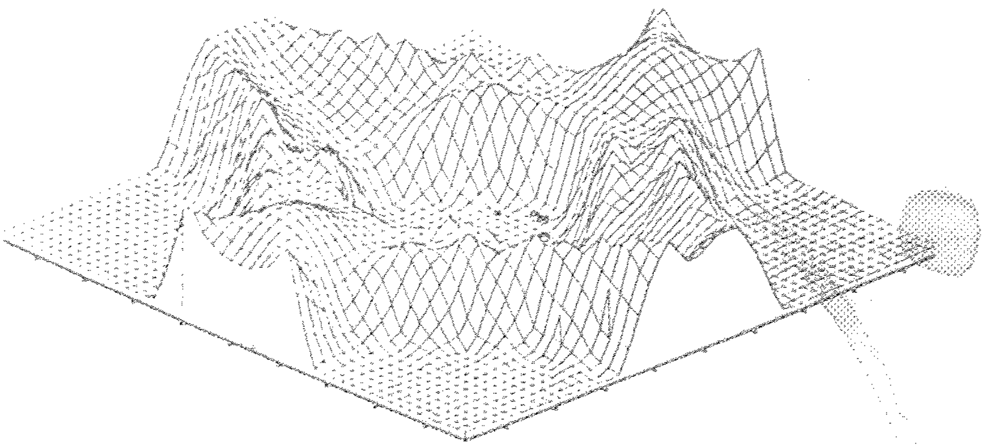
Грант РФФИ № 00-01-00393

ИЗДАНИЕ
ИПРИМ РАН

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

ИЮЛЬ-СЕНТЯБРЬ 2000
ТОМ 6, №3



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

О МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ДИНАМИЧЕСКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕДАХ*

Лурье С.А., Белов П.А., Яновский Ю.Г.

Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

Моделируются процессы динамического деформирования линейных сред, сопровождающиеся теплопереносом. Для среды с неголономными связями (необратимые процессы) на основе общих предположений относительно внутренних кинематических связей с использованием вариационного формализма определяется общая структура неголономных связей, формируется математическая модель среды в форме вариационных уравнений, включающих систему определяющих уравнений, систему уравнений движения и теплопереноса. Для одного частного случая неголономных связей даётся идентификация постоянных моделей среды, в результате чего последние определяются через известные физические постоянные материала (модули упругости, плотность, скорость звука и т.п.).

Показывается, что для физически линейной среды, допускающей непрерывность обобщённых перемещений, имеет место «инерционность» процесса теплопроводности. Следовательно, моделируется новый вид резонансных температурных явлений. Для построения модели используется вариационный подход Л.И. Седова, варианты которого эффективно применялись при моделировании голономных и неголономных сред Л.И. Седовым и его учениками. [1-5].

1. О КИНЕМАТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ

Введём в рассмотрение 4-х пространство событий с 4-х вектором обобщённых смещений исследуемой среды. Система координат 4-х мерного пространства определяется системой пространственных координат x_1, x_2, x_3 и четвёртой координатой x_4, в качестве которой выступает нормированное время. Вопрос о нормировке будет затронут далее. Соответственно 4-х вектор обобщенных смещений R_i, ($i=1,2,3,4$) определяется таким образом, что три его компоненты - r_i являются компонентами вектора перемещений исследуемой среды при её деформировании, а четвёртая компонента, соответствующая координате x_4 определяет некоторое обобщённое смещение, физический смысл которого также будет указан ниже.

Предположим, что орт N_i совпадает с направлением координаты x_4. Следовательно, любой вектор n_i в 4-х пространстве представляется в виде разложения

$$n_j = nN_j + n_k\left(\delta_{jk} - N_j N_k\right) \tag{1}$$

---

* *Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 00-01-00393.*

Вектор N_i является вектором нормали к гиперплоскости, которой принадлежит вектор 3-х мерных перемещений сплошной среды r_i. Следовательно, имеет место представление

$$R_i = RN_i + r_i \tag{2}$$

Здесь вектор r_i ($r_i = R_i(\delta_{ij} - N_i N_j)$, $r_j N_j = 0$) является проекцией вектора R_i на гиперплоскость с нормалью N_i.

Отметим некоторые свойства 4-х векторов. Пусть A_i - 4-х вектор. Проекцией этого вектора на гиперплоскость с нормалью N_i является вектор

$$A_i(\delta_{ik} - N_i N_k) \tag{3}$$

который определяется полностью своими тремя проекциями на оси координат x_1, x_2, x_3. Следовательно, вектор $A_i(\delta_{ik} - N_i N_k)$ является 3-х вектором в гиперплоскости с нормалью N_i. Эта гиперплоскость совпадает с трёхмерным пространством, определённым системой координат x_1, x_2, x_3. Скалярное произведение векторов вида (3) записывается, очевидно, в следующей формуле

$$A_i(\delta_{ik} - N_i N_k)A_j(\delta_{jk} - N_j N_k) = A_i A_j(\delta_{ij} - N_i N_j) \tag{4}$$

Введем вектор деформации для обобщённых перемещений R_i которые можно назвать несимметричными соотношениями Коши

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \gamma_{ij} + \frac{\theta}{4}\delta_{ij} + \frac{1}{2}\omega_{nm}Э_{nmij}, \tag{5}$$

где

$$\omega_{nm} = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}Э_{\alpha\beta nm}, \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{4}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij}, \qquad \theta = \frac{\partial R_k}{\partial x_k}$$

ω_{nm} - антисимметричный тензор; $Э_{\lambda\beta nm}$ - тензор Леви-Чевиты 4-х пространства, антисимметричный по всем четырём индексам, (величина $Э_{\lambda\beta nm}$ обращается в ноль когда по крайней мере два индекса совпадают, равна 1 при четных перестановках индексов и равна –1 при нечётных перестановках индексов; θ_k - амплитуда шарового тензора, γ_{ij} – тензор –девиатор деформации; δ_{ij} - тензор Кронеккера.

2. ВАРИАЦИОННЫЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

При построении модели полагаем, что единственными кинематическими связями являются расширенные соотношения Коши (5). Запишем выражение принципа возможной работы внутренних сил

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij}\delta\left(\gamma_{ij} + \frac{1}{4}\theta\delta_{ij} - \frac{1}{2}\omega_{mn}Э_{mnij} - \frac{\partial R}{\partial x_j}\right)dV \tag{6}$$

где σ_{ij} - силы реакции, обеспечивающие выполнение связей (5), интеграл берётся по 4-х мерному объёму V.

На основе этих соотношений запишем выражение для вариации Лагранжа и установим систему его свободных аргументов. Взяв интеграл выражения (6) по частям, получим

$$\delta U = \int_V \left\{ \left[\frac{1}{2}(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) - \frac{1}{4}\sigma_{kk}\delta_{ij} \right] \delta\gamma_{ij} + \frac{1}{4}\sigma_{kk}\delta\theta + \right. \tag{7}$$
$$\left. + \left[\sigma_{ij} Э_{ijmn} \right] \delta\omega_{mn} + \left(\sigma_{ij,j} \right) \delta R_i \right\} dV - \oint \left(\sigma_{ij} n_j \right) \delta R_i dF$$

Следовательно, вариация записанного функционала в общем случае представима объёмной и поверхностной плотностями, являющимися соответственно функциями обобщённых переменных γ_{ij}, θ, ω_{mn}, R_k и обобщённой поверхностной переменной R_i. Вариационный принцип для описания необратимых процессов может быть записан в виде

$$\delta L + \delta W = 0\,, \quad \delta L = \delta A - \delta U \tag{8}$$

где δU - функционал потенциальной энергии деформации для обратимых процессов, δA - вариация работы внешних сил на обобщённых перемещениях. Величина δW учитывает необратимые процессы, т.е. учитывает изменение энтропии и приток тепла.

По определению, величина δW является неинтегрирумым выражением и может быть записана лишь как линейная форма относительно вариаций (приращений) своих аргументов. Имея ввиду (7), можем записать следующее равенство для вариации δU:

$$\delta U_V = \frac{\partial U_V}{\partial \gamma_{ij}}\delta\gamma_{ij} + \frac{\partial U_V}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial U_V}{\partial \omega_{mn}}\delta\omega_{mn} + \frac{\partial U_V}{\partial R_i}\delta R_i = \frac{\partial U_V}{\partial R_{ij}}\delta R_{ij} + \frac{\partial U_V}{\partial R_i}\delta R_i$$
$$\delta U_F = \frac{\partial U_F}{\partial R_i}\delta R_i \tag{9}$$
$$\delta U = \delta \int_V U_V \, dV + \delta \int_F U_F \, dF\,, \qquad R_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$$

Учитывая список аргументов линейной дифференциальной формы δW (9), по аналогии с представлением (9) запишем вид линейной формы δW .

$$\delta W_V = A^*_{ij}\delta\gamma_{ij} + A^*\delta\theta + \widetilde{A}^*_{mn}\delta\omega_{mn} + A_i\delta R_i = A_{ij}\delta R_{ij} + A_i\delta R_i$$
$$\delta W_F = B^*_i \delta R_i \tag{10}$$
$$\delta W = \int_V \delta W_V dV + \int_F \delta W_F dF$$

В выражениях (9) U_V , и U_F , - соответственно объёмные и поверхностные плотности U , а в равенствах(10) величины δW_V и δW_F являются линейными дифференциальными формами и имеют смысл объемной и поверхностной плотности возможной работы сил диссипации A_{ij} *и* A_i .

3. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕГОЛОНОМНЫХ СВЯЗЕЙ

Заметим, что для физически линейных, обратимых процессов плотности энергии U_V , U_F являются квадратичными формами обобщённых переменных, записанных с учётом тензорной размерности последних. В результате, нетрудно убедиться [6], что для линейно упругих моделей сред с кинематическими связями

(5) имеют место следующие определяющие уравнения в 4-х объёме и на его поверхности:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial(\partial R_i / \partial x_j)} = \mu\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) + \lambda \frac{\partial R_n}{\partial x_n}\delta_{ij} + \chi\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R}{\partial x_i}\right)$$

$$\sigma_i = \frac{\partial U_V}{\partial R_i} = CR_i \tag{11}$$

$$P_i = \frac{\partial U_F}{\partial R_i} = A(R_j n_j)n_i + BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j) = A_{ij} R_j$$

Для необратимых процессов линейная форма δW не интегрируема. Условие неинтегрируемости δW с учётом соотношений (10) определяет общий вид неголономных напряжений A_{ij} и сил A_i и B_i. Запишем условия неинтегрируемости линейной формы δW в явном виде

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial R_{mn}} - \frac{\partial A_{mn}}{\partial R_{ij}} = \overline{C}_{ijmn}, \quad \frac{\partial A_{ij}}{\partial R_n} - \frac{\partial A_n}{\partial R_{ij}} = \overline{F}_{jin},$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial R_j} - \frac{\partial A_j}{\partial R_i} = \overline{D}_{ij}, \quad \frac{\partial B_i}{\partial R_j} - \frac{\partial B_j}{\partial R_i} = \overline{H}_{ij} \tag{12}$$

Связи являются неголономными, если хотя бы одна из компонент $\overline{C}_{ijmn}$, $\overline{F}_{jin}$, $\overline{D}_{ij}$, $\overline{H}_{ij}$ в (12) не обращается в ноль. Соответственно для неголономных систем (необратимых процессов) определяющие соотношения записываются в виде обобщенных соотношений Грина и являются обобщением равенств (11)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{ij}} + A_{ij}, \quad \sigma_i = \frac{\partial U_V}{\partial R_i} + A_i$$

$$P_i = \frac{\partial U_F}{\partial R_i} + B_i^* \tag{13}$$

4. РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим подробнее выражение, определяющее объемную плотность потенциальной энергии. Учитывая соотношение (2), замечаем что

$$\sigma_{ij}\delta\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\right) = \sigma_{ij}(\delta_{ij} - N_i N_n)(\delta_{jm} - N_j N_m)\delta\left(\frac{\partial r_n}{\partial x_m}\right) +$$

$$+ \sigma_{ij} N_j N_i \delta\dot{R} + \sigma_{ij} N_i \delta\left(\frac{\partial R}{\partial x_m}(\delta_{mj} - N_m N_j)\right) + \sigma_{ij} N_j \delta\dot{r}_i \tag{14}$$

В записанном выражении первое слагаемое представляет собой в точности вариацию потенциальной энергии деформации среды, рассматриваемой в трёхмерном представлении $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ $(i, j = 1,3)$. Второе слагаемое может быть записано в виде $\sigma_{44}\delta\dot{R}$ (точкой обозначается производная по координате x_4). Сравним первые два слагаемых в правой части записанного равенства (14) с правой частью первого закона термодинамики $dE = TdS + \sigma_{ij} de_{ij}$, (E - плотность внутренней энергии системы, T -абсолютная температура, S -плотность энтропии

[7]). Такое сравнение позволяет дать физическую интерпретацию обобщённому перемещению R и компоненте «напряжений» σ_{44} ($\sigma_{44} = \sigma_{ij} N_i N_j$). Действительно, можно принять, что выражение $\sigma_{ij} = \sigma_{ij} N_i N_j \delta\dot{R} = \sigma_{44} \delta\dot{R} = T\delta S$ представляет изменение внутренней энергии, связанное обратимыми тепловыми процессами. Тогда σ_{44} имеет смысл абсолютной температуры. Так как, в соответствии с (11) для обратимых процессов $\sigma_{44} = \mu_T \dot{R}$, то величина $\dot{R} = \dfrac{\partial R}{\partial x_j} N_j$ пропорциональна абсолютной температуре. Подтверждение этой трактовке величины $\dot{R}$ получим далее также в результате анализа разрешающей системы уравнений.

Последние два слагаемых в (14) можно трактовать как приращение внутренней энергии за счет связанных динамических термоупругих процессов.

Для полного математического анализа модели следует получить систему разрежающих уравнений и систему естественных краевых условий (начально-краевых условий)

Следуя принципу Лагранжа и имея ввиду определяющие соотношения (13) получим в общем случае следующую систему основных уравнений и граничных условий

$$
\begin{gathered}
\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_V}{\partial R_{ij}} + A_{ij} \right) - \left(\frac{\partial U_F}{\partial R_i} + A_i \right) + X_i \right] \delta R_i \, dV + \\
+ \oint_F \left[Y_i - \left(\frac{\partial U_V}{\partial R_{ij}} + A_{ij} \right) n_j - \left(\frac{\partial U_F}{\partial R_i} + B_i \right) \right] \delta R_i \, dF = 0
\end{gathered}
\qquad (15)
$$

Здесь n_j - вектор нормали к поверхности 4-х мерного объёма, занимаемого «обобщённой» средой с 4-х вектором перемещений R_i, X_i-4-х вектор объемных сил, Y_i-4-х вектор гиперповерхностных сил.

Подынтегральное выражение в первом слагаемом равенства (15) даёт связную систему динамических уравнений для акустического температурного процесса, включающую систему 3-х уравнений динамики сплошной среды при необратимом деформировании и обобщённое уравнение теплопроводности. Это будет показано при анализе систем уравнений для частного вида неголономных связей (необратимого процесса).

Второй интеграл в уравнении (15) может быть написан в иной форме с учётом разложения (2). В результате могут быть получены естественные граничные условия и начальные условия исследуемой проблемы. В данной работе авторы ограничиваются лишь исследованием разрешающей системы уравнений, оставляя в стороне анализ граничных и начальных условий. Подробный анализ последних и ряд качественных следствий такого исследования будет предметом другой работы.

5. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОСТОЯННЫХ МОДЕЛИ

Перейдём к более подробному анализу разрешающих уравнений для одной частной модели необратимых процессов связанных с теплопроводностью.

Конкретизируем вид неголономных связей. Пусть в соотношениях $A_{ij}=0$, $B_i=0$, но $A_i \neq 0$. Тогда условия неголономности (12) будут иметь вид $C_{ijnm}=0$, $\overline{H}_{ij}=0$. Положим дополнительно $D_{ij}=0$ и $\dfrac{\partial \overline{F}_{ijn}}{\partial R_n}=0$, $\dfrac{\partial \overline{F}_{ijn}}{\partial R_{pq}}=0$ $\left(R_{pq}=\dfrac{\partial R_p}{\partial x_q}\right)$.

Тогда получим для A_n:

$$A_n=\overline{F}_{ijn}R_{ij} \tag{16}$$

Далее определим постоянный тензор третьего ранга $\overline{F}_{ijn}$, в наиболее простом виде, так чтобы A_n представлялась как линейная форма от $\dfrac{\partial R_i}{\partial x_n}$ $(x_n=x_iN_i)$, т.е. от компонент 4-х вектора скоростей. Таким образом вводится вполне естественная модель необратимых процессов, когда внутреннее трение пропорционально скоростям. Запишем

$$\overline{F}_{ijn}=ibN_j(\delta_{in}-N_iN_n)+iaN_jN_nN_i \tag{17}$$

Здесь $i=\sqrt{-1}$, постоянные a и b - некоторые физические постоянные модели, физический смысл которых предстоит выяснить в дальнейшем.

Заметим, что если $a\neq b$, то в отношении неголономных (необратимых) свойств рассматриваемой модели имеет место анизотропность среды по отношению к координате x_4 (временной координате). В этом нетрудно будет убедиться далее по структуре разрешающей системы уравнений.

Для изотропной среды следует положить $a=b$. В этом случае имеем

$$\overline{F}_{ijn}=ia\delta_{in}N_j \tag{18}$$

Учитывая формулы (16)-(18), запишем явные выражения для коэффициентов A_n в вариационной форме δW.

если $a\neq b$

$$A_n=ib\frac{\partial R_i}{x_j}N_j(\delta_{in}-N_iN_n)+ai\frac{\partial(R_iN_i)}{\partial x_j}N_jN_n=ib\dot{r}_n+ia\dot{R}N_n$$

если $a=b$

$$A_n=ia\frac{\partial R_n}{\partial x_j}N_j=ia\dot{R}_n$$

Здесь $\dfrac{\partial R_i}{\partial x_n}\equiv\dot{R}_i$ и соответственно $\dfrac{\partial r}{\partial x_n}\equiv\dot{r}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x_n}\equiv\dot{R}$.

В результате, определяющие соотношения (13) для напряжений в неголономных средах с неголономными связями вида (12), (16) – (18) могут быть записаны в форме

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}=\mu(r_{i,j}+r_{j,i})+\lambda r_{k,k}\delta_{ij}+\chi(r_{i,j}+r_{j,i})\\ \sigma_i=c(r_i+ib\dot{r}_i)\end{gathered} \tag{19}$$

Здесь индексы принимают значения от 1 до 3.

Для частного случая среды с определяющими соотношениями (16)–(19), в которых принимается $\chi=c=0$ (классическая линейно упругая среда с симметричным тензором напряжений) в отсутствии массовых и поверхностных сил) уравнение (15) принимает вид

$$\mu\Delta r_i = \frac{\mu}{\gamma^2}\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} + (\mu+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + (\mu+\lambda)\frac{\partial\dot{R}}{\partial x_i} - \frac{b}{v}\frac{\partial r_i}{\partial t} = 0 \quad i = 1,2,3$$
$$\mu\Delta R - \frac{2\mu+\lambda}{v^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{\mu+\lambda}{iv}\frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{a}{v}\frac{\partial R}{\partial t} = 0 \tag{20}$$

Здесь μ, λ - коэффициенты Лама, $\theta = \frac{\partial r_i}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,3}$, $x_i = x_n(\delta_{in} - N_i N_n) + ivtN_i$ и

$i = \sqrt{-1}$, $R_i = R_n(\delta_{in} - N_i N_n) + RN_i$, $x_4 = ivt$, $\dot{R} = \frac{\partial R}{\partial x_4}$

$\Delta(\ )$ - трехмерный оператор Лапласа.

Интерпретируем постоянные модели исследуемой среды a, b, v, выразив их через упругие постоянные эластоупругости и плотность материала.

Сначала обратим внимание на то, что коэффициенты при ускорениях $\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}$ есть плотность материала ρ. Таким образом, необходимо положить

$$\frac{\mu}{v^2} = \rho \text{ и}$$

следовательно параметр модели v определяется формулой

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{21}$$

В результате получаем, что нормирующий множитель при четвёртой координате (координате времени) является скоростью звука волны искажения ($v = \sqrt{\mu/\rho}$, μ - модуль сдвига материала).

Слагаемые в первых трёх уравнениях (20) вида $(\mu+\lambda)\frac{\partial\dot{R}}{\partial x_i}$ по аналогии с термоэластичностью должны представлять соответствующие тепловые нагрузки. Следовательно, должно выполняться равенство

$$(\mu+\lambda)\dot{R} = (2\mu+\lambda)\alpha T \tag{22}$$

где α - коэффициент температурного расширения.
Соответственно, из (22) найдём

$$\dot{R} = \frac{2\mu+\lambda}{\mu+\lambda}\alpha T \tag{23}$$

Равенство (23) определяет $\dot{R}$ как величину пропорциональную абсолютной температуре, что уже было отмечено раньше.
Исключим из последнего, четвёртого уравнения величину R с помощью формулы (23). Получим

$$k\Delta T - \frac{ak}{v\mu}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{2\mu+\lambda}{\mu}\frac{k}{v^2}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{(\mu+\lambda)^2}{\mu(2\mu+\lambda)}\frac{k}{v\alpha}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \tag{24}$$

Уравнение (24) является обобщённым уравнением теплопроводности [8]. Поэтому величину $\frac{ak}{v\mu}$ следует интерпретировать как теплоёмкость C:

$$C = \frac{ak}{v\mu}$$

Отсюда находим постоянную модели a:

$$a = c\nu\mu/k \tag{25}$$

6. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Поразительным представляется тот факт, что уравнение теплопроводности (24) имеет инерционное слагаемое, а задача в целом описывается системой уравнений гиперболического типа. Следует отметить, что появление "инерционного" слагаемого никак не связано с моделированием неголономных связей, а возникает естественным путём в результате строгой вариационной формулировки соответствующей голономной модели, внутренние связи которой подчиняются соотношению (2). В связи с этим можно предположить, что процессу теплопереноса свойственна инерционность и, следовательно, соответствующие резонансные эффекты. Авторы считают этот результат одним из основных результатов данной работы. Инерционность поля температур характеризуется множителем при $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$, который однозначно определяется через физические постоянные материала:

$$\rho_T = \frac{2\mu+\lambda}{\mu}\frac{k}{\nu^2} = \frac{(2\mu+\lambda)k}{\mu^2}\rho$$

т.е. квази«плотность» поля температур пропорциональна коэффициенту теплопроводности и плотности материала.

Заметим, что неголономные связи вида (16) легко модифицировать таким образом, чтобы в уравнении теплопроводности добавилось слагаемое, пропорциональное величине $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_i}\right)$, которое обычно [8] присутствуют в уравнении теплопроводности и характеризует связность механических и тепловых полей. Однако выражение в правой части равенства (24), отражающее влияние механического поляна процесс теплопереноса также является новым.

В заключении отметим, что параметр модели b с помощью первых трёх уравнений (20) идентифицируется через коэффициент динамического трения f:

$$f = \frac{b}{\nu} \qquad \text{или} \qquad b = f\nu.$$

С другой стороны, если $a = b$, то с учётом (25) коэффициент динамического трения определяется через теплопроводность - k, теплоёмкость - C и модуль сдвига среды - μ

$$f = \mu\frac{c}{k}.$$

Этот результат также представляется новым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И., Об основных принципах механики сплошной среды, Изд-во МГУ, 1961.
2. Седов Л.И., Об основных концепциях механики сплошной среды, в кн «Некоторые проблемы математики и механики», Изд. Сибирск. Отд. АН СССР, Новосибирск, 1961.

3. Седов Л.И. и Эглит М.Э., Построение неголономных моделей сплошных сред с учётом конечности деформаций и некоторых физико-химических эффектов, ДАН, 1962, т.142, №1.
4. Беричевский В.Л., Вариационные методы построения моделей сплошных сред с необратимыми процессами в специальной теории относительности, ПММ, 1966, т.30, вып.6.
5. Беричевский В.Л., Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа, ПММ, 1966, т.30, вып.3.
6. Лурье С.А., Белов Н.А., Модели деформирования твёрдых тел и их аналогии в теории поля, МТТ, 1998, № 3, с.157-166.
7. Гольденблат И.И., Нелинейные проблемы теории упругости, М., Наука, 1969.
8. Цой П.В. Методы расчёта задач тепломассопереноса, М., Энергоатомиздат, 1984, 176 с.

Поступила в редакцию 30 мая 2000 года.