическим состояниям. В реальных исследованиях и расчетах такое представление может быть полезно, например, при выделении основных медленно меняющихся напряженных состояний или, наоборот, при описании краевых эффектов в пластинах и оболочках. Можно сделать также следующее обобщение: любой системе кинематических состояний R_i^k предлагаемый выше подход ставит в соответствие "k" интегральных законов сохранения, которые позволяют определить амплитуды (проекции) произвольного кинематического состояния в базисе R_i^k.

5. Механистическая модель теории поля. Попытки провести аналогии между уравнениями механики сплошной среды и уравнениями общей теории относительности проводились неоднократно [3,4]. В частности, для решения задач оптимального проектирования предлагалось использовать аналогию между тензором напряжений и тензором энергии - импульса материального процесса в произвольном гравитационном поле[4]. Однако в силу того что уравнения гравитации Эйнштейна трактуют источники гравитационного поля как дислокации в пространстве событий проектируемая в результате такой аналогии среда «могла быть материализована в форме неоднородного и несплошного тела» [4]. Имеются и прямые аналоги в механике, связанные с построением дислокационных теорий дефектов[2].

Здесь делается попытка сформулировать вариант континуальной теории поля, используя механистические аналогии. В дальнейшем при формулировке модели будем использовать терминологию механики сплошной среды. Рассмотрим точечное преобразование пространства событий в следующем виде:

$$y_i = x_i + R_i$$

где y_{ii} - координаты деформированного пространства событий, x_{ii} - координаты деформированного пространства событий, R_i - вектор перемещений.

Пространственные компоненты вектора перемещений имеют прямой физический смысл изменения эталонных масштабов длины, а временная компонента - изменения хода эталонных часов. При известном векторе перемещений гравитационное поле определяется метрическим тензором g_{ij}:

$$(ds)^2 = dy_k dy_i = \left(\delta_{ik} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i}\right)\left(\delta_{jk} + \frac{\partial R_k}{\partial x_j}\right) dx_i dx_j = g_{ij} dx_i dx_j$$

Геометрическая сторона теории описывается в полном соответствии с алгоритмом, используемым ранее при описании кинематики трехмерного континуума. Выражение для тензора дисторсии имеет вид:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \gamma_{ij} + \frac{1}{4}\theta\delta_{ij} - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\exists_{\alpha\beta ij} \qquad (5.1)$$

где $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{4}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$ - тензор-девиатор деформации, $\theta = \frac{\partial R_k}{\partial x_k}$ -амплитуда шарового тензора; $\omega_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\exists_{ij\alpha\beta}$ -антисимметричный тензор поворотов, $\exists_{ij\alpha\beta}$ - тензор Леви-Чивиты, антисимметричный по всем индексам; δ_{ij} - тензор Кронекера.

Сформулируем физическую сторону задачи. Используя концепцию единого поля, полагаем, что не должно быть внешних сил по отношению к рассматриваемой сплошной среде. Таким образом все силы взаимодействия являются только внутренними. Этими силами обеспечиваются кинематические связи, соответствующие расширенным уравнениям Коши (5.1). Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, запишем

$$\int \lambda_{ij}\delta\left(\gamma_{ij} + \frac{1}{4}\theta\delta_{ij} - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\exists_{\alpha\beta ij} - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}\right) dV = 0 \qquad (5.2)$$

Предполагая линейность физических соотношений, на основе соотношения (5.2) при полной аналогии с трехмерной механикой, получим выражение для лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}\int \left\{ 2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \left(\frac{\mu}{2} + \lambda\right)\theta^2 + 2\chi\omega_{ij}\omega_{ij} + CR_i R_i \right\} dV +$$

$$+ \frac{1}{2}\oint \left\{ AR_i R_j n_i n_j + BR_i R_j \left(\delta_{ij} - n_i n_j\right) \right\}$$

В результате находим следующие физические соотношения, определяемые по формулам Грина через объемную и гиперповерхностную плотность лагранжиана:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial L_V}{\partial\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\right)} = \mu\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\frac{\partial R_n}{\partial x_n}\delta_{ij} + \chi\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) \qquad (5.3)$$

$$\sigma_i = \frac{\partial L_V}{\partial R_i} = CR_i,\ P_i = \frac{\partial L_F}{\partial R_i} = A\left(R_j n_j \right) n_i + BR_j\left(\delta_{ij} - n_i n_j \right) = A_{ij} R_j$$

Силовая сторона задачи. Введем определение тензора девиатора напряжений τ_{ij}, шарового тензора σ, антисимметричного тензора напряжений H_{ij}, объемного вектора сил σ_i и гиперповерхностного вектора сил P_i. Представим несимметричный тензор напряжений в форме разложения

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} + \frac{1}{4}\sigma\delta_{ij} - \frac{1}{2}H_{\alpha\beta}\square_{\alpha\beta ij} \qquad (5.4)$$

Тогда из физических соотношений следует

$$\tau_{ij} = 2\mu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i} - \frac{1}{4}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)$$

$$\sigma = 4\left(\frac{\mu}{2} + \lambda\right)\frac{\partial R_n}{\partial x_n} \qquad (5.5)$$

$$H_{\alpha\beta} = 2\chi\omega_{\alpha\beta} = \chi\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\exists_{ij\alpha\beta}$$

Введем орт времени N_i. и покажем, что антисимметричный тензор напряжений может быть представлен через напряженности электрического E_i и магнитного B_i полей. Для :этого достаточно определить напряженности электрического и магнитного полей следующим образом:

$$E_i = icH_{\alpha\beta}N_\gamma\exists_{\alpha\beta\gamma i}, \qquad (5.6)$$

где i - мнимая единица, c- скорость света,

$$B_i = -2H_{ij}N_j \qquad (5.7)$$

Напряженности E_i и B_i, несмотря на формальную четырехмерную запись, не имеют проекции на ось времени, т.е. являются трехмерными величинами. Действительно, имея ввиду равенства (5.6),(5.7) получим:

$$E_i\,N_i = i\,c\,H_{\alpha\beta}\,N_\gamma\,N_i\,\exists_{\alpha\beta\gamma i} \equiv 0$$

$$B_i\,N_i = -2\,H_{ij}\,N_i\,N_j \equiv 0$$

Равенства (5.6),(5.7) позволяют выразить тензор H_{ij} через вектора E_i и B_i: и представить его в форме следующего разложения:

$$H_{ij} = -\frac{1}{2}(B_i N_j - B_j N_i) + \frac{i}{2c} E_\alpha N_\beta \exists_{\alpha\beta ij} \tag{5.8}$$

5. Разрешающие уравнения и естественные граничные условия. Систему разрешающих уравнений и граничные условия также как и при описании моделей механики получим на основе вариации построенного лагранжиана. Запишем их в форме вариационного равенства:

$$\delta L = \int \left\{ C R_i - (\mu + \chi) R_{i,jj} - (\mu + \lambda - \chi) R_{j,ij} \right\} \delta R_i \, dV +$$

$$+ \oint \left\{ \left[\mu\left(R_{i,j} + R_{j,i} \right) + \lambda R_{k,k} \delta_{ij} + \chi\left(R_{i,j} - R_{j,i} \right) \right] n_j + A_{ij} R_{ji} \right\} \delta R_i \, dF = 0 \tag{5.9}$$

Уравнения Максвелла. Запишем уравнения Эйлера (5.9) в следующем виде:

$$\frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \exists_{\alpha\beta\gamma i} = \frac{C}{2(\mu + \chi)} \left[R_i - \frac{(2\mu + \lambda)}{C} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right] \tag{5.10}$$

Покажем, что эти уравнения при соответствующем определении вектора токов совпадают с известными уравнениями Ампера. Действительно, определим четырехмерный вектор плотности тока следующим образом:

$$J_i = C \frac{2\chi}{2(\mu + \chi)} \left[R_i - \frac{(2\mu + \lambda)}{C} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right] \varepsilon_0 c^2 \tag{5.11}$$

Соответственно через проекции вектора тока определим плотность трехмерного вектора тока и плотность заряда

$$I_i = J_\alpha \left(\delta_{\alpha i} - N_\alpha N_i \right)$$

$$\rho = -\frac{i}{c} J_i N_i . \tag{5.12}$$

и

$$J_i = I_j \left(\delta_{ij} - N_i N_j \right) + i c \rho N_i .$$

Имея ввиду (5.11), запишем равенства (5.10) в форме уравнений:

$$\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \exists_{\alpha\beta\gamma i} = \frac{J_i}{\varepsilon_0 c^2} \tag{5.13}$$

которые в точности совпадают с уравнениями Ампера, входящих в систему уравнений Максвелла. . В развернутой форме, в проекциях на временную и пространственные орты уравнения Ампера с учетом (5.12) перепишутся в виде

$$\frac{i}{c} \left[\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} \left(\delta_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta \right) - \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right] N_i +$$

$$+ \left[-\frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta} \exists_{\alpha\beta ik} N_k - \frac{i}{c} \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} N_\beta \left(\delta_{\alpha i} - N_\alpha N_i \right) - \frac{I_j}{\varepsilon_0 c^2} \left(\delta_{ij} - N_i N_j \right) \right] = 0$$

В векторной форме они примут следующий традиционный вид:

$$div\overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$c^2 rot\overline{B} - \frac{\partial\overline{E}}{\partial t} = \frac{\overline{I}}{\varepsilon_0} \tag{5.14}$$

Рассмотрим уравнения совместности:

$$\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_j} = 0 \tag{5.15}$$

Учитывая уравнения (5.5) и (5.8) перепишем равенства (5.15):

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\beta}\left(\delta_{\alpha\beta} - N_\alpha N_\beta\right)\right]N_i + \frac{i}{2c}\left[\frac{\partial B_k}{\partial t}\left(\delta_{ki} - N_k N_i\right) - \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}Э_{\alpha\beta ik}N_k\right] = 0$$

Последние соотношения нетрудно представить в векторной форме:

$$div\overline{B} = 0$$

$$\frac{\partial\overline{B}}{\partial t} + rot\overline{E} = 0 \tag{5.16}$$

Уравнения (5.16) в точности совпадают с уравнениями Фарадея. Совокупность уравнений (5.14) и (5.16) образуют систему уравнений Максвелла. Таким образом сформулированная теория содержит в качестве подсистемы уравнения Максвелла. Известно, что из уравнений Максвелла напряженности E_i и B_i, а значит и антисимметричные тензоры поворотов ω_{ij} и напряжений H_{ij} определяются через известный 4-х вектор тока J_i. Уравнения на J_i в рамках теории Максвелла не сформулированы, и токи задаются произвольно. В развиваемом здесь варианте теории имеется возможность построить уравнения для токов и тем самым замкнуть модель. Разрешим уравнения (5.11), определяющие токи через перемещения R_i и градиент θ, относительно первых производных от θ

$$\frac{(2\mu + \lambda)}{C}\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = J_i\frac{(\mu + \chi)}{C\chi\varepsilon_0 c^2} - R_i$$

Имея ввиду записанное равенство, построим полный дифференциал θ и
найдем его квадратуру:

$$\frac{(2\mu + \lambda)}{C}\theta = \frac{(2\mu + \lambda)}{C}\theta^0 + \int_{M_0}^{M_x}\left[\frac{(\mu + \chi)}{C\chi\varepsilon_0 c^2}J_i - R_i\right]dx_i \tag{5.17}$$

Записывая условия существования криволинейного интеграла в (5.17), получим:

$$-\frac{1}{2}\frac{(\mu + \chi)}{C\chi\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial J_\alpha}{\partial x_\beta}\exists_{\alpha\beta ij} = \omega_{ij} \tag{5.18}$$

Заменяя ω_{ij} в правой части (5.19) через напряженности E_i и B_i с помощью равенств, (.5.5),(5.8) и используя (.5.12), получим уравнения неразрывности токов, записанные в векторной форме:

$$\begin{cases} \overline{B} = \dfrac{(\mu+\chi)}{C\varepsilon_0 c^2} rot \overline{I} \\ \overline{E} = \dfrac{(\mu+\chi)}{C\varepsilon_0 c^2} \left(\dfrac{\partial \overline{I}}{\partial t} + c^2 \overline{grad \rho} \right) \end{cases} \qquad (5.19)$$

Впервые уравнения вида (.5.19) были получены другим путем Эйнштейном еще 1923г. [5] при создании первого варианта единой теории поля.

Наконец, если подействовать на уравнение (5.17) оператором Даламбера, легко убедиться; что θ удовлетворяет уравнению типа Юкавы [6], помощью которого в физике описываются сильные взаимодействия:

$$(2\mu+\lambda)\,\Delta\theta - C\theta = 0$$

Следовательно, можно предположить, что величина, являющаяся аналогом объемной деформации в механике твердого деформируемого тела отвечает за сильные взаимодействия при описании материальных процессов для пространственно-временного континуума. Полученная замкнутая система уравнений позволяет определить метрический тензор и, следовательно, гравитационное поле, порожденное соответствующими токами J_i и сильными взаимодействиями θ. Следует еще раз отметить полную аналогию моделей механики твердых деформируемых тел, и соответствующих физических моделей, подчеркнув, что эффекты, обусловленные несимметричностью тензора напряжений и наличием распределенных по объему упругих сил связи, которые можно считать неосновными для оценки напряженно-деформированного состояния объектов механики, могут являться едва ли не определяющими при описании материальных процессов в такой экзотической сплошной среде как пространство событий .

Заключение. Предложен общий подход к формулировке моделей сплошных сред, подчиняющихся общим кинематическим связям. Показано, такие среды допускают более широкий спектр взаимодействий:

-несимметричность тензора напряжений,

-не только тензорный, но и векторный характер взаимодействий (внутренние объемные и поверхностные силы,

-поверхностные эффекты и поверхностную анизотропию упругих свойств,

-многомодульность с модулями разной разной размерности и наличием в связи с этим масштабного фактора.

Предложена модель пространства событий как некоторой абстрактной сплошной среды, являющаяся прямым обобщением соответствующих моделей механики. Установлено, что разрешающая система уравнений включает в себя уравнения Максвелла для электромагнитных полей и уравнение Юкавы для сильных взаимодействий, которые ранее не могли быть построены в рамках одной теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1..Седов Л.И Об основных принципах механики сплошной среды. Изд-во МГУ, 1961.
2. Кадич А. и Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций.М:.,Мир, 1987, 169 с.
3. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. Киев, Наукова думка, 1972., 148 с.
4. Васильев В.В. Напряженное состояние твердых тел и некоторые геометрические эффекты //Механика твердого тела, N5, 1989, с.30-34.
5. Эйнштейн А. К общей теории относительности // Собрание научных трудов, том 2, Наука, 1966, с134-141.
6. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. т. 6, М.: , Мир, 1977, с.347