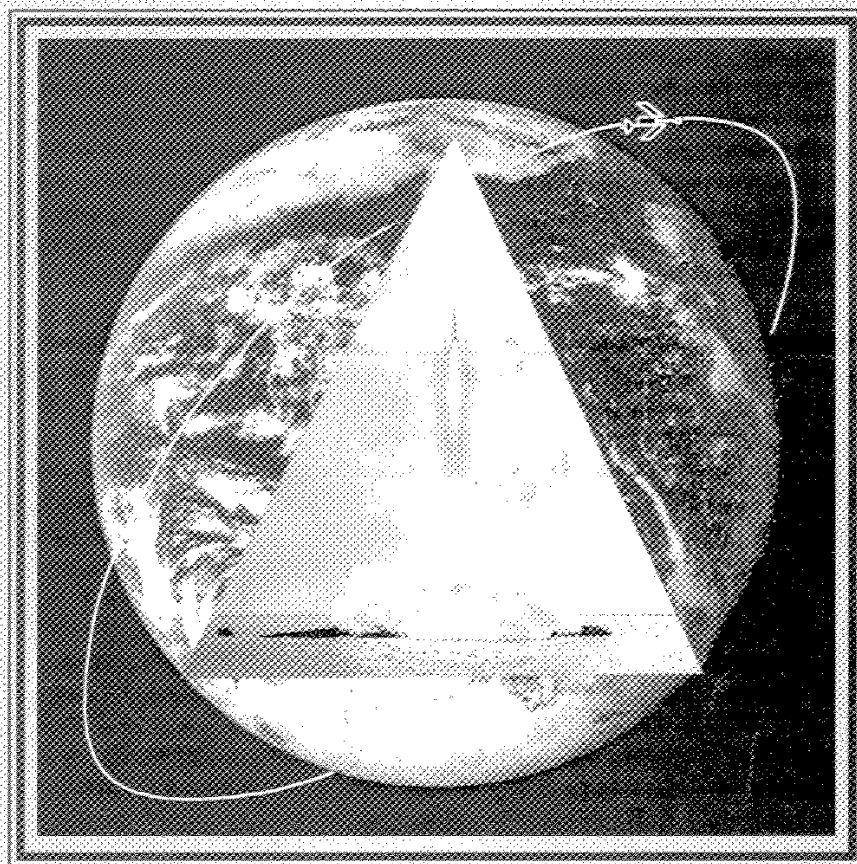


**КОНСТРУКЦИИ  
ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ  
МАТЕРИАЛОВ**

**2**



МОСКВА 2000

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УНИТАРНОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ  
"ВСЕРОССИЙСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ  
ИНФОРМАЦИИ — ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНФОРМАЦИОННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР  
ОБОРОННОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ"

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАКЕТНЫЙ ЦЕНТР "КБ им. АКАДЕМИКА В. П. МАКЕЕВА"

НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

**МЕЖОТРАСЛЕВОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ**

# **КОНСТРУКЦИИ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Орган Научного совета РАН по механике  
конструкций из композиционных материалов

Выпуск 2

Издается с 1981 г.

Москва 2000

## **СОДЕРЖАНИЕ**

Криволицкая И. И. К 80-летию академика Ивана Филипповича Образцова ..... 3

### **Строительная механика и прочность конструкций**

Ворович И. И., Юдин А. С., Сафроненко В. Г. Численно-аналитические методы в за-  
дачах виброакустики оболочечных конструкций ..... 7

### **Механика композиционных материалов**

Победря Б. Е. Об учете структурных изменений в механике композиционных мате-  
риалов ..... 19

Лурье С. А., Белов П. А., Криволицкая И. И. О некоторых классах моделей тонких  
структур ..... 29

### **Исследования напряженно-деформированного состояния и расчет конструкций из композиционных материалов**

Рыбаков Л. С. Метод конечных элементов с точки зрения механики регулярных  
упругих систем ..... 41

УДК 539.3

## О некоторых классах моделей тонких структур

С. А. ЛУРЬЕ, П. А. БЕЛОВ

Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия

И. И. КРИВОЛУЦКАЯ

Московский государственный авиационный институт (Технический университет), Россия

Делается попытка построить вариант линейной теории тонких структур. Вводятся кинематические соотношения, устанавливаются определяющие соотношения и формулируется соответствующая краевая задача. В основе исследования лежит модель среды, допускающая упругие взаимодействия между точками среды, аналогичные силовым взаимодействиям, вызываемым винклеровскими пружинками, а также упругие взаимодействия на поверхности тела, соответствующие тангенциальным и нормальным смещениям на поверхности среды. Модель учитывает масштабный фактор  $l$  и, следовательно, предполагает учет абсолютного размера исследуемой области. Учет новых модулей упругости становится существенным, в случае, если хотя бы один из габаритных размеров исследуемого тела соизмерим с характерным масштабным фактором  $l$ . Таким образом, предлагается вариант теории тонких пленок, который построен в рамках единой обобщенной модели среды, без привлечения специальной модели.

Значительный интерес к исследованию деформации тонких и супертонких пленок вызван потребностью получения новых конструкционных материалов и покрытий, а также широким применением пленок в изделиях, например в полупроводниковых элементах больших интегральных схем. Известно, что с точки зрения классической теории упругости невозможно описать некоторые аспекты поведения тонких пленок [1–4]. В данном исследовании предлагается обобщенная модель сплошной среды, в которой система внутренних взаимодействий определяется общим характером кинематических связей. Модель построена с использованием вариационного формализма [5–7] и дает описание сред с поверхностными эффектами и внутренними взаимодействиями когезионного типа. Размерность дополнительных физических постоянных, с точки зрения классической теории, определяется величинами  $\sim \mu/l^2$  и  $\sim \mu/l$ , где  $\mu$  – модуль сдвига;  $l$  – некоторый характерный параметр размерности длины.

### Определяющие соотношения модели и система разрешающих уравнений

Для построения определяющих соотношений воспользуемся общим подходом [5–8]. По заданным кинематическим связям находится вид функционала энергии для линейно-упругой среды и устанавливается характер силовых взаимодействий, соответствующих введенным кинематическим связям. В результате модель среды полностью задается разнообразием вводимых кинематических связей. Запишем выражение для несимметричного тензора дисторсии:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k \varepsilon_{ijk}, \quad (1)$$

где  $R_i$  — компоненты вектора перемещений;

$\gamma_{ij}$  и  $\theta$  — компоненты тензора девятатора деформаций и шарового тензора, соответственно;

$\omega_k$  — компоненты вектора линейных поворотов;

$$\omega_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial R_l}{\partial x_j};$$

$\varepsilon_{ijk}$  — тензор Леви-Чевиты.

Выражение (1) соответствует разложению тензора второго ранга на составляющие: девиатор, шаровой тензор и ротор.

Интегрируя соотношение (1) по пространственной координате, получим:

$$R_i = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_x} \left[ \gamma_{ij} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} - \omega_k \varepsilon_{ijk} \right] dy_j. \quad (2)$$

Условия существования криволинейного интеграла в формуле (2) запишутся в виде:

$$\omega_{i,j} = \gamma_{\beta j, \alpha} \varepsilon_{\alpha \beta i} + \frac{1}{3} \theta_{, \alpha} \varepsilon_{\alpha ij}. \quad (3)$$

Интегрирование соотношения (3), по аналогии с выражением (1), дает явное выражение в квадратурах [6] для  $\omega_k$ . Условия существования соответствующих криволинейных интегралов приобретают вид

$$\left( \gamma_{\beta \alpha} + \frac{1}{3} \theta \delta_{\beta \alpha} \right)_{, j m} \varepsilon_{\alpha \beta i} \varepsilon_{m i j} = 0. \quad (4)$$

Соотношения (4), обеспечивающие непрерывность упругих поворотов, являются уравнениями совместности Сен-Венана. Предложенная форма записи уравнений неразрывности позволяет разрешить последние относительно производных от объемной деформации в явной форме, выразив их через компоненты тензора — девиатора деформаций. Полученную систему уравнений можно вновь проинтегрировать в квадратурах. Необходимыми и достаточными условиями (для односвязных сред) интегрируемости этой системы являются новые уравнения совместности третьего порядка, записанные относительно только компонент тензора — девиатора деформаций [6]:

$$\left[ \frac{1}{2} \gamma_{\alpha \beta} \delta_{i \rho} + \gamma_{m i} \varepsilon_{\alpha m i} \varepsilon_{\beta i \rho} \right]_{, \alpha \beta q} \varepsilon_{\rho q j} = 0.$$

В работе [6] показано, что криволинейный интеграл в определении перемещения может быть записан только через компоненты тензора девиатора деформации  $\gamma_{ij}$  и, следовательно, описывает перемещения, вызванные лишь деформациями изменения формы.

$$R_i = R_i^0 + \omega_{\alpha}^0 (x_{\beta} - x_{\beta}^0) \varepsilon_{\alpha \beta i} + \frac{1}{3} \theta^0 (x_i - x_i^0) + \frac{1}{3} \theta_j^0 (x_j - x_j^0) (x_i - x_i^0) - \frac{1}{6} \theta_i^0 (x_j - x_j^0) (x_j - x_j^0) + r_i. \quad (5)$$

Показано также, что объемная деформация и упругие повороты с точностью до полиномов также определяются лишь деформациями изменения формы [6].

Представления для перемещений  $R_i$ , найденные в форме соотношений (5), являются обобщением формул Чезаро. Остановимся на формулировке обобщенных физических соотношений линейно-упругого тела. Полагаем, что соотношениями (1) полностью определяется кинематика исследуемой среды. В соответствии с принципом возможных перемещений запишем выражение для вариации работы внутренних

усилий на кинематических связях (1). Вводя связи с помощью тензора множителей Лагранжа  $\lambda_{ij}$ , получим:

$$\delta U = \iiint \left[ \left( \frac{1}{2} \lambda_{ij} + \frac{1}{2} \lambda_{ji} - \frac{1}{3} \lambda_{kk} \delta_{ij} \right) \delta \gamma_{ij} + \left( \frac{1}{3} \lambda_{ij} \delta_{ij} \right) \delta \theta + \right. \\ \left. + (-\lambda_{ij} \varepsilon_{ijk}) \delta \omega_k + \left( \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x_j} \right) \delta R_i \right] dV + \iint \left[ (-\lambda_{ij} n_j) \delta R_i \right] dF. \quad (6)$$

Здесь  $n_j$  — компоненты единичного вектора нормали к поверхности, ограничивающей рассматриваемое упругое тело.

Тензором  $\lambda_{ij}$  описывается спектр взаимодействий, соответствующих введенным кинематическим связям в исследуемой среде (1). Равенство (6) позволяет определить список аргументов искомого лагранжиана. Предполагая интегрируемость записанной линейной дифференциальной формы (6), можно заключить, что потенциальная энергия представляется в виде:

$$U = \iiint W_V(\gamma_{ij}, \theta, \omega_k, R_k) dV + \iint W_F(R_k) dF.$$

Полагая физическую линейность исследуемой среды, а следовательно, и квадратичность плотности потенциальной энергии относительно аргументов  $\lambda_{ij}$ ,  $\theta$ ,  $\omega_k$ ,  $R_i$  и учитывая тензорную размерность этих переменных, получаем:

$$W_V = \mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{1}{6} (2\mu + 3\lambda) \theta^2 + 2\chi \omega_k \omega_k + 2D \omega_k R_k + \frac{1}{2} C R_k R_k, \quad (7)$$

$$W_F = 1/2 A R_i R_j n_i n_j + 1/2 B R_i R_j (\delta_{ij} - n_i n_j) = 1/2 B_{ij} R_i R_j.$$

Определяя внутренние силовые факторы как производные от потенциальной энергии по обобщенным кинематическим переменным, получаем, что модель сплошной среды, обусловленная соотношениями (1), допускает существование внутри объема внутренних силовых факторов типа напряжений  $\sigma_{ij} = \partial W_V / \partial R_{ij}$  и объемных сил  $\sigma_k = \partial W_V / \partial R_k$ , а на поверхности — внутренних поверхностных сил  $f_i = \frac{\partial W_F}{\partial R_i}$ .

В результате соотношения, определяющие внутренние взаимодействия тензорной и векторной природы внутри объема, запишутся в виде:

$$\sigma_{ij} = \mu (R_{ij} + R_{ji}) + \lambda R_{kk} \delta_{ij} + \chi (R_{ij} - R_{ji}) - D R_k \varepsilon_{ijk}; \quad (8)$$

$$\sigma_k = C R_k + 2D \omega_k. \quad (9)$$

На поверхности исследуемого тела справедливы следующие физические уравнения:

$$f_i = B_{ij} R_j = [A n_i n_j + B (\delta_{ij} - n_i n_j)] R_j. \quad (10)$$

Естественно считать, что  $\mu$  и  $\lambda$  равны известным в теории упругости коэффициентам Ламе ( $\mu$  — модуль сдвига). Постоянные  $\chi$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  являются новыми упругими постоянными среды. Непарность касательных напряжений определяется упругими постоянными  $\chi$  и  $D$ . В дальнейшем полагаем с целью упрощений, что  $D = 0$ . Уравнения (8) — (10) являются определяющими соотношениями для модели среды с упругими внутренними связями типа объемных и поверхностных винклеровских оснований.

В дальнейшем предполагается, что усилия, аналогичные усилиям в винклеровских пружинках с жесткостью, равной величине  $C$  (новая упругая постоянная), моделируют внутренние взаимодействия когезионных полей. Для них характерны большие

амплитудные значения в пределах соответствующих областей взаимодействий и быстрое затухание вне пределов этих областей.

Имеет место также анизотропия поверхностных свойств среды по нормали к поверхности и касательной к ней. Поверхностные эффекты описываются с помощью, соответственно, физических постоянных  $A$  и  $B$ . Вопрос о материальной объективности предложенной модели был подробно исследован в работе [8]. Определяющие соотношения (8)–(10) позволяют записать конкретное выражение для потенциальной энергии. Для изотропной среды, в которой перемещения подчиняются связям, соответствующим несимметричным соотношениям для тензора дисторсии (1), вариационное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta L = \iiint \left[ (\mu + \chi) \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\mu + \lambda - \chi) \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_i} + 2D \frac{\partial R_m}{\partial x_m} \varepsilon_{ijk} - CR_i + X_i \right] \delta R_i dV + \\ + \iint \left[ Y_i - \mu \left( \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right) n_j - \lambda \frac{\partial R_m}{\partial x_m} n_i - \right. \\ \left. - \chi \left( \frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right) n_j + DR_k n_j \varepsilon_{kji} - B_{ij} R_j \right] \delta R_i dF. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнениями (11) определяется математическая постановка задачи, заключающаяся в формулировке системы разрешающих дифференциальных уравнений и граничных условий для исследуемой среды. Построенные модели сред с характеристиками, отличающимися по размерности на величину характерного размера, представляют интерес с точки зрения описания когезионных полей в окрестности сингулярных точек, теории тонких пленок и т. п.

В соответствии с (11) естественные граничные условия запишутся в виде ( $D = 0$ ):  $Y_i = \sigma_{ij} n_j + AR_j n_i + BR_j (\delta_{ij} - n_i n_j)$ .

Здесь  $n_i$  — координаты вектора нормали  $\bar{n}$  к поверхности тела.

Введем нормальную и касательную составляющие поверхностных усилий. Получим в проекции на нормаль:

$$Y_i n_i = \sigma_{ij} n_j n_i + A(R_j n_i). \quad (12)$$

Проекция на плоскость, касательную к нормали, дает следующие составляющие:

$$Y_i (\delta_{jk} - n_i n_k) = \sigma_{ij} n_j (\delta_{jk} - n_i n_k) - BR_j (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{jk} - n_i n_k). \quad (13)$$

Следовательно, с постоянной  $A$  связаны поверхностные эффекты, проявляющиеся при нагружении по нормали к поверхности, а постоянная  $B$  в уравнении (13) отвечает за поверхностные эффекты в касательной плоскости в исследуемой точке поверхности.

### Некоторые новые свойства деформации формоизменения

Рассмотрим вновь соотношения для тензора дисторсии как наиболее общую форму кинематических связей в сплошной среде. Предложим новую форму записи компонентов тензора девиатора деформаций. Пусть векторы  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  образуют ортонормированную систему векторов, соответственно, с компонентами  $X_i$ ,  $Y_i$  и  $Z_i$  в некоторой фиксированной системе координат. Имеют место следующие равенства:

$$\delta_{jk} = X_j X_k + Y_j Y_k + Z_j Z_k$$

$$X_i Y_i = Y_i Z_i = X_i Z_i = 0.$$

Здесь  $\delta_{jk}$  — символ Кронекера.

Можно показать, что компоненты тензора девиатора деформаций могут быть представлены в виде следующих разложений:

$$\gamma_{ij} = a_k A_{ijk} + d_k D_{ijk} \tag{14}$$

где  $a_k, d_k$  – компоненты векторов, вид которых приведен ниже;

$A_{ijk}, D_{ijk}$  – симметричные по индексам  $i$  и  $j$  тензоры третьего ранга, в некотором смысле аналогичные тензору Леви-Чевиты:

$$A_{kij} = [(Y_k Z_j + Y_j Z_k) X_i + (X_j Z_k + Z_j X_k) Y_i + (X_k Y_j + X_j Y_k) Z_i];$$

$$D_{kij} = [(X_k X_j - Y_k Y_j) Z_i + (Y_k Y_j - Z_k Z_j) X_i + (Z_k Z_j - X_k X_j) Y_i].$$

Справедливы следующие равенства:

$$A_{ijk} \delta_{ij} = D_{ijk} \delta_{jk} = \mathcal{E}_{ijk} \delta_{ij} = 0;$$

$$A_{ijk} \mathcal{E}_{ijp} = D_{ijk} \mathcal{E}_{ijp} = \delta_{ij} \mathcal{E}_{ijk} = 0;$$

$$A_{ijq} D_{ijp} = 0.$$

Кроме того, имеют место следующие равенства:

$$A_{ijn} A_{ijm} = 2\delta_{nm}; \quad D_{ijp} D_{ijq} = 3\delta_{pq} - (X_p + Y_p + Z_p)(X_q + Y_q + Z_q);$$

$$\mathcal{E}_{ijn} \mathcal{E}_{ijm} = 2\delta_{nm}; \quad \delta_{kl} \delta_{kj} = \delta_{ij}$$

Компоненты векторов  $a_k, d_k$  в разложении (14) выражаются через компоненты тензора – девиатора деформаций с помощью следующих формул:

$$a_i = \frac{1}{2} \gamma_{kj} A_{kji}; \quad d_i = \frac{1}{3} \gamma_{kj} D_{kji} \tag{15}$$

С учетом разложения (14) компоненты тензора дисторсии можно записать в форме, отличной от той, что дается выражениями (1):

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = a_k A_{ijk} + d_k D_{ijk} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} - \omega_k \mathcal{E}_{ijk} \tag{16}$$

В соответствии с общей процедурой принципа возможных перемещений, использование кинематических связей вида (15), (16) позволяет установить новый список аргументов функционала Лагранжа:

$$\begin{aligned} \delta U &= - \iiint \left[ \sigma_{ij} \delta \left( \frac{\partial R_i}{\partial x_j} - a_k A_{ijk} - d_k D_{ijk} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} + \omega_k \mathcal{E}_{ijk} \right) dV = \right. \\ &= \iiint \left[ \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \delta R_i + (\sigma_{ij} A_{ijk}) \delta a_k + (\sigma_{ij} D_{ijk}) \delta d_k + \right. \\ &\left. + \left( \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} \right) \delta \theta + (-\sigma_{ij} \mathcal{E}_{ijk}) \delta \omega_k \right] dV - \oint (\sigma_{ij} n_j) \delta R_i dF. \end{aligned}$$

Отметим, что формально тождественная замена тензора девиатора его разложением по двум векторам ведет к расширению аргументов лагранжиана и, как следствие, к расширению списка квадратичных инвариантов. Соответственно, полагая интегрируемость потенциальной энергии деформации, нетрудно установить, что потенциальная энергия представляется в виде:

$$U = \iiint_V W_V(a_k, b_k, \theta, \omega_k, R_k) dV + \oint_F W_F(R_k) dF \tag{17}$$



В результате вместо первого равенства (7) для линейно упругой среды будем иметь

$$W_V = \frac{1}{2} \mu_1 \sigma_i \sigma_i + \frac{1}{2} \mu_3 d_i d_i + 2\chi \omega_k \omega_k + \frac{1}{2} C R_k R_k + \frac{1}{6} (2\mu + 3\lambda) \theta^2 + \\ + \mu_2 a_i d_i + C_1 a_i \omega_i + C_2 a_i R_i + C_3 d_i \omega_i + C_4 d_i R_i + 2D \omega_k R_k.$$

Расширение списка квадратичных инвариантов привело к расширению спектра упругих свойств изотропной среды и дает основание к обобщению понятия изотропной сплошной среды. Теперь нетрудно определить и внутренние силовые факторы, установив общую форму определяющих уравнений, отвечающих выражению для удельной потенциальной энергии. Положим, в целях упрощений (это не является принципиальным), что в функционале Лагранжа отсутствуют слагаемые (инварианты), несоответствующие классической теории упругости, т. е.

$$C = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = D = \chi = 0.$$

Тогда система определяющих уравнений может быть переписана в виде:

$$\sigma_{ij} A_{ijk} = \mu_1 \sigma_k + \mu_2 d_k, \quad \sigma_{ij} D_{ijk} = \mu_2 \sigma_k + \mu_3 d_k, \quad \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} = \left( \frac{2}{3} \mu_3 + \lambda \right) \theta. \quad (18)$$

Таким образом, введение новой формы представления тензора девиатора деформаций в виде разложения на два вектора и использование общей вариационной процедуры построения моделей позволило сделать вывод о том, что даже изотропная упругая сплошная среда обладает гораздо большим разнообразием упругих свойств, чем это представлялось до сих пор. Более того, описание такой обобщенно-изотропной среды дается сформулированным лагранжианом с объемной плотностью потенциальной энергии  $W_V$  и поверхностной плотностью потенциальной энергии  $W_F$ .

Упругие свойства материала, связанные с линейным и угловым формоизменениями могут быть различными. Модель допускает также взаимное возмущение указанных выше кинематических состояний, что обусловлено наличием модуля упругости  $\mu_2$  в соотношениях (18).

### О когезионных взаимодействиях

Постоянную  $C$  в уравнениях модели (7) – (10) предлагается использовать для описания внутренних взаимодействий, аналогичных когезионным силам связи. Величина  $C$  имеет размерность  $\mu/l^2$  и будучи, вероятно, весьма малой, может оказаться соизмеримой с другими константами модели в зоне действия внутренних связей, для которых характерен эффект близкого действия, или в модели тонких структур, характерный размер которых (толщина для пленок) соизмерим с параметром  $l$ . Рассмотрим модельную задачу о трещине. Полагаем, что поле перемещений описывается с помощью только одной компоненты перемещений  $u(x, y)$ , что характерно, например, для упругих тел, жесткость которых в направлении поперечной координаты  $y$  значительно превышает жесткости в других направлениях. Разрешающее уравнение здесь принимает следующий вид [см. уравнение (11)]:

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + \chi) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Cu = 0. \quad (19)$$



Граничные условия запишем без учета поверхностных эффектов:

$$\text{на верхнем берегу трещины: } y \geq 0, \quad y \rightarrow 0, \quad x > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \left( \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad (20)$$

$$\text{на нижнем берегу трещины: } y \leq 0, \quad y \rightarrow 0, \quad x > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Введем полярные координаты  $r, \phi$ , связанные с вершиной трещины. Общее решение задачи может быть представлено следующим образом:

$$U(r, \phi) = u(r, \phi) + u_k(r, \phi),$$

где  $u(r, \phi)$  – решение уравнения Гельмгольца ( $C \neq 0$ );

$u_k(r, \phi)$  – решение соответствующего гармонического уравнения ( $C = 0$ ).

Асимптотическое решение гармонического уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (20) и условию затухания производных (напряжений) на бесконечности,  $u_k(r, \phi)$  при  $r \rightarrow 0$ , имеет вид

$$u_k(r, \phi) = G_\tau r^\alpha \cos(\alpha\phi), \quad \text{где } \alpha = 1/2. \quad (21)$$

Решение определяется с точностью до неизвестной амплитуды  $G_\tau$ .

Убывающее на бесконечности решение задачи (19), (20), записанное для касательного напряжения  $\tau = \mu \partial u / \partial y$ , имеет вид:

$$\tau = \mu G_\tau K_\alpha \left( r \sqrt{\frac{C}{\mu + \chi}} \right) \sin(\alpha\phi). \quad (22)$$

Здесь  $K_\alpha(\cdot)$  – функция Макдональда с показателем  $\alpha$  ( $\alpha = 1/2$ );

$G_\tau$  – неизвестная амплитуда.

При  $r \rightarrow 0$  правая часть (22) имеет с точностью до амплитуды такое же изменение, что и соответствующее выражение для  $\tau$ , найденное с помощью формулы (21).

Комбинируя решения вида (21), (22), можно найти такое выражение, для которого отсутствует сингулярность при  $r \rightarrow 0$ . При  $r \rightarrow \infty$  решение, полученное в результате указанной линейной комбинации, представляет классическое решение, ибо функция Макдональда убывает при больших значениях аргумента как экспоненциальная функция. Считаем, что полученное решение описывает межатомные взаимодействия [9, 10], а значение параметра  $C$  связано с размером зоны взаимодействия.

### О приближенной оценке области межатомных взаимодействий

Покажем, что постоянная  $C$  в уравнениях модели (7) – (10) связана с размером области межатомных взаимодействий [9].

Рассмотрим снова модель среды, “несжимаемой” в направлении продольной координаты  $x$  [ $E_x \rightarrow \infty, u(x, y) \rightarrow 0$ ]. Пусть среда занимает плоскость  $|x| < \infty, y > 0$ .

Полагаем, что координаты  $x$  и  $y$  отнесены к некоторым параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ , имеющим размерность длины и соизмеримым размерам области, занимаемой телом. Тогда поперечные смещения  $v(x, y)$  подчиняются уравнению [см. уравнение (11)]:

$$\frac{\sigma^2}{\alpha^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - C_0 v = 0, \quad (23)$$

где  $\sigma^2 = E_y / G, E_y, G$  – модули упругости упругой среды в классической постановке;

$C_0 = C / E_y, C$  – характеристика, определяющая «когезионную жесткость» среды.

Применим преобразование Фурье в отношении координаты  $x$ . Тогда уравнение (23) в трансформантах приобретает вид:

$$\bar{v}''(y) - K^2 \bar{v} = 0;$$

где  $K^2 = \left( \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \lambda^2 + C_0 \right) \beta^2$ ,  $\lambda$  – параметр преобразования Фурье.

Полагаем, что слой  $y = 0$  соответствует центру действия исследуемых взаимодействий в окрестности, соизмеримой с внутренним характерным параметром  $l$  ( $l \ll \alpha$ ,  $l \ll \beta$ ). Можно записать решение, убывающее в окрестности этого слоя:

$\bar{v}(y) = D e^{-K|y|}$ . Соответствующее решение той же задачи в классической постановке записывается в виде:  $\bar{v}_0(y) = D_0 e^{-K_0|y|}$ ;  $K_0 = \sigma^2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} \lambda^2$ .

Оценим функцию относительной поправки, даваемой предложенной моделью в исследуемом слое. Имеем

$$\delta = \frac{|\bar{v}(y) - \bar{v}_0(y)|}{\bar{v}(y)} \approx \tilde{D} \left| \exp[-(K - K_0)|y|] - 1 \right|, \quad \tilde{D} = D / D_0.$$

Под характерным параметром, определяющим протяженность зоны межатомных взаимодействий, будем принимать такое значение величины  $y = \Delta$ , для которого величина относительной поправки является в определенном смысле малой. Вне зоны этих взаимодействий справедливыми являются решения классической теории.

Полагаем, что величина  $\delta(y)$  убывает с ростом переменной  $y$  так же, как силы межатомного взаимодействия. Для приближенной оценки изменчивости сил межатомных взаимодействий использован потенциал этих сил типа Морзе [9]. Тогда можем получить, например, следующее уравнение для определения величины  $\Delta$  [9]:

$$\delta(y) \approx 1 - \tilde{D} \exp[-(K - K_0)|y|] - 1 = \varepsilon_0 \exp[-2\tilde{\alpha}(|y| - d)].$$

Здесь  $\varepsilon_0$ ,  $\tilde{\alpha}$  – параметры тела;  $d$  – равновесное межатомное расстояние [9].

Определяя корень записанного уравнения, получаем приближенную оценку сверху для протяженности зоны межатомных взаимодействий  $\Delta$ . Величина  $\Delta$ , очевидно, связана с параметром модели  $C$ , ибо коэффициент  $K$  записывается через этот параметр. С другой стороны, для вычисления протяженности зоны межатомных взаимодействий  $\Delta$  можно воспользоваться уравнением [9]:

$$b = 2\sqrt{a}(1 + a) \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \sqrt{a} \right), \quad b = \frac{8\mu}{(K + 1)\alpha\sigma_c},$$

где  $\alpha = \Delta / d$ ,  $\mu$  – параметр Ламе,  $K = 3 - 4\nu$ ;  $\sigma_c$  – предел прочности материала на разрыв.

В результате сравнения значений  $\Delta$ , найденных различными способами, нетрудно определить параметр модели  $C$ .

### О поверхностных взаимодействиях

Установлено [11], что в рамках предложенной модели успешно моделируется эффект сверхупругости, проявляющийся в сверхтонких структурах. Для этого оказа-

лось необходимым использовать модель с новыми модулями  $C$  и  $B$ . Постоянная  $B$  при этом определяет интенсивность взаимодействия в поверхностном слое, соответствующих тангенциальным смещениям. Их влияние, вероятно, может быть весьма существенным в тонких однородных и слоистых пленках. Покажем, что природа модуля  $A$  отличается от природы поверхностного натяжения. Пусть  $C = 0$  и  $B = 0$ . Для свободной поверхности среды ( $x = x_0$ ) имеем:

$$\sigma(x_0, y, z) = \mu \frac{\partial R_i}{\partial x_j} n_i n_j + p + AR_k n_k \quad (24)$$

Проинтегрируем соотношение (24). Учтем, что имеет место соотношение:

$$\oint \frac{\partial R_i}{\partial x_j} n_i n_j dF = - \oint \frac{\partial R_i}{\partial x_j} (\delta_{ij} - n_i n_j) dF = -\Delta F.$$

Здесь  $\Delta F$  — относительное изменение площади, свободной от напряжений поверхности жидкости.

Учитываем также следующее равенство для объема холма жидкости, ограниченного плоскостью  $x = x_0$  и поверхностью  $x = R_k n_k$ :  $\int R_k n_k dF = V = hF$ , где  $h$  — высота цилиндра, имеющего тот же объем  $V$  и ту же площадь основания  $F$ .

Тогда получим:

$$0 = -\mu \Delta F + pF + AhF$$

или  $p = \mu \frac{\Delta F}{F} + Ah.$  (25)

Заметим, что для невязкой жидкости ( $\mu = 0$ ) в рамках классической теории ( $A = 0$ ) уравновесить гидростатическое давление нечем. Из уравнения (25) следует, что природа взаимодействия, связанного с  $A$ , отлична от природы поверхностного натяжения в классическом смысле. Обычно поверхностное натяжение принято связывать с изменением свободной от напряжений поверхности, т. е. со слагаемым  $\mu \frac{\Delta F}{F}$ . В связи с этим предлагается трактовать взаимодействия, связанные с модулем  $A$ , как адгезионные. Решение модельной задачи, из которой следует такая трактовка, будет опубликовано в отдельной работе.

### Неинтегрируемые кинематические модели

Значительный интерес с точки зрения тонких структур представляют среды с системой распределенных дефектов [12], для которых не выполняются условия интегрируемости.

Кратко остановимся на алгоритме построения моделей таких сред, являющихся широким обобщением моделей сред, приведенных выше. Здесь кинематика моделей в общем случае определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} - \frac{1}{2} \omega_k \mathcal{E}_{ijk} &= \frac{\partial R_i}{\partial x_j}; \\ \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \gamma_{jm}}{\partial x_n} \mathcal{E}_{nmi} + \frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x_n} \mathcal{E}_{nij} &= -\mathcal{E}_{ij}; \\ \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \gamma_{lm}}{\partial x_k \partial x_n} (\mathcal{E}_{nmi} \mathcal{E}_{lkj} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathcal{E}_{pnm} \mathcal{E}_{plk}) &= \\ &= -\frac{\partial \mathcal{E}_{ij}}{\partial x_k} \mathcal{E}_{jlk} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \frac{\partial \mathcal{E}_{pl}}{\partial x_k} \mathcal{E}_{plk} - \Omega_{ij}; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_q} \left[ \frac{\partial^2 \gamma_{sm}}{\partial x_k \partial x_n} \left( \varepsilon_{nmi} \varepsilon_{isk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \varepsilon_{pnm} \varepsilon_{psk} \right) \right] \varepsilon_{iqj} = \quad (26)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_q} \left[ \frac{\partial \Xi_{is}}{\partial x_k} \varepsilon_{isk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \frac{\partial \Xi_{ps}}{\partial x_k} \varepsilon_{psk} + \Omega_{il} \right] \varepsilon_{iqj} + \Theta_{ij}.$$

Построим возможную работу внутренних сил как работу сил связей на выбранных кинематических связях (26):

$$\begin{aligned} \delta U = & \iiint \left\{ \sigma_{ij} \delta \left[ \gamma_{ij} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} - \frac{1}{2} \omega_k \varepsilon_{ijk} - \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right] + \right. \\ & + m_{ij} \delta \left[ \Xi_{ij} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \gamma_{jm}}{\partial x_n} \varepsilon_{nmi} + \frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x_n} \varepsilon_{nij} \right] + \\ & + b_{ij} \delta \left[ \Omega_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \gamma_{lm}}{\partial x_k \partial x_n} \left( \varepsilon_{nmi} \varepsilon_{lkj} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \varepsilon_{pnm} \varepsilon_{plk} \right) + \frac{\partial \Xi_{il}}{\partial x_k} \varepsilon_{jlk} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \delta_{ij} \frac{\partial \Xi_{pl}}{\partial x_k} \varepsilon_{plk} \right] + t_{ij} \delta \left[ \Theta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_q} \left[ \frac{\partial^2 \gamma_{sm}}{\partial x_k \partial x_n} \left( \varepsilon_{nmi} \varepsilon_{isk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \varepsilon_{pnm} \varepsilon_{psk} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \Xi_{is}}{\partial x_k} \varepsilon_{isk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \frac{\partial \Xi_{ps}}{\partial x_k} \varepsilon_{psk} + \Omega_{il} \right] \varepsilon_{iqj} \right\} dV. \end{aligned} \quad (27)$$

В дальнейшем необходимо выделить интегрируемые части в векторах перемещений  $R_i$ , поворотов  $\omega_i$  и градиента  $\theta$ . Для этого представим решение системы уравнений (27) в виде:

$$R_i = R_i^0 + R_i^\Xi + R_i^\Theta; \quad \omega_i = \omega_i^0 + \omega_i^\Xi + \omega_i^\Theta; \quad \theta = \theta^0 + \theta^\Xi + \theta^\Omega; \quad (28)$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^0 + \gamma_{ij}^\Xi + \gamma_{ij}^\Omega + \gamma_{ij}^\Theta,$$

где  $R_i^0, \omega_i^0, \theta^0, \gamma_{ij}^0$  — общее решение однородной системы (26) при  $\Xi_{ij} = 0, \Omega_{ij} = 0, \Theta_{ij} = 0$ ;

$\omega_i^\Xi, \theta^\Xi, \gamma_{ij}^\Xi$  — частное решение неоднородной системы (26) при  $\Xi_{ij} \neq 0, \Omega_{ij} = 0, \Theta_{ij} = 0$ ;

$R_i^\Omega, \theta^\Omega, \gamma_{ij}^\Omega$  — частное решение неоднородной системы (26) при  $\Xi_{ij} = 0, \Omega_{ij} \neq 0, \Theta_{ij} = 0$ ;

$R_i^\Theta, \omega_i^\Theta, \gamma_{ij}^\Theta$  — частное решение неоднородной системы (26) при  $\Xi_{ij} = 0, \Omega_{ij} = 0, \Theta_{ij} \neq 0$ .

Тогда тензоры несовместностей можно заново определить в виде:

$$\begin{aligned} \Xi_{ij} = & \frac{\partial \omega_i^\Xi}{\partial x_j} - \frac{\partial \gamma_{jm}^\Xi}{\partial x_n} \varepsilon_{nmi} - \frac{1}{3} \frac{\partial \theta^\Xi}{\partial x_n} \varepsilon_{nij}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta^\Omega}{\partial x_i \partial x_j} + \\ & + \frac{\partial^2 \gamma_{lm}^\Omega}{\partial x_k \partial x_n} \left( \varepsilon_{nmi} \varepsilon_{lkj} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \varepsilon_{pnm} \varepsilon_{plk} \right), \\ \Theta_{ij} = & \frac{\partial^3 \gamma_{sm}^\Theta}{\partial x_k \partial x_n \partial x_q} \left( \varepsilon_{nmi} \varepsilon_{isk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \varepsilon_{pnm} \varepsilon_{psk} \right) \varepsilon_{iqj}. \end{aligned}$$

Используя полученные выражения для записи возможной работы сил связей и проведя процедуру интегрирования по частям, получим линейную дифференциальную форму относительно аргументов искомого лагранжиана. Для упрощения не будем явно выписывать статические множители при вариациях аргументов в линейной дифференциальной форме.

Таким образом, список аргументов лагранжиана, записанного относительно фундаментальных кинематических состояний (28), будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta \bar{U} = & \iiint \left\{ (\delta R_i^0 + (\delta R_i^\Omega + (\delta R_i^\Theta + (\delta \omega_i^0 + (\delta \omega_i^\Xi + (\delta \omega_i^\Theta + \right. \\ & + (\delta \theta^0 + (\delta \theta^\Xi + (\delta \theta^\Omega + (\delta \gamma_{ij}^0 + (\delta \gamma_{ij}^\Xi + (\delta \gamma_{ij}^\Omega + (\delta \gamma_{ij}^\Theta + \\ & + (\delta \left[ \frac{\partial \omega_i^\Xi}{\partial x_j} - \frac{\partial \gamma_{jm}^\Xi}{\partial x_n} \varepsilon_{nmi} - \frac{1}{3} \frac{\partial \theta^\Xi}{\partial x_n} \varepsilon_{nij} \right] + \\ & + (\delta \left[ \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta^\Omega}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \gamma_{lm}^\Omega}{\partial x_k \partial x_n} \left( \varepsilon_{nmi} \varepsilon_{lkj} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \varepsilon_{pnm} \varepsilon_{plk} \right) \right] + \\ & + (\delta \frac{\partial^3 \gamma_{sm}^\Theta}{\partial x_k \partial x_n \partial x_q} \left( \varepsilon_{nmi} \varepsilon_{isk} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \varepsilon_{pnm} \varepsilon_{psk} \right) \varepsilon_{iqj} \right\} dV + \{ \} \{ \} dF. \end{aligned}$$

Здесь для краткости не записано выражение возможной работы поверхностных силовых факторов на соответствующих поверхностных кинематических переменных.

Таким образом, список аргументов объемной плотности потенциальной энергии включает в себя пять скаляров  $\theta^0, \theta^\Omega, \theta^\Xi, \Xi_{ij}, \Omega_{ij}$ , семь векторов  $R_i^0, R_i^\Omega, R_i^\Theta, \omega_i^0, \omega_i^\Xi, \omega_i^\Theta, \Xi_{nm}, \varepsilon_{nmi}$  и семь девиаторов  $\gamma_{ij}^0, \gamma_{ij}^\Xi, \gamma_{ij}^\Omega, \gamma_{ij}^\Theta,$

$$\left( \frac{1}{2} \Xi_{ij} + \frac{1}{2} \Xi_{ji} - \frac{1}{3} \Xi_{kk} \delta_{ij} \right), \left( \frac{1}{2} \Omega_{ij} + \frac{1}{2} \Omega_{ji} - \frac{1}{3} \Omega_{kk} \delta_{ij} \right), \left( \frac{1}{2} \Theta_{ij} + \frac{1}{2} \Theta_{ji} - \frac{1}{3} \Theta_{kk} \delta_{ij} \right).$$

Даже если пренебречь поверхностной плотностью потенциальной энергии деформации и перекрестными членами в объемной плотности потенциальной энергии деформации, квадратичный по выявленным аргументам лагранжиан будет содержать девятнадцать (5 + 7 + 7) физических постоянных. Эти постоянные дают принципиальную возможность описать не только упругие свойства твердых тел, но и их когезионные и адгезионные свойства. Предложенные общие модели могут являться основой для построения прикладных моделей несингулярных трещин, моделей поверхностных слоев материалов, покрытий и тонких пленок [12]. Кинематические соотношения (26) и введенные тензоры несовместности позволяют моделировать явления, аналогичные явлениям турбулентности и кавитации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Vilms F., Kerps D. Simple stress formula for multilayered thin films on a thick substrate // Journal of applied Physics. 1982. № 3.
2. Huang N. C. On the size of the cohesive zone at the crack tip // Journal of applied Mechanics. 1985. № 6.
3. Hardwick D. A. Механические свойства тонких пленок // Обзор. Thin solid films, 1-2, 1987.
4. Menter J. W. and Pashley D. W. In Neugebauer C. A., Newkirk J. D. and Vermilyca D. A. (eds.) Structure and Properties of Thin Films. Wiley - New York. 1959. P. 111.
5. Лурье С. А., Белов П. А., Орлов А. П. Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые приложения // Механика композиционных материалов и конструкций, 1996. Т. 2. № 2. С. 84-104.

6. Образцов И. Ф., Лурье С. А., Белов П. А. Об обобщенных разложениях в прикладной теории упругости и их приложения к конструкциям из композитов // Там же. 1997. № 3. С. 62–79.
7. Белов П. А., Лурье С. А. Модели деформирования твердых тел и их аналоги в теории поля // Механика твердого тела. Изв. РАН, 1998. № 3. С. 157–166.
8. Лурье С. А., Белов П. А., Яновский Ю. Г. О моделировании когезионных взаимодействий в сплошных средах. Современные проблемы механики гетерогенных сред // Сб. тр. института прикладной механики РАН. К десятилетию основания института. — М.: Изд-во РАН, 2000. (В печати).
9. Морозов Н. Ф., Паукшто М. В. Дискретные и гибридные модели механики разрушения. — С.-Петербург: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1995.
10. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. — М.: Наука, 1993.
11. Лурье С. А., Белов П. А., Яновский Ю. Г., Образцов И. Ф. К теории тонких пленок // Механика композиционных материалов и конструкций. 1999. Т. 5. № 3. С. 48–60.
12. Панин В. Е. Физическая мезомеханика поверхностных слоев твердых тел // Физическая мезомеханика. 1999. № 2. Т. 6. С. 5–23.

*Авторы благодарят академика Ивана Филипповича Образцова за внимание к данным исследованиям и поддержку.*

## About some classes of the thin structure models

S. A. LURIE, P. A. BELOV  
*Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, Russia*

I. I. KRIVOLUTSKAYA  
*Moscow State Aviation Institute (Technical University), Russia*

*The attempt of construction of the variant of the linear theory of thin films is made in this paper. The kinematical relations are entered, the defining relations are set and the corresponding boundary value problem is stated. The basis of the research is the model of a medium that supposes elastic interactions between points of a medium similar to force interactions, caused by Winkler's springs, and also elastic interactions on a body surface that correspond to tangential and normal displacement on a surface of a medium. The model takes into account a scale factor  $l$  and, hence, assumes the account of the absolute dimension of the investigated field. The account of new modulus of elasticity becomes essential when even one of the overall dimensions of the examined body is commensurable with the reference scale factor  $l$ . Thus, the variant of the theory of thin films is offered which is constructed within the framework of unified generalized model of a medium, without engaging special model.*

