Грант РФФИ № 00-01-81217 Бел2000_а

ИЗДАНИЕ
ИПРИМ РАН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ ГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

Сборник трудов
Института прикладной механики РАН
к 10-летию его основания

Под общей редакцией И.Ф.Образцова и Ю.Г.Яновского

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Москва, 2000 год

СОДЕРЖАНИЕ

О МОДЕЛИРОВАНИИ КОГЕЗИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ*

Лурье С.А., Белов П.А., Яновский Ю.Г.

Институт прикладной механики РАН, г.Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

Исследуется обобщенная модель сплошной среды, в которой система внутренних взаимодействий определяется общим характером кинематических связей. Модель построена с использованием вариационного формализма Л.И. Седова и дает описание сред с несимметричным тензором напряжений, поверхностными эффектами, внутренними взаимодействиями когезионного типа. Используется также обобщенное разложение общего напряженно-деформированного состояния по заданным кинематическим состояниям, а также формальное преобразование, позволяющее выделять системы ортогональных кинематических состояний.

В результате, в качестве частного случая общей модели предлагается новый вариант модели когезионного поля. На его основе дается описание напряженного состояния, для которого характерно ограниченность напряжений в вершине трещины. Одновременно, найденное в рамках предложенной модели асимптотическое распределение напряжений на бесконечности, соответствует классической механике разрушения. Модель характерна тем, что она предполагает наличие физических постоянных различной размерности. Часть из них определяет обычные упругие свойства, другие связаны с поверхностными эффектами и внутренними взаимодействиями аналогичными силам сцепления Ван–Дер-Вальса. Новая модель описывает напряженное и деформированное состояние в окрестности вершины трещины, существенно отличающееся от найденного по классической теории упругости, но дает результаты, совпадающие с результатами классической теории вне окрестности вершины трещины.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ МОДЕЛИ И СИСТЕМА РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Для построения определяющих соотношений воспользуемся общим подходом [1-3], в соответствии с которым по заданным кинематическим связям находится вид функционала энергии для линейно упругой среды. В результате устанавливается характер силовых взаимодействий, соответствующих введенным кинематическим связям. Таким образом, модель среды полностью задается разнообразием вводимых кинематических связей.

Запишем выражение для несимметричного тензора- дисторсии

* *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-81217 Бел2000_а).*

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k \Im_{ijk} \qquad (1.1)$$

где R_i - компоненты вектора перемещений, γ_{ij} и θ - компоненты тензора девиатора деформаций и шарового тензора соответственно, ω_k - компоненты вектора линейных поворотов, $\Im_{ijk}$ - тензор Леви-Чевиты, $\omega_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\Im_{ijk}$.

Представление (1.1) соответствует разложению тензора второго ранга на составляющие: девиатор, шаровой тензор и ротор. Интегрируя соотношение (1.1) по пространственной координате, получим

$$R_i = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_x} [\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k \Im_{ijk}]dy_j . \qquad (1.2)$$

Условия существования криволинейного интеграла в формуле (1.2) запишутся в виде

$$\omega_{i,j} = \gamma_{\beta j,\alpha} \Im_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\theta_{,\alpha} \Im_{\alpha ij} . \qquad (1.3)$$

Интегрирование соотношения (1.3), по аналогии с выражением (1.1), дает следующее равенство:

$$\omega_i = \omega_i^0 + \int_{M_0}^{M_x} (\gamma_{\beta j,\alpha} \Im_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\theta_\alpha \Im_{ij\alpha})dy_j . \qquad (1.4)$$

Соответственно условия существования криволинейных интегралов (1.4), приобретают вид

$$(\gamma_{\beta\mu} + \frac{1}{3}\theta\delta_{\beta\mu})_{,\nu jm} \Im_{\alpha\beta i}\Im_{m\mu j} = 0 . \qquad (1.5)$$

Соотношения (1.5), обеспечивающие непрерывность упругих поворотов, являются уравнениями совместности Сен-Венана. Предложенная форма записи уравнений неразрывности позволяет разрешить последние относительно производных от объемной деформации в явной форме, выразив их через компоненты тензора- девиатора деформаций:

$$\frac{1}{3}\theta_{,ij} = \left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \gamma_{m\mu}\Im_{\alpha mi}\Im_{\beta\mu j}\right)_{,\alpha\beta} . \qquad (1.6)$$

Систему уравнений (1.6) можно проинтегрировать в квадратурах:

$$\theta = \theta^0 + \theta_i^0(x_i - x_i^0) + 3\int_{M_0}^{M_x} (x_i - y_i)\left(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ij} + \gamma_{m\mu}\Im_{\alpha mi}\Im_{\beta\mu j}\right)_{,\alpha\beta} dy_j .$$

Необходимыми и достаточными условиями (для односвязных сред) интегрируемости системы (1.6) являются, новые уравнения совместности третьего порядка, записанные относительно только компонент тензора- девиатора деформаций:.

$$\left[\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ip} + \gamma_{m\mu}\Im_{\alpha mi}\Im_{\beta\mu p}\right]_{,\alpha\beta q}\Im_{pqj} = 0 .$$

Полученная система уравнений совместности представляет собой тензорное уравнение второго ранга, ненулевые компоненты которого составляют тензор-девиатор. Так как тензор-девиатор имеет только пять линейно независимых компонент, дальнейший поиск квадратур не имеет смысла, потому что для построения следующей квадратуры потребовалось бы десять уравнений для определения третьих производных хотя бы одной функции.

Преобразуем (1.2) таким образом, чтобы под знаком криволинейного интеграла осталось выражение, определяющее исключительно деформации изменения формы. С этой целью воспользуемся процедурой интегрирования по частям и учтем равенства (1.3), (1.6). В результате, придем к новому выражению для вектора перемещения, в котором криволинейный интеграл записывается только через компоненты тензора-девиатора деформации γ_{ij} и, следовательно, описывает перемещения, вызванные лишь деформациями изменения формы. Обозначая этот интеграл через r_i запишем:

$$R_i = R_i^0 + \omega_\alpha^0 \left(x_\beta - x_\beta^0\right) Э_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3}\theta^0 \left(x_i - x_i^0\right) + \\ + \frac{1}{3}\theta_j^0 \left(x_j - x_j^0\right)\left(x_i - x_i^0\right) - \frac{1}{6}\theta_i^0 \left(x_j - x_j^0\right)\left(x_j - x_j^0\right) + r_i \tag{1.7}$$

Таким образом, с точностью до полинома второго порядка, вектор перемещений определяется деформациями изменения формы. Нетрудно убедиться, что объемная деформация и упругие повороты с точностью до полиномов также определяются лишь деформациями изменения формы:

$$\theta = \theta^0 + \theta_i^0 (x_i - x_i^0) + r_{k,k}$$

$$\omega_i = \omega_i^0 + \frac{1}{3}\theta_\alpha^0 (x_\beta - x_\beta^0) Э_{\alpha\beta i} - \frac{1}{2} r_{\alpha,\beta} Э_{\alpha\beta i}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial r_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} r_{k,k}\delta_{ij}. \tag{1.8}$$

Представление для перемещений R_i, найденное в форме соотношений (1.7), является обобщением формул Чезаро.

Остановимся на формулировке обобщенных физических соотношений линейно- упругого тела.

Полагаем, что соотношениями (1.1) полностью определяется кинематика исследуемой среды. В соответствии с принципом возможных перемещений запишем выражение для вариации работы внутренних усилий на кинематических связях (1.1). Вводя связи с помощью тензора множителей Лагранжа λ_{ij}, получим:

$$\delta U = \\ = \iiint [(\frac{1}{2}\lambda_{ij} + \frac{1}{2}\lambda_{ji} - \frac{1}{3}\lambda_{kk}\delta_{ij})\delta\gamma_{ij} + (\frac{1}{3}\lambda_{ij}\delta_{ij})\delta\theta + (-\lambda_{ij}Э_{ijk})\delta\omega_k + (\frac{\partial\lambda_{ij}}{\partial x_j})\delta R_i]dV + \\ + \oiint [(-\lambda_{ij}n_j)\delta R_i]dF \tag{1.9}$$

Здесь n_j - компоненты единичного вектора нормали к поверхности, ограничивающей рассматриваемое упругое тело.

Физический смысл множителей Лагранжа λ_{ij} очевиден. Этим тензором описывается спектр взаимодействий в среде, соответствующих введенным кинематическим связям (1.1). Равенство (1.9) позволяет определить список аргументов искомого лагранжиана. Предполагая интегрируемость записанной линейной дифференциальной формы (1.9), можно заключить, что потенциальная энергия представляется в виде:

$$U = \iiint\limits_V W_V\left(\gamma_{ij},\theta,\omega_k,R_k\right)dV + \iint W_F\left(R_k\right)dF .$$

Полагая физическую линейность исследуемой среды, а, следовательно, и квадратичность плотности потенциальной энергии относительно аргументов γ_{ij}, θ, ω_i, R_i и, учитывая тензорную размерность этих переменных, получаем:

$$W_V = \mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \frac{1}{6}(2\mu+3\lambda)\theta^2 + 2\chi\omega_k\omega_k + 2D\omega_k R_k + \frac{1}{2}CR_k R_k ,$$

$$W_F = 1/2\,AR_iR_jn_in_j + 1/2\,BR_iR_j\left(\delta_{ij} - n_in_j\right) = 1/2\,B_{ij}R_iR_j . \qquad (1.10)$$

Определим внутренние силовые факторы как производные от потенциальной энергии по обобщенным кинематическим переменным. Получим, что модель сплошной среды, обусловленная соотношениями (1.1) допускает существование внутри объема внутренних силовых факторов типа напряжений $\sigma_{ij} = \partial W_V/\partial R_{i,j}$ и объемных сил $\sigma_i = \partial W_V/\partial R_i$, а на поверхности - внутренних поверхностных сил $f_i = \dfrac{\partial W_F}{\partial R_i}$. В результате соотношения, определяющие внутренние взаимодействия тензорной и векторной природы внутри объема, запишутся в виде

$$\sigma_{ij} = \mu(R_{i,j} + R_{j,i}) + \lambda R_{k,k}\delta_{ij} + \chi(R_{i,j} - R_{j,i}) - DR_k Э_{ijk} , \qquad (1.11)$$

$$\sigma_k = CR_k + 2D\omega_k . \qquad (1.12)$$

На поверхности исследуемого тела справедливы следующие физические уравнения:

$$f_i = B_{ij}R_j = [An_in_j + B(\delta_{ij} - n_in_j)]R_j . \qquad (1.13)$$

Естественно считать, что μ и λ равны известным в теории упругости коэффициентам Ламе (μ - модуль сдвига). Постоянные $\chi, A, B, C ; D$ являются новыми упругими постоянными среды. При этом уравнения (1.11)-(1.13) являются определяющими соотношениями для модели среды с несимметричным тензором напряжений и упругими внутренними связями типа объемных и поверхностных винклеровских оснований. Можно предположить, что эти усилия, аналогичные усилиям в винклеровских пружинках с жесткостью равной величине C (новая упругая постоянная) моделируют внутренние взаимодействия когезионных полей. Для них характерны большие амплитудные значения в пределах соответствующих областей взаимодействий (аналогично силам межатомного взаимодействия Ван-дер-Ваальса) и быстрое затухание вне пределов этих областей. Непарность касательных напряжений определяется упругой постоянной χ и D. Имеет место также анизотропия поверхностных свойств среды по нормали к поверхности и касательной к ней. Поверхностные эффекты описываются с помощью соответственно физических постоянных A и B.

Вопрос о материальной объективности предложенной модели будет специально обсуждаться ниже.

Определяющие соотношения (1.11)-(1.13) позволяют записать конкретное выражение для потенциальной энергии. В результате можно найти уравнения равновесия в дифференциальной форме и соответствующие граничные условия как уравнения Эйлера и естественные граничные условия, соответствующие условию стационарности функционала Лагранжа. Для изотропной среды, в которой перемещения, будучи непрерывными и дифференцируемыми функциями, подчиняются связям, соответствующим несимметричным соотношениям для тензора дисторсии (1.1) вариационное уравнение имеет вид:

$$\delta L = \iiint [(\mu+\chi)\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\mu+\lambda-\chi)\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} + 2D\frac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{ijk} - CR_i + X_i]\delta R_i dV +$$

$$+ \oiint [Y_i - \mu(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i})n_j - \lambda\frac{\partial R_n}{\partial x_m}n_i - \chi(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i})n_j + DR_k n_j Э_{kji} - B_{ij}R_j]\delta R_i dF \qquad (1.14)$$

Уравнениями (1.14) определяется математическая постановка задачи, заключающаяся в формулировке системы разрешающих дифференциальных уравнений и граничных условий для исследуемой среды.

Подынтегральное выражение определяет уравнения равновесия и весь спектр естественных граничных условий. В целом соотношения (1.11)-(1.14) дают замкнутую, математически непротиворечивую формулировку модели изотропной, упругой среды с несимметричным тензором напряжений, распределенными по объему винклеровскими основаниями и с поверхностным взаимодействием типа поверхностного натяжения. Построенные модели сред с характеристиками, отличающимися по размерности на величину характерного размера, представляют интерес с точки зрения описания когезионных полей в окрестности сингулярных точек, теории тонких пленок и т.п.

Рассмотрим несколько более подробно граничные условия. В соответствии с (1.14) при $D=0$ естественные граничные условия запишутся в виде:

$$Y_i = \sigma_{ij}n_j + AR_j n_j n_i + BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j).$$

Здесь n_i - координаты вектора нормали $\bar{n}$ к поверхности тела.

Введем нормальную и касательную составляющие поверхностных усилий. Получим в проекции на нормаль:

$$Y_i n_i = \sigma_{ij}n_j n_i + A(R_j n_j). \qquad (1.15)$$

Проекция на плоскость, касательную к нормали, дает следующие составляющие:

$$Y_i(\delta_{ik} - n_i n_k) = \sigma_{ij}n_j(\delta_{ik} - n_i n_k) - BR_j(\delta_{kj} - n_k n_j). \qquad (1.16)$$

Следовательно, с постоянной A связаны поверхностные эффекты нормальные к поверхности (1.15), проявляющиеся при нагружении по нормали к поверхности, а постоянная B в (1.16) отвечает за поверхностные эффекты в касательной плоскости в исследуемой точке поверхности. Роль эффектов поверхностного натяжения при описании, например, тонких пленок может оказаться существенной.

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий возможности развиваемого метода при моделировании сплошных сред с расширенным комплексом свойств. В соответствии с общим подходом, формулировка кинематических соотношений вместе с постулатом о форме функционала Лагранжа позволяет построить полную и замкнутую систему уравнений модели, включая систему определяющих уравнений, систему уравнений равновесия (движения) и естественных граничных условий. Различные формы кинематических связей определяют различные варианты моделей сред. Рассмотрим вновь соотношения для тензора дисторсии как наиболее общую форму кинематических связей в сплошной среде. Предложим новую форму записи компонентов тензора-девиатора деформаций. Пусть векторы X, Y и Z образуют ортонормированную систему векторов соответственно с компонентами X_i, Y_i и Z_i в некоторой фиксированной системе координат. Имеют место следующие равенства

$$\delta_{ik} = X_i X_k + Y_i Y_k + Z_i Z_k, \quad X_i Y_i = Y_i Z_i = X_i Z_i = 0.$$

Здесь δ_{ik} - символ Кронекера, по повторяющимся индексам производится суммирование.

Тогда можно показать, что компоненты тензора-девиатора деформаций могут быть представлены в виде следующих разложений:

$$\gamma_{ij} = a_k A_{ijk} + d_k D_{ijk}, \tag{1.17}$$

где a_k, d_k - компоненты векторов, вид которых приведен ниже A_{ijk}, D_{ijk} - симметричные по индексам i и j тензоры третьего ранга, в некотором смысле аналогичных тензору Леви-Чевиты:

$$A_{kji} = (Y_k Z_j + Y_j Z_k) X_i + (X_j Z_k + Z_j X_k) Y_i + (X_k Y_j + X_j Y_k) Z_i \tag{1.18}$$

$$D_{kji} = (Y_k Y_j - Z_k Z_j) X_i + (Z_k Z_j - X_k X_j) Y_i + (X_k X_j - Y_k Y_j) Z_i \tag{1.19}$$

Действительно, справедливы следующие равенства:

$$A_{ijk}\delta_{ij} = D_{ijk}\delta_{jk} = Э_{ijk}\delta_{ij} = 0,$$

$$A_{ijk}Э_{ijp} = D_{ijk}Э_{ijp} = \delta_{ij}Э_{ijk} = 0,$$

$$A_{ijq}D_{ijp} = 0.$$

Кроме того, имеют место следующие полезные равенства:

$$A_{ijn}A_{ijm} = 2\delta_{nm},$$

$$D_{ijp}D_{ijq} = 3\delta_{pq} - (X_p + Y_p + Z_p)(X_q + Y_q + Z_q),$$

$$Э_{ijn}Э_{ijm} = \delta_{nm},$$

$$\delta_{ki}\delta_{kj} = \delta_{ij}, \tag{1.20}$$

Компоненты векторов a_k, d_k в разложении (1.17) выражаются с учетом (1.20) через компоненты тензора девиатора деформаций с помощью следующих формул:

$$a_i = \frac{1}{2}\gamma_{kj}A_{kji}, \quad d_i = \frac{1}{3}\gamma_{kj}D_{kji}. \tag{1.21}$$

Заметим, что из (1.19) следует ортогональность векторов d_i и $(X_i + Y_i + Z_i)$.

$$d_i(X_i + Y_i + Z_i) = 0.$$

Учитывая разложение (1.17) компоненты тензора дисторсии могут быть записаны в форме, отличной от той, что дается выражениями (1.1):

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = a_k A_{ijk} + d_k D_{ijk} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k Э_{ijk}. \tag{1.22}$$

В соответствии с общей процедурой принципа возможных перемещений, использование кинематических связей вида (1.22) позволяет установить новый список аргументов функционала Лагранжа.

$$\delta U = -\iiint [\sigma_{ij}\delta(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - a_k A_{ijk} - d_k D_{ijk} - \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} + \omega_k Э_{ijk})dV =$$

$$= \iiint [(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j})\delta R_i + (\sigma_{ij}A_{ijk})\delta a_k + (\sigma_{ij}D_{ijk})\delta d_k + (\frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij})\delta\theta + (-\sigma_{ij}Э_{ijk})\delta\omega_k]dV -$$

$$- \iint (\sigma_{ij}n_j)\delta R_i dF$$

Отметим, что формально тождественная замена тензора девиатора его разложением по двум векторам ведет к расширению аргументов лагранжиана и как следствие – к расширению списка квадратичных инвариантов.

Соответственно, полагая интегрируемость потенциальной энергии деформации, нетрудно установить, что потенциальная энергия представляется в виде:

$$U = \iiint_V W_V(a_k, d_k, \theta, \omega_k, R_k)dV + \iint_F W_F(R_k)dF . \qquad (1.23)$$

В результате вместо равенств (1.10) для линейно упругой среды будем иметь

$$\begin{aligned} W_V = &\frac{1}{2}\mu_1 a_i a_i + \frac{1}{2}\mu_3 d_i d_i + 2\chi\omega_k\omega_k + \frac{1}{2}CR_k R_k + \\ &+ \mu_2 a_i d_i + C_1 a_i\omega_i + C_2 a_i R_i + \\ &+ C_3 d_i\omega_i + C_4 d_i R_i + \\ &+ 2D\omega_k R_k + \\ &+ \frac{1}{6}(2\mu + 3\lambda)\theta^2 + \Lambda d_i(X_i + Y_i + Z_i) \end{aligned} \qquad (1.24)$$

Как отмечалось выше, расширение списка квадратичных инвариантов привело к расширению спектра упругих свойств изотропной среды и дает основание к обобщению понятия сплошной изотропной среды.

Теперь нетрудно определить и внутренние силовые факторы, установив общую форму определяющих уравнений, отвечающих выражению для удельной потенциальной энергии (1.24). Положим в целях упрощений, (это не является принципиальным), что в функционале Лагранжа отсутствуют слагаемые (инварианты), не соответствующие классической теории упругости, т.е.

$$\mu_2 = C = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = \chi = 0 .$$

Тогда система определяющих уравнений может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij}A_{ijk} = \mu_1 a_k + \mu_2 d_k \\ &\sigma_{ij}D_{ijk} = \mu_2 a_k + \mu_3 d_k + \Lambda(X_k + Y_k + Z_k) = \\ &\qquad = \mu_2[a_k - \frac{1}{3}a_l(X_l + Y_l + Z_l)(X_k + Y_k + Z_k)] + \mu_3 d_k \\ &\sigma_{ij}\delta_{ij} = (2\mu_3 + 3\lambda)\theta \\ &\qquad \Lambda = -\frac{1}{3}a_l(X_l + Y_l + Z_l) \end{aligned} \qquad (1.25)$$

На основании приведенного примера построения модели сплошной среды с использованием более подробного расщепления тензора дисторсии можно сделать вывод о том, что упругая сплошная изотропная среда обладает гораздо большим разнообразием упругих свойств, чем это представлялось до сих пор.

Более того, описание такой обобщенно-изотропной среды дается сформулированным выше лагранжианом с объемной плотностью потенциальной энергии W_V (1.25) и поверхностной плотностью потенциальной энергии W_F (1.10).

2. ИНВАРИАНТНОСТЬ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Основные уравнения модели содержат слагаемые, пропорциональные смещениям и поворотам. Это обстоятельство является отличительной чертой предлагаемой модели, ибо дает возможность получать результаты, соответствующие классической теории для обычных тел и, одновременно, позволяет описать особенности поведения тел с вырожденным геометрическим параметром в рамках одной и той же модели. Однако возникает вопрос об инвариантности определяющих соотношений и краевой задачи в целом относительно преобразований трансляций и поворотов как твердого тела, или, иначе говоря, о материальной объективности модели. Этот момент в силу своей важности требует дополнительного, специального рассмотрения. Для большей ясности рассмотрим сначала модель классической теории упругости и запишем известные условия инвариантности уравнений теории упругости относительно трансляций и поворотов.

2.1. Инвариантность уравнений теории упругости относительно трансляций и поворотов.

Рассмотрим классические уравнения теории упругости. Пусть задано преобразование:

$$R_i = R_i^0 + \omega_n^0 (x_m - x_m^0) Э_{nmi} + r_i, \tag{2.1}$$

где R_i^0 - постоянный вектор перемещений, ω_n^0 - постоянный вектор поворотов, r_i - вектор упругих перемещений. Рассмотрим условия инвариантности вариации Лагранжиана L анизотропной теории упругости относительно преобразования (2.1):

$$\delta L(R,R) = \delta L(r,r). \tag{2.2}$$

Для этого вариацию лагранжиана δL запишем в виде:

$$\delta L(R,R) = \delta L(r,r) + \iiint X_i \delta[R_i^0 + \omega_n^0 (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dV +$$
$$+ \oint\!\!\oint Y_i \delta[R_i^0 + \omega_n^0 (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dF$$

Учитывая, что произвольные величины δR_i^0 и $\delta\omega_n^0$ можно вынести за знаки интегралов, получим:

$$\begin{aligned} \delta L(R,R) = \delta L(r,r) + [\iiint X_i dV + \oint\!\!\oint Y_i dF]\delta R_i^0 + \\ + [\iiint X_i (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dV + \oint\!\!\oint Y_i (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dF]\delta\omega_n^0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Если ни одна точка рассматриваемого тела не закреплена, то δR_i^0 и $\delta\omega_n^0$ являются независимыми вариациями. Тогда требование инвариантности лагранжиана относительно жестких трансляций и жестких поворотов (2.2) с учетом (2.3) приобретает вид:

$$P_i = \iiint X_i dV + \oiint Y_i dF] = 0$$

$$M_n = -\iiint X_i (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dV - \oiint Y_i (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dF = 0 \tag{2.4}$$

Наоборот, если в соответствии с (2.4) главный вектор внешних объемных и поверхностных сил P_i и моментов M_n равен нулю, то из (2.3) следует инвариантность вариации Лагранжиана: $\delta L(R,R) = \delta L(r,r)$ относительно жестких трансляций и жестких поворотов. Таким образом, условия (2.4) являются и необходимыми, и достаточными условиями инвариантности вариации функционала анизотропной теории упругости относительно преобразования (2.1). Отметим, что здесь материальная объективность определяющих соотношений и инвариантность в целом системы уравнений относительно трансляций и поворотов как жесткого тела имеет место для произвольного тела, находящегося под действием внешних нагрузок, удовлетворяющих условиям равенства нулю вектора объемных и поверхностных сил и вектора моментов. Ниже аналогичным образом исследуем инвариантность уравнений когезионного поля относительно трансляций и поворотов.

2.2. Модель когезионного поля.

Полагаем, что когезионное поле описывается с помощью физической постоянной C. Считаем далее, что поверхностные эффекты отсутствуют $A = B = 0$ и тензор напряжений симметричен $\chi = 0$. Рассмотрим функционал Лагранжа когезионного поля:

$$L = A - U,$$

где A - работа внешних сил, U - потенциальная энергия. При этом

$$A = \iiint X_i R_i dV + \oiint Y_i R_i dF$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint [C_{nmij} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + C R_i R_i] dV$$

Заметим, что потенциальная энергия данной модели отличается от классической наличием "винклеровского" члена CR_iR_i. При преобразовании (2.1) вариация данного Лагранжиана приобретает вид:

$$\delta L(R,R) = \delta A - \frac{1}{2} \delta \iiint [C_{nmij} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + C R_i R_i] dV =$$

$$= \iiint [X_i - C R_i^0 - C \omega_n^0 (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] \delta r_i dV + \oiint Y_i \delta r_i dF -$$

$$- \frac{1}{2} \delta \iiint [C_{nmij} \frac{\partial r_n}{\partial x_m} \frac{\partial r_i}{\partial x_j} + C r_i r_i] dV +$$

$$+ \iiint X_i \delta [R_i^0 + \omega_n^0 (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dV + \oiint Y_i \delta [R_i^0 + \omega_n^0 (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dF -$$

$$- \iiint C r \delta [R_i^0 + \omega_n^0 (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dV - \iiint C [R_i^0 + \omega_p^0 (x_q - x_q^0) Э_{pqi}] \delta [R_i^0 +$$

$$+ \omega_n^0 (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dV$$

или

$$
\begin{aligned}
&\delta L(R,R) = \delta L(r,r) + \iiint X_i \delta[R_i^0 + \omega_n^0 (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dV + \\
&+ \oiint Y_i \delta[R_i^0 + \omega_n^0 (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dF - \iiint C r_i \delta[R_i^0 + \omega_n^0 (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dV - \\
&- \iiint C[R_i^0 + \omega_p^0 (x_q - x_q^0) Э_{pqi}] \delta[R_i^0 + \omega_n^0 (x_m - x_m^0) Э_{nmi}] dV
\end{aligned}
$$

Группируя члены при вариациях δR_i^0 и $\delta\omega_n^0$, получим:

$$
\begin{aligned}
&\delta L(R,R) = \delta L(r,r) + [\iiint X_i dV + \oiint Y_i dF - \\
&- \iiint C r dV - C R_i^0 V - C\omega_p^0 (S_q - x_q^0 V) Э_{pqi}) dV] \delta R_i^0 + \\
&+ [\iiint X_i (x_m - x_m^0) Э_{nmi} dV + \oiint Y_i (x_m - x_m^0) Э_{nmi} dF - \\
&- \iiint C r_i (x_m - x_m^0) Э_{nmi} dV - C R_i^0 (S_m - x_m^0 V) Э_{nmi} - C\omega_p^0 I_{np}] \delta\omega_n^0
\end{aligned}
$$

Здесь введены следующие обозначения: $V = \iiint 1 dV$ - объем рассматриваемой области среды, $S_q = \iiint x_q dV$ - вектор статических моментов рассматриваемой области среды, $I_{np} = \iiint (x_m - x_m^0)(x_q - x_q^0) Э_{nmi} Э_{pqi} dV$ - тензор моментов инерции рассматриваемой области среды, I_{nk}^{-1} - тензор, обратный тензору моментов инерции I_{np}, определенный как решение линейной системы уравнений $I_{np} I_{nk}^{-1} = \delta_{pk}$ при заданном тензоре I_{np}.

Необходимыми условиями инвариантности вариации Лагранжиана когезионного поля относительно преобразований (2.1) являются условия равенства нулю множителей при вариациях δR_i^0 и $\delta\omega_n^0$:

$$
\begin{aligned}
&P_i - \iiint C r dV - C R_i^0 V - C\omega_p^0 (S_q - x_q^0 V) Э_{pqi} = 0 \\
&- M_n - \iiint C r_i (x_m - x_m^0) Э_{nmi} dV - C R_i^0 (S_m - x_m^0 V) Э_{nmi} - C\omega_p^0 I_{np} = 0
\end{aligned}
$$

Эта система при рассмотрении в центральных осях ($x_i^0 = \frac{S_i}{V}$) распадается на два векторных уравнения:

$$
\begin{aligned}
&C R_i^0 V = P_i - \iiint C r_i dV \\
&C\omega_p^0 I_{np} = - M_n - \iiint C r_i (x_m - x_m^0) Э_{nmi} dV
\end{aligned}
$$

Поставим следующую задачу. Пусть каким-либо образом найдено решение r_i. Можно ли тогда установить подпространство решений, в котором будут выполняться условия инвариантности относительно трансляций и поворотов как твердого тела? Эта проблема имеет решение. Действительно, имея ввиду последние из записанных равенств, найдем:

$$
\begin{aligned}
&R_i^0 = \frac{1}{CV} P_i - \frac{1}{V} \iiint r_i dV \\
&\omega_k^0 = - \frac{I_{nk}^{-1}}{C} M_n - I_{nk}^{-1} \iiint r_i (x_m - x_m^0) Э_{nmi} dV
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Подставим полученные результаты в (2.1). Получим:

$$
R_i = [\frac{1}{CV} P_i - \frac{1}{V} \iiint r_i dV] + [- \frac{I_{nk}^{-1}}{C} M_n + I_{nk}^{-1} \iiint r_\alpha (x_\beta - \frac{S_\beta}{V}) Э_{\alpha\beta n} dV](x_l - \frac{S_l}{V}) Э_{kli} + r_i
$$

После группировки членов последнее равенство перепишем в виде:

$$R_i = r_i - \frac{1}{V}\iiint r_i dV + I_{nk}^{-1}\iiint r_\alpha (x_\beta - \frac{S_\beta}{V})Э_{\alpha\beta n} dV (x_l - \frac{S_l}{V})Э_{kli} + \\ + \frac{1}{CV}P_i - \frac{I_{nk}^{-1}}{C} M_n (x_l - \frac{S_l}{V})Э_{kli} \tag{2.6}$$

Отсюда следует:

$$\iiint R_i dV = \frac{1}{C}P_i, \tag{2.7}$$

$$\iiint R_i (x_j - \frac{S_j}{V})Э_{ij\rho} dV = \frac{1}{C}M_\rho. \tag{2.8}$$

Исключая из (2.6) P_i и M_ρ с помощью (2.7) и (2.8), получим окончательно:

$$R_i - \frac{1}{V}\iiint R_i dV + I_{nk}^{-1}(x_l - \frac{S_l}{V})Э_{kli}\iiint R_\alpha (x_\beta - \frac{S_\beta}{V})Э_{\alpha\beta n} dV = \\ = r_i - \frac{1}{V}\iiint r_i dV + I_{nk}^{-1}(x_l - \frac{S_l}{V})Э_{kli}\iiint r_\alpha (x_\beta - \frac{S_\beta}{V})Э_{\alpha\beta n} dV = \bar{R}_i \tag{2.9}$$

Таким образом, построено подпространство экстремалей $\bar{R}_i$ функционала Лагранжа для модели когезионного поля, элементы которого обладают тем свойством, что вариация Лагранжиана модели когезионного поля инвариантна при переходе от одного элемента $\bar{R}_i$ к другому. Более того, свойства элементов подпространства $\bar{R}_i$ имеют простую геометрическую интерпретацию:

$$\iiint \bar{R}_i dV = 0 \\ \iiint \bar{R}_i (x_j - \frac{S_j}{V})Э_{ijk} dV = 0 \tag{2.10}$$

Заметим, что если $R_i \in \bar{R}$, то из (2.10), (2.7) и (2.8) следует:

$$\iiint R_i dV = \frac{1}{C}P_i = 0,$$

$$\iiint R_i (x_j - \frac{S_j}{V})Э_{ij\rho} dV = \frac{1}{C}M_\rho = 0.$$

Перепишем теперь (2.9) с учетом (2.7) и (2.8):

$$R_i = \bar{R}_i + \frac{P_i}{V} - \frac{M_n I_{nk}^{-l}}{C}(x_l - \frac{S_l}{V})Э_{kli} \tag{2.11}$$

Формулы (2.11) позволяют установить необходимые и достаточные условия инвариантности. Действительно, подставляя (2.11) в выражение для функционала Лагранжа, после некоторых преобразований получим:

$$L(R,R) = L(\bar{R},\bar{R}) + \frac{1}{2}[\frac{P_i P_i}{CV} + \frac{M_\nu M_p I_{\nu p}^{-1}}{C}], \tag{2.12}$$

следовательно, имея ввиду (2.12), можно утверждать, что необходимыми и достаточными условиями инвариантности функционала Лагранжа для когезионного поля (а не только инвариантности вариации Лагранжиана) являются равенства нулю главного вектора внешних объемных и поверхностных сил P_i и моментов M_n. Действительно, из (2.12) при $P_i = 0$ и $M_n = 0$ следует: $L(R,R) = L(\bar{R},\bar{R})$ и наоборот - из (2.12) при $L(R,R) = L(\bar{R},\bar{R})$ следует $P_i P_i + M_\nu M_p I_{\nu p}^{-1} V = 0$, но эта положительно определенная квадратичная форма обращается в ноль тогда и только тогда, когда $P_i = 0$ и $M_n = 0$. Из доказанного критерия следует вывод о физической объективности модели когезионного поля, так как вектор сил когезии σ_i

$$\sigma_i = \frac{\partial L}{\partial R_i} = \frac{\partial L}{\partial \overline{R}_i} = C\overline{R}_i$$

в соответствии с (2.10) не зависит от трансляций и поворотов тела как жесткого целого и является статически самоуравновешенным векторным полем:

$$\iiint \sigma_i dV = 0$$

$$\iiint \sigma_i (x_j - \frac{S_j}{V}) Э_{ijk} dV = 0$$

Прежде, чем перейти к примеру, иллюстрирующему особенности модели когезионного поля, остановимся кратко на возможности разложения исследуемого напряженно-деформированного состояния по заданной системе кинематических состояний[2]. Способ представления решения в форме таких разложений является, на наш взгляд, удобным инструментом, как для построения прикладных моделей деформирования, так и для получения приближенных решений конкретных задач.

3. МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим упругое анизотропное тело, свойства которого описываются тензором упругих жесткостей $C_{\alpha\beta ij}$. Уравнение равновесия в перемещениях и граничные условия на поверхности, ограничивающей упругую область, имеют вид:

$$C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_j} + X_i = 0 \tag{3.1}$$

$$C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} = Y_i \tag{3.2}$$

Решение задачи (3.1),(3.2) ищется в классе кинематических состояний R^n из пространства, определяемого экстремалями соответствующего функционала Лагранжа. В качестве нормы $[R,R] = 2U$ выбирается потенциальная энергия деформации:

$$2U = \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dV,$$

где R_i - компоненты вектора перемещений R. Для двух любых элементов из пространства кинематических состояний R^m и R^n соответствующим образом определяется и скалярное произведение:

$$[R^n, R^m] = 2U^{mn} = \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial R^n_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R^m_i}{\partial x_j} dV \tag{3.3}$$

Будем сначала представлять искомое решение R_i в виде разложения:

$$R_i = r_i + a^k R^k_i \tag{3.4}$$

где R^k_i - априори известная система кинематических состояний, a^k - искомые коэффициенты разложений, r_i - вектор-функция, являющаяся разностью между истинным решением и разложением решения в ряд по конечной системе известных вектор-функций R_i^k.

Подставляя перемещения (3.4) в выражение для функционала Лагранжа и вычисляя первую вариацию, получим

$$\delta L(R,R) = \delta L(r,r) + [A^k - \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_i^m}{\partial x_j} dV - 2U^{km} a^m]\delta a^k, \qquad (3.5)$$

где: $A^k = \iiint X_i R_i^k dV + \oiint Y_i R_i^k dF$.

Найдем условия инвариантности вариации Лагранжиана относительно преобразования (3.4). Предлагается такая процедура определения коэффициентов в искомых разложениях, в соответствии с которой в выражении для первой вариации Лагранжиана должны быть равными нулю слагаемые при вариациях по коэффициентам разложения. При этом вариационные формулировки задач в терминах R и r полностью совпадают: имеет место инвариантность в указанном смысле. Определим тензор обобщенных податливостей $\overline{U}^{nk}$ через тензор обобщенных жесткостей, каковыми можно считать величины U^{km}

$$\overline{U}^{nk} U^{km} = \delta^{nm}. \qquad (3.6)$$

Тогда, приравнивая нулю множители, при δa^k в (3.5), можно получить:

$$a^n = \frac{\overline{U}^{nk}}{2}[A^k - \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} dV]. \qquad (3.7)$$

С помощью (3.7) выражение для перемещений (3.4) перепишем в виде:

$$R_i = \overline{R}_i + a^n R_i^n, \qquad (3.8)$$

Здесь и в дальнейшем в разложениях вида (3.8) под коэффициентами a^k будем понимать следующие выражения (они отличаются от коэффициентов в разложениях (3.4))

$$a^n = A^m \frac{\overline{U}^{nm}}{2}. \qquad (3.9)$$

При этом были использованы следующие важные выражения:

$$\begin{aligned} \overline{R}_i &= R_i - R_i^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} \int C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_\gamma^m}{\partial x_\delta} dV = \\ &= r_i - R_i^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} \int C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_\gamma^m}{\partial x_\delta} dV \end{aligned} \qquad (3.10)$$

и

$$\int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} dV = A^k.$$

Соотношение (3.8) примечательно тем, что позволяет представить пространство перемещений в виде прямой суммы двух функциональных подпространств. Одно из них определено совокупностью заданных кинематических состояний R^n (в общем случае не ортогональных и не нормированных). Второе подпространство является замыканием первого. Существенно, что скалярное произведение, определенное ранее, любых элементов из этих подпространств равно нулю, т.е. они ортогональны в энергетической норме (3.3). Формула (3.8) является одним из основных результатов данного раздела. Важно отметить, что коэффициенты разложения a^n (3.9) находятся только по известным кинематическим состояниям с помощью интегрирования по объему и поверхности явным образом. Величина $\overline{R}_i$ является новым определением вектора погрешности искомого решения, который по построению всегда ортогонален пространству заданных кинематических состояний R^n. Таким образом, пространство решений представляется в виде прямой суммы кинематических состояний, принадлежащих пространству R^k и пространству $\overline{R}$. Далее приведем несколько полезных в дальнейшем утверждений, связанных с указанными выше разложениями[2].

Теорема 1. Все кинематические состояния, принадлежащие пространству $\overline{R}$, определяющие компоненты вектора погрешности, в энергетической норме ортогональны любому элементу, принадлежащему пространству R^k:

$$[\overline{R}_i, R_i^k] = \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} dV \equiv 0 .$$

Следовательно, вектор-функция погрешности $\overline{R}$ ортогональна вектору, построенному как линейная комбинация вектор-функций заданных кинематических состояний R^k. Иначе говоря, подпространство ошибок ортогонально подпространству базисных кинематических состояний. Если разложение искомого решения с коэффициентами a^n считать приближенным решением, а величину $\overline{R}_i$ в (3.8) - погрешностью этого решения (см. (3.10)), то предложенный алгоритм обеспечивает наилучшую аппроксимацию, т.к. вектор-функция ошибки всегда находится в ортогональном подпространстве к приближенному решению.

Теорема 2. Функционал Лагранжа инвариантен относительно преобразования (3.8):

$$L(R,R) = L(\overline{R},\overline{R}) + \frac{1}{4} A^m A^n \overline{U}^{mn}$$

Следствие.

Если для некоторой системы кинематических состояний R_i^k ошибка $\overline{R}_i$ равна нулю, то соответствующее разложение по заданной системе кинематических состояний дает точное решение проблемы теории упругости.

Далее введем два определения, позволяющие затем сформулировать несколько полезных теорем.

Определение 1.

X_i^k и $\overline{X}_i$ - объемные силы, возбуждающие соответственно кинематические состояния R_i^k и $\overline{R}_i$, вычисляются по формулам:

$$X_i^k = -C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_\alpha^k}{\partial x_\beta \partial x_j} \text{ и } \overline{X}_i = -C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_j}$$

Определение 2.

Y_i^k и $\overline{Y}_i$ - поверхностные силы, возбуждающие соответственно кинематические состояния R_i^k и $\overline{R}_i$, вычисляются по следующим формулам:

$$Y_i^k = C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial R_\alpha^k}{\partial x_\beta} \text{ и } \overline{Y}_i = C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Теорема 3. Объемные X_i и поверхностные Y_i силы представляются в виде разложений по системе заданных по R_i^k сил X_i^k и Y_i^k и дополнений к ним, заданных по $\overline{R}_i$ сил $\overline{X}_i$ и $\overline{Y}_i$:

$$X_i = \overline{X}_i + a^k X_i^k, \quad Y_i = \overline{Y}_i + a^k Y_i^k.$$

Теорема 4. Для заданных системой кинематических состояний $\overline{R}_i$ нагрузок $\overline{X}_i$ и $\overline{Y}_i$, работа на любом кинематическом состоянии, принадлежащем подпространству R_i^k, равна нулю, т.е.

$$\int \overline{X}_i R_i^k dV + \oint \overline{Y}_i R_i^k dF = 0.$$

Теорема 5. Для заданных системой кинематических состояний R_i^k нагрузок X_i^k и Y_i^k, работа на любом кинематическом состоянии, принадлежащем подпространству $\overline{R}_i$, равна нулю:

$$\int X_i^n \overline{R}_i dV + \oint Y_i^n \overline{R}_i dF = 0.$$

Теорема 6. Для любых двух элементов подпространства R_i^k и соответствующих им нагрузок справедлив аналог теоремы Бетти, т.е.

$$\iiint X_i^n R_i^m dV + \oiint Y_i^n R_i^m dF = \iiint X_i^m R_i^n dV + \oiint Y_i^m R_i^n dF.$$

Доказанные теоремы позволяют сформулировать более общее утверждение относительно предлагаемого алгоритма.

Теорема 7. Для задач теории упругости при статических граничных условиях и при смешанных граничных условиях, но однородных на той части поверхности, где заданы перемещения, представление искомого решения в форме разложения по системе заданных кинематических состояний, а также соответствующие разложения для внешних объемных и поверхностных усилий и разложения для работы этих усилий на искомых перемещениях являются однотипными, а именно: осуществляются с одними и теми же коэффициентами разложений a^k.

$$R_i = \overline{R}_i + a^k R_i^k,$$
$$X_i = \overline{X}_i + a^k X_i^k, \quad Y_i = \overline{Y}_i + a^k Y_i^k,$$
$$A = \overline{A} + a^k A^k.$$

Приведенный выше алгоритм построения разложения искомого решения по заданной системе кинематических состояний обеспечивает ортогональность вектор-функции погрешности к подпространству, определенному заданной базисной системой кинематических состояний, и дает зависимости для нахождения коэффициентов разложений. В результате, построение приближенного решения сводится к прямому вычислению интегралов по объему, занимаемому упругим телом и по поверхности, ограничивающей этот объем. Это делает изложенные выше результаты привлекательными для построения приближенных решений прикладных задач теории упругости. При этом форма области и характер анизотропии свойств среды может быть произвольным. В дополнение к изложенному, можно определить величину погрешности приближенного решения, которая бы позволяла оценить степень близости приближенного решения к точному и допускала бы достаточно простое вычисление. В качестве такой величины введем следующее выражение:

$$\Delta = \frac{A_{ij}\int \overline{X}_i\overline{X}_j dV + B_{ij}\int \overline{Y_i}\overline{Y_j} dF}{A_{ij}\int X_i X_j dV + B_{ij}\int Y_i Y_i dF}.$$

Из соображений размерности весовые коэффициенты последнем равенстве можно записать в следующем виде: $A_{ij} = V\delta_{ij}$ и $B_{ij} = F\delta_{ij}$. Тогда

$$\Delta = \frac{V\int \overline{X}_i\overline{X}_i dV + F\int \overline{Y_i}\overline{Y_i} dF}{V\int X_i X_i dV + F\int Y_i Y_i dF} \tag{3.11}$$

Нетрудно видеть, что если разложение искомых перемещений по заданной системе кинематических состояний R_i^k удовлетворяет системе уравнений равновесия и граничным условиям на поверхности, то $\Delta = 0$. Если для разложения перемещений не выполняется точно граничное условие, то интеграл по поверхности в равенстве (3.11) будет не равен нулю, определяя погрешность выполнения граничных условий. Такая ситуация возникает когда в качестве заданных кинематических состояний принимается поле перемещений, построенное с привлечением однородных решений, удовлетворяющих уравнению внутри области и части граничных условий. Для таких задач предложенный алгоритм оказывается весьма эффективным.

Рассмотрим еще один интересный случай. Используя общую процедуру получения условий инвариантности и алгоритм построения ортогональных разложений, исследуем инвариантность вариации Лагранжиана когезионного поля относительно полей перемещений классической теории упругости.

3.1. Инвариантность вариации функционала Лагранжа когезионного поля относительно полей перемещений классической теории упругости.

Получим условия инвариантности вариации Лагранжиана когезионного поля относительно преобразования:

$$R_i = r_i + a^k R_i^k \tag{3.12}$$

Функционал Лагранжа когезионного поля имеет вид:

$$L(R,R) = A - \frac{1}{2}\iiint \left(C_{nmij}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + CR_i R_i\right)dV \tag{3.13}$$

С помощью (3.12) найдем:

$$L(R,R) = L(r,r) +$$

$$+ A^k a^k - \frac{2a^k}{2}\iiint \left(C_{nmij}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial r_n}{\partial x_m} + CR_i^k r_i\right)dV -$$

$$- \frac{a^k a^l}{2}\iiint \left(C_{nmij}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial R_n^l}{\partial x_m} + CR_i^k R_i^l\right)dV$$

Здесь используется определение величины A^k из (3.5). Чтобы вариация Лагранжиана не зависела от δa^k, следует положить:

$$\frac{dL}{da^k} = A^k - \iiint (C_{nmij} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} \frac{\partial r_n}{\partial x_m} + CR_i^k r_i) dV -$$

$$- a^l \iiint (C_{nmij} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} \frac{\partial R_n^l}{\partial x_m} + CR_i^k R_i^l)) dV = 0$$

Отсюда:

$$a^l 2U^{kl} = A^k - \iiint (C_{nmij} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} \frac{\partial r_n}{\partial x_m} + CR_i^k r_i) dV. \quad (3.14)$$

Здесь введена энергетическая норма:

$$U^{kl} = \frac{1}{2} \iiint (C_{nmij} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} \frac{\partial R_n^l}{\partial x_m} + CR_i^k R_i^l)) dV \quad (3.15)$$

в форме потенциальной энергии взаимного возмущения кинематических состояний R_i^k и R_n^l модели когезионного поля. Тензор податливостей $\overline{U}^{nk}$, определяется как решение системы линейных уравнений:

$$\overline{U}^{nk} U^{km} = \delta^{nm} \quad (3.16)$$

при заданных U^{km}. Необходимые условия инвариантности (3.14) тогда можно записать в виде:

$$a^\rho = \frac{\overline{U}^{k\rho}}{2} [A^k - \iiint (C_{nmij} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} \frac{\partial r_n}{\partial x_m} + CR_i^k r_i) dV]$$

В результате (3.12) переписывается в следующем виде:

$$R_i = [r_i - R_i^\rho \frac{\overline{U}^{k\rho}}{2} \iiint (C_{nm\alpha\beta} \frac{\partial R_\alpha^k}{\partial x_\beta} \frac{\partial r_n}{\partial x_m} + CR_\alpha^k r_\alpha) dV] + R_i^\rho \frac{\overline{U}^{k\rho}}{2} A^k. \quad (3.17)$$

С помощью соотношения (3.17) устанавливается следующее равенство:

$$\iiint (C_{nm\alpha\beta} \frac{\partial R_\alpha^k}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + CR_\alpha^k R_\alpha) dV = A^k.$$

С другой стороны, исключая из (3.17) A^k, получим инвариантное относительно преобразования (3.12) выражение элемента подпространства экстремалей $\overline{R}$ функционала (3.13):

$$\begin{aligned} &R_i - R_i^p \frac{\overline{U}^{qp}}{2} \iiint (C_{nm\alpha\beta} \frac{\partial R_\alpha^q}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + CR_\alpha^q R_\alpha) dV = \\ &= r_i - R_i^p \frac{\overline{U}^{kp}}{2} \iiint (C_{nm\alpha\beta} \frac{\partial R_\alpha^k}{\partial x_\beta} \frac{\partial r_n}{\partial x_m} + CR_\alpha^k r_\alpha) dV = \overline{R}_i \end{aligned} \quad (3.18)$$

Следовательно, учитывая (3.18) компоненты вектора перемещений представляются в виде прямой суммы элементов ортогональных подпространств R^k и $\overline{R}$:

$$R_i = \overline{R}_i + R_i^p \frac{\overline{U}^{qp}}{2} A^q, \quad (3.19)$$

$$\iiint (C_{nm\alpha\beta} \frac{\partial R_\alpha^k}{\partial x_\beta} \frac{\partial \overline{R}_n}{\partial x_m} + CR_\alpha^k \overline{R}_\alpha) dV] = 0. \quad (3.20)$$

Можно показать, что из (3.19) и условий ортогональности (3.20), в частности, следует:

$$L(R,R)=A-\frac{1}{2}\iiint\{C_{nmij}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+CR_iR_i\}dV=$$

$$=L(\overline{R},\overline{R})+\frac{1}{2}A^k a^k=L(\overline{R},\overline{R})+\frac{1}{4}A^n A^m \overline{U}^{nm}$$

В результате, критерий инвариантности лагранжиана когезионного поля относительно преобразований (3.19) имеет вид:

$$A^k=0. \tag{3.21}$$

Следствие 1.

При $R_i^k=R_i^0$ равенства (3.21) приводят к доказанному выше критерию инвариантности лагранжиана модели когезионного поля относительно трансляций тела как жесткого целого.

$$A^0=[\iiint X_i dV+\oiint Y_i dF]R_i^0=0\Rightarrow$$

$$P_i=\iiint X_i dV+\oiint Y_i dF=0$$

Следствие 2.

При $R_i^k=\omega_n^0(x_m-\frac{S_m}{V})Э_{nmi}$ из (3.21) получаем критерий инвариантности функционала модели когезионного поля относительно вращений тела как жесткого целого:

$$A^1=[\iiint X_i(x_j-\frac{S_j}{V})Э_{ijk}dV+\oiint Y_i(x_j-\frac{S_j}{V})Э_{ijk}dF](-\omega_k^0)=0\Rightarrow$$

$$M_k=\iiint X_i(x_j-\frac{S_j}{V})Э_{ijk}dV+\oiint Y_i(x_j-\frac{S_j}{V})Э_{ijk}dF=0$$

Следствие 3.

Для R_i^k, являющимися решениями статически однородной краевой задачи классической теории упругости имеем

$$C_{nm\alpha\beta}\frac{\partial^2 R_\alpha^k}{\partial x_m\partial x_\beta}=0$$

$$\oiint C_{nm\alpha\beta}n_m\frac{\partial R_\alpha^k}{\partial x_\beta}\overline{R}_n dF=0$$

Соотношение (3.21) позволяет записать следующее равенство:

$$A^k=\iiint X_i R_i^k dV+\oiint Y_i R_i^k dF=$$

$$=\iiint(-C_{nm\alpha\beta}\frac{\partial^2\overline{R}_\alpha}{\partial x_m\partial x_\beta}+C\overline{R}_\alpha)R_\alpha^k dV+\oiint C_{nm\alpha\beta}n_m\frac{\partial\overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta}R_n^k dF=$$

$$=\iiint(C_{nm\alpha\beta}\frac{\partial\overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial R_n^k}{\partial x_m}+C\overline{R}_\alpha R_\alpha^k)dV=C\iiint R_\alpha^k\overline{R}_\alpha dV=0.$$

В результате приходим к $C\iiint R_\alpha^k\overline{R}_\alpha dV=0$ и, следовательно, получаем доказательство критерия инвариантности лагранжиана когезионного поля относительно статически однородных кинематических состояний классического упругого тела.

4. О КОГЕЗИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

Когезионное поле в окрестности вершины трещины в однородном изотропном линейно-упругом теле предлагается исследовать с помощью решения, определяемого однородным уравнением (1.14) ($D = 0$). При этом постоянную C в уравнениях модели (1.14) предлагается связывать с описанием внутренних взаимодействий, аналогичных когезионным силам связи. Постоянная C имеет размерность μ/l^2 и, будучи, вероятно, весьма малой, может оказаться соизмеримой с другими константами модели в зоне действия внутренних связей, для которых характерен эффект близкодействия, или для структур типа тонких пленок, с вырожденной геометрией. Рассмотрим далее решение $\overline{R}(x, y)$ однородного уравнения (1.14), удовлетворяющее однородным статическим граничным условиям на берегах трещины. Наряду с вектором перемещения, удовлетворяющим уравнению обобщенной модели (1.14), рассмотрим вектор перемещения $R^k(x, y)$, определяемый уравнениями классической теории упругости. Считаем, что вектор $R^k(x, y)$ удовлетворяет соответствующим однородным граничным условиям на берегах трещины. Далее введем вектор-функцию $R = R^k + \overline{R}$, полученную как сумму двух указанных векторов смещений. В силу доказанных выше утверждений (см. следствие 3) эта вектор-функция также может рассматриваться как решение исходной задачи в рамках обобщенной модели, ибо вариационная формулировка задачи инвариантна относительно классической составляющей решения. Отношение амплитудных коэффициентов (коэффициентов интенсивности) в классической и неклассической составляющих решения могут быть подобраны так, что напряженное состояние в окрестности вершины трещины становится ограниченным. Асимптотическое решение задачи показывает, что распределение напряжений на бесконечности соответствует решению, найденному по классической модели, т.е. соответствует классической механике разрушения. Это объясняется экспоненциальным убыванием на бесконечности решения уравнения для когезионного поля $C \neq 0$ по сравнению со степенным убыванием для классической модели. Таким образом, когезионное поле предлагается описывать в форме определенной линейной комбинации классического и неклассического кинематических состояний. Рассмотрим модельную задачу с позиции плоской деформации. Полагаем, что поле перемещений среды описывается с помощью только одной компоненты перемещений $u(x, y)$, что характерно, например, для упругих тел, жесткость которых в направлении поперечной координаты y значительно превышает жесткости в других направлениях. Имея в виду, соотношения (1.14), разрешающее уравнение для данного случая запишем в виде:

$$(2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + \chi)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Cu = 0. \qquad (4.1)$$

Рассмотрим в такой постановке задачу о распределении напряжений в окрестности вершины трещины. Граничные условия без учета поверхностных эффектов можно записать в виде:

$$\text{на верхнем берегу трещины: } y \geq 0, \quad y \to 0, \quad x \geq 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \left(\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\text{на нижнем берегу трещины: } y \leq 0, \quad y \to 0, \quad x > 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{4.2}$$

Аналогичную задачу можно сформулировать в рамках классической теории упругости. Для такой задачи граничные условия (4.2) останутся без изменения, разрешающее уравнение следует непосредственно из равенства (4.1), если принять в нем $C = 0$. Введем полярные координаты r, φ, связанные с вершиной трещины ($r^2 = x^2 \dfrac{(2\mu+\lambda)}{(\mu+\chi)} + y^2$, $\varphi = arctg\left(\dfrac{y(\mu+\chi)}{x(2\mu+\lambda)}\right)$). Нетрудно убедиться, что асимптотика решения уравнения (4.1), удовлетворяющего граничным условиям (4.2) и условию затухания производных (напряжений) на бесконечности, $u_k(r,\varphi)$, при $r \to 0$, имеет вид

$$u_k(r,\varphi) = K_u r^{\alpha} \cos(\alpha\varphi), \text{ где } \alpha = 1/2. \tag{4.3}$$

Приведенное асимптотическое решение построено с точностью до неизвестной амплитуды - K_u. Убывающее на бесконечности решение задачи (4.1),(4.2), найденное для неклассической модели, записанное для касательного напряжения $\tau = \mu\, \partial u / \partial y$, имеет соответственно вид:

$$\tau = \mu G_\tau K_\alpha \left(r \sqrt{\frac{C}{(\mu+\chi)}} \right) \sin(\alpha\varphi). \tag{4.4}$$

Здесь $K_\alpha(\,)$ - функция Макдональда с показателем α, G_τ - неизвестная амплитуда.

Важно отметить, что при $r \to 0$ правая часть (4.4) имеет с точностью до амплитуды такое же изменение, как и соответствующее выражение для τ, найденное с помощью формулы (4.3). Комбинируя решения вида (4.3) и (4.4), можно найти такое выражение, для которого отсутствует сингулярность при $r \to 0$. При $r \to \infty$ указанная линейная комбинация ведет себя как классическое решение. Действительно, функция Макдонольда убывает при больших значениях аргумента как экспоненциальная функция. Полученное в результате решение описывает когезионное взаимодействие [5], аналогичное силам связи Ван-дер-Ваальса, а значение параметра C связано, вероятно, с размером зоны взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье С.А., Белов П.А., Орлов А.П. Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые приложения. Механика композиционных материалов и конструкций, 1996, т.2, N2, с.84-104.
2. Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А. Об обобщенных разложениях в прикладной теории упругости и их приложения к конструкциям из композитов. Механика композиционных материалов и конструкций, 1997, т.3, №3, с.62-79.

3. Лурье С.А., Белов П.А. Модели деформирования твердых тел и их аналоги в теории поля. МТТ, Изв. РАН, 1998, №3, с.157-166.
4. Образцов И.Ф., Белов П.А., Лурье С.А., Яновский Ю.Г. Об одной модели когезионного поля в сплошных средах. В книге, посвященной 80-летию со дня рождения И.И.Воровича. В печати.
5. Barenblatt G.I. Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. Advances in Applied Mechanics, v.VII, Academic Press, 1962.