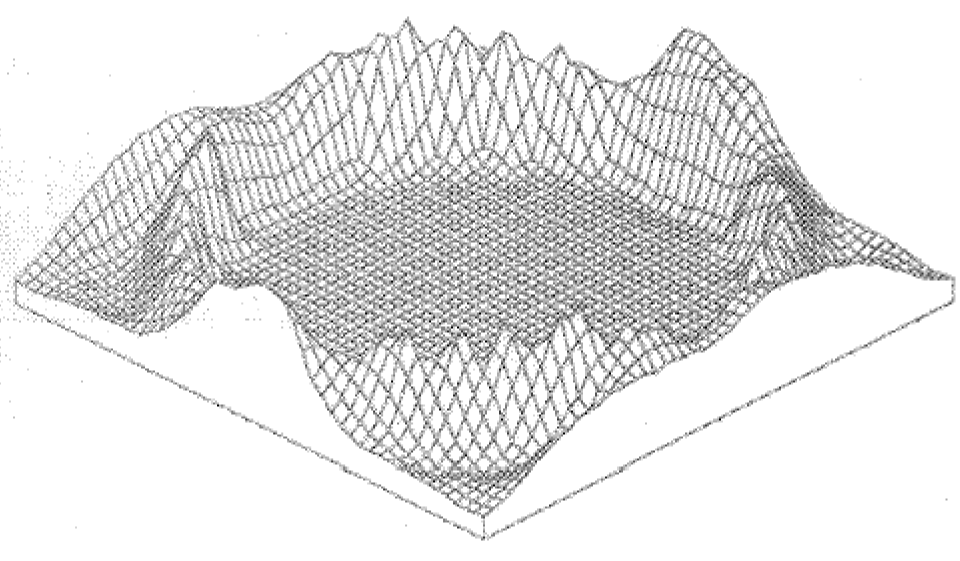
Грант РФФИ № 00-01-00393

ИЗДАНИЕ
ИПРИМ РАН

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

АПРЕЛЬ-ИЮНЬ 2001
ТОМ 7, №2



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

С учетом введенных тензоров Γ_{injm} и S_{ijk} соотношения Коши (2) для 4-пространства будут иметь вид:

$$\varepsilon_{ij} = \gamma_{nm}\Gamma_{injm} + \frac{1}{3}\theta(\delta_{ij} - N_i N_j) + 2s_k S_{ijk} + sN_i N_j \tag{3}$$

3. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Используя "кинематический подход" [6-9], запишем:

$$\delta A - \delta\overline{U} = 0 \tag{4}$$

Здесь $\delta\overline{U}$ - возможная работа сил реакции кинематических связей.

Полагаем, что единственными кинематическими связями являются соотношения Коши (3), обобщенные на 4-пространство событий. Запишем выражение принципа возможной работы внутренних сил, пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа:

$$\delta\overline{U} = \int\limits_V \sigma_{ij}\delta(\gamma_{nm}\Gamma_{injm} + \frac{1}{3}\theta(\delta_{ij} - N_i N_j) + 2s_k S_{ijk} + sN_i N_j - \frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i})\,dV$$

где σ_{ij} - силы реакции, обеспечивающие выполнение связей (3), интеграл берётся по 4-объёму V. На основе этих соотношений запишем выражение для вариации возможной работы внутренних сил и установим систему ее свободных аргументов. Взяв в выражении $\delta\overline{U}$ последние два произведения по частям, получим

$$\begin{aligned}
\delta\overline{U} = \int\limits_v \{&\sigma_{ij}\Gamma_{injm}\delta\gamma_{nm} + \\
&+ 2\sigma_{ij}S_{ijk}\delta s_k + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta r_i + \\
&+ \frac{1}{3}\sigma_{ij}(\delta_{ij} - N_i N_j)\delta\theta + \sigma_{ij}N_i N_j\delta s + i\nu\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}N_i\delta R\}dV - \\
&- \oint[\sigma_{ij}n_j\delta r_k(\delta_{ki} - n_k n_i) + \sigma_{ij}n_i n_j\delta(r_k n_k) + (i\nu\sigma_{ij}N_i n_j)\delta R]dF
\end{aligned} \tag{5}$$

Вариация (5) представима объёмной и поверхностной плотностями, являющимися соответственно функциями 14 обобщённых переменных $\gamma_{nm};s_k;r_k;s;\theta;R$ и 4 обобщённых поверхностных переменных $r_k(\delta_{ki} - n_k n_i);r_k n_k;R$. Эта вариация может быть как интегрируемой, так и не интегрируемой. Если она интегрируема, то существует функционал U (U - потенциальная энергия). Имеем:

$$U = \int\limits_v U_V(\gamma_{nm};s_k;r_k;s;\theta;R)dV + \oint U_F(r_k(\delta_{ki} - n_k n_i);r_k n_k;R)dF$$

$$\frac{\partial U_V}{\partial\gamma_{nm}} = \sigma_{ij}\Gamma_{injm},\quad \frac{\partial U_V}{\partial s_k} = 2\sigma_{ij}S_{ijk},\quad \frac{\partial U_V}{\partial r_k} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}(\delta_{ik} - N_i N_k) \tag{6}$$

$$\frac{\partial U_V}{\partial s} = \sigma_{ij}N_i N_j,\quad \frac{\partial U_V}{\partial\theta} = \frac{1}{3}\sigma_{ij}(\delta_{ij} - N_i N_j),\quad \frac{\partial U_V}{\partial R} = i\nu\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}N_i$$

$$\frac{\partial U_F}{\partial \delta r_k(\delta_{ki} - n_k n_i)} = \sigma_{ij} n_j (\delta_{qi} - n_q n_i)$$

$$\frac{\partial U_F}{\partial r_k n_k} = \sigma_{ij} n_i n_j \tag{7}$$

$$\frac{\partial U_F}{\partial R} = i\nu\sigma_{ij} N_i n_j$$

При заданных плотностях энергии δU_V, δU_F соотношения (7) дают систему определяющих уравнений среды.

Если вариационная форма неинтегрируема, то множители при вариациях определяющих параметров в линейной форме $\delta\overline{U}$ не выражаются через производные от некоторого потенциала и являются просто некоторыми непрерывными функциями определяющих параметров. Поэтому в общем случае можно записать:

$$\delta\overline{U} = \delta \int_V U_V(\gamma_{nm}; s_k; r_k; s; \theta; R)dV + \delta \oint_F U_F(r_k(\delta_{ki} - n_k n_i); r_k n_k; R)dF +$$
$$+ \int_V [A_{ij}(\gamma_{nm}; s_k; r_k; s; \theta; R)\delta \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + A_i(\gamma_{nm}; s_k; r_k; s; \theta; R)\delta R_i]dV +$$
$$+ \oint_F B_i(r_k(\delta_{ki} - n_k n_i); r_k n_k; R)\delta R_i dF \tag{8}$$

Вариационный принцип (4) для описания необратимых процессов может быть тогда записан в виде, совпадающем с вариационным подходом Л.И. Седова:

$$\delta I + \delta W + \delta W^* = 0 \tag{9}$$

где $I = A_V - U_V$ - разность работы внешних сил и потенциальной энергии деформации, полученная путем интегрирования соответствующих плотностей по объему пространства событий V, занимаемого средой; $W = A_F - U_F$ - разность работы внешних сил и потенциальной энергии деформации, полученная путем интегрирования соответствующих плотностей по гиперповерхности F, ограничивающей объем пространства событий V; δW^* - линейная форма относительно вариаций определяющих параметров, которая может содержать как интегралы по объему, так и по гиперповерхности пространства событий, занимаемого средой.

Развиваемый в данной работе "кинематический" вариационный принцип (4) отличается от вариационного подхода Л.И. Седова тем, что списки аргументов в $\delta I; \delta W; \delta W^*$ жестко фиксированы выбором кинематических связей (3). Поэтому, например, если $I = I(\gamma_{nm}; s_k; r_k; s; \theta; R)$, то W не может зависеть от нормальных производных 4-вектора перемещений $\frac{\partial R_i}{\partial x_j} n_j$. Мы считаем эту "жесткость" в выборе аргументов функционалов несомненным достоинством развиваемого в данной работе "кинематического" вариационного принципа (4). Запишем вариационное равенство в развернутой форме:

$$\begin{aligned}
&\delta A-\delta\overline{U}= \\
&=\delta\int_V [X_iR_i-U_V(\gamma_{nm};s_k;r_k;s;\theta;R)]dV+ \\
&+\delta\oint_F [Y_iR_i-U_F(r_k(\delta_{ki}-n_kn_i);r_kn_k;R)]dF+ \\
&+\int_V [A_{ij}(\gamma_{nm};s_k;r_k;s;\theta;R)\delta\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+A_i(\gamma_{nm};s_k;r_k;s;\theta;R)\delta R_i]dV+ \\
&+\oint_F B_i(r_k(\delta_{ki}-n_kn_i);r_kn_k;R)\delta R_i dF= \\
&=\delta I+\delta W+\delta W^*
\end{aligned}$$

Здесь:

$I=\int_V [X_iR_i-U_V(\gamma_{nm};s_k;r_k;s;\theta;R)]dV$ - объемный функционал для обратимых процессов,

$W=\oint_F [Y_iR_i-U_F(r_k(\delta_{ki}-n_kn_i);r_kn_k;R)]dF$ - гиперповерхностный функционал для обратимых процессов,

$\delta W^*=\int_V [A_{ij}(\gamma_{nm};s_k;r_k;s;\theta;R)\delta\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+A_i(\gamma_{nm};s_k;r_k;s;\theta;R)\delta R_i]dV+$ линейная $+\oint_F B_i(r_k(\delta_{ki}-n_kn_i);r_kn_k;R))\delta R_i dF$

вариационная форма, учитывающая необратимые процессы.

По определению, величина δW^* является неинтегрируемым выражением и может быть записана лишь как линейная форма относительно вариаций своих аргументов. Вернемся к форме (5) и запишем ее в следующем виде:

$$\delta\overline{U}=\int_V P_a(Q_b)\delta Q_a dV+\oint_F p_d(q_f)\delta q_d dF \tag{10}$$

Мульти-индексы a, b и c пробегают значения от 1 до 14 (по числу определяющих параметров $\gamma_{nm};s_k;r_k;s;\theta;R$ в объемной части линейной формы (5)), а мульти-индексы d, f и g пробегают все значения от 1 до 4 (по числу определяющих параметров $r_k(\delta_{ki}-n_kn_i);r_kn_k;R$ в гиперповерхностной части линейной формы (5)).

Условия неинтегрируемости формы (5) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P_a}{\partial Q_b}-\frac{\partial P_b}{\partial Q_a}=2\overline{C}_{ab}(Q_c) &\qquad& \frac{\partial p_d}{\partial q_f}-\frac{\partial p_f}{\partial q_d}=2\overline{D}_{df}(q_g) \\
&\overline{C}_{ba}=-\overline{C}_{ab} && \overline{D}_{fd}=-\overline{D}_{df}
\end{aligned} \tag{11}$$

Последние равенства можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial P_a}{\partial Q_b}=C_{ab}(Q_c)+\overline{C}_{ab}(Q_c) \qquad \frac{\partial p_d}{\partial q_f}=D_{df}(q_g)+\overline{D}_{df}(q_g)$$

где $C_{ab}=C_{ba}$ - тензор упругих модулей голономной части.

Для физически линейных моделей тензоры термомеханических свойств C_{ab}, $\overline{C}_{ab}$ и D_{df}, $\overline{D}_{df}$ не зависят от определяющих параметров Q_c и q_g. Поэтому путем прямого интегрирования (11) можно получить:

$$P_a = (C_{ab} + \overline{C}_{ab})Q_b \qquad p_d = (D_{df} + \overline{D}_{df})q_f \tag{12}$$

Имея ввиду определяющие соотношения (12), перепишем (10) в виде:

$$\begin{aligned}
\delta\overline{U} &= \int P_a \delta Q_a dV + \oint p_d \delta q_d dF = \\
&= \int (C_{ab} + \overline{C}_{ab})Q_b \delta Q_a dV + \oint (D_{df} + \overline{D}_{df})q_f \delta q_d dF = \\
&= \int (C_{ab}Q_b\delta Q_a + \overline{C}_{ab}Q_b\delta Q_a)dV + \oint (D_{df}q_f\delta q_d + \overline{D}_{df}q_f\delta q_d)dF = \\
&= \int [\frac{1}{2}C_{ab}(Q_b\delta Q_a + Q_a\delta Q_b) + \frac{1}{2}\overline{C}_{ab}(Q_b\delta Q_a - Q_a\delta Q_b)]dV + \\
&+ \oint [\frac{1}{2}D_{df}(q_f\delta q_d + q_d\delta q_f) + \frac{1}{2}\overline{D}_{df}(q_f\delta q_d - q_d\delta q_f)]dF = \\
&= \delta\int \frac{1}{2}C_{ab}Q_aQ_b dV + \delta\oint \frac{1}{2}D_{df}q_dq_f dF + \\
&+ \int [\frac{1}{2}\overline{C}_{ab}(Q_b\delta Q_a - Q_a\delta Q_b)]dV + \oint [\frac{1}{2}\overline{D}_{df}(q_f\delta q_d - q_d\delta q_f)]dF
\end{aligned}$$

Сравнивая последнее равенство с вариационным уравнением Л.И.Седова, для физически линейных неголономных сред, в которых реализуются кинематические связи, выраженные соотношениями Коши (3), получим общий вид функционалов в основном вариационном равенстве(9):

$$\begin{aligned}
I &= \int_V [X_i R_i - \frac{1}{2}C_{ab}Q_aQ_b]dV \\
W &= \oint_F [Y_i R_i - \frac{1}{2}D_{df}q_dq_f]dF \\
\delta W^* &= \int [\frac{1}{2}\overline{C}_{ab}(Q_b\delta Q_a - Q_a\delta Q_b)]dV + \oint [\frac{1}{2}\overline{D}_{df}(q_f\delta q_d - q_d\delta q_f)]dF
\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом доказаны следующие утверждения:

1. Для физически линейных обратимых процессов плотность энергии U_V является квадратичной формой обобщённых переменных $Q_a \sim \gamma_{nm}; s_k; r_k; s; \theta; R$, записанной с учётом тензорной размерности последних. В результате, для линейно упругих моделей сред с кинематическими связями (3) имеют место следующие определяющие уравнения в 4-объёме:

$$\begin{aligned}
U_V &= \frac{1}{2}[2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + \\
&+ 4Gs_ks_k + iv2G_1s_kr_k + Cr_kr_k + \\
&+ (\frac{2\mu}{3} + \lambda)\theta^2 + 2\Lambda\theta s + Es^2 + iv2E_1s(ivR) + E_2(ivR)^2 + iv2\Lambda_1\theta(ivR)]
\end{aligned}$$

Плотностью потенциальной энергии полностью определяется консервативная часть в определяющих соотношениях модели среды (6):

$$\sigma_{ij} = \{2\mu\Gamma_{injm} + (\frac{2\mu}{3} + \lambda)(\delta_{ij} - N_i N_j)(\delta_{nm} - N_n N_m) +$$
$$+ 4GS_{ijk}S_{nmk} + \Lambda[N_i N_j(\delta_{nm} - N_n N_m) + N_n N_m(\delta_{ij} - N_i N_j)]$$
$$+ EN_n N_m N_i N_j\}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + iv\{\Lambda_1(\delta_{ij} - N_i N_j)N_n + E_1 N_i N_j N_n + 2G_1 S_{ijn}\}R_n =$$
$$= C_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C_{ijn}R_n$$
$$\sigma_i = iv\{\Lambda_1(\delta_{nm} - N_n N_m)N_i + E_1 N_n N_m N_i + 2G_1 S_{nmi}\}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} +$$
$$+ \{C(\delta_{in} - N_i N_n) + E_2 N_i N_n)R_n = \qquad (14)$$
$$= C_{nmi}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C_{in}R_n$$

2. Для физически линейных обратимых процессов плотность поверхностной энергии U_F является квадратичной формой обобщённых переменных q_d - $r_k(\delta_{ki} - n_k n_i); r_k n_k; R$, записанной с учётом тензорной размерности последних:

$$U_F = \frac{1}{2}[Br_i r_j(\delta_{ij} - n_i n_j) + A(ivR)^2 + 2A_1(ivR)(r_i n_i) + A_2(r_i n_i)^2]$$

Плотностью поверхностной потенциальной энергии полностью определяется консервативная часть в определяющих соотношениях модели среды на гиперповерхности. В результате, для линейно упругих моделей сред с кинематическими связями (3), наряду с соотношениями (14), имеют место следующие определяющие уравнения на гиперповерхности (7):

$$f_i = [B(\delta_{nj} - N_n N_j)(\delta_{mi} - N_m N_i)(\delta_{mj} - n_m n_j) +$$
$$+ A_2(\delta_{nj} - N_n N_j)(\delta_{mi} - N_m N_i)n_m n_j + \qquad (15)$$
$$+ A_1(N_n n_k(\delta_{ki} - N_k N_i) + N_i n_k(\delta_{kn} - N_k N_n)) +$$
$$+ AN_n N_i]R_n$$

3. Для физически линейных необратимых процессов неинтегрируемая форма δW^* с учётом соотношений (7) определяет общий вид неголономных напряжений A_{ij} и сил A_i и B_i. В результате, для линейно упругих моделей сред с кинематическими связями (3) в общем случае имеют место определяющие уравнения в 4-объёме и на ограничивающей его гиперповерхности:

$$P_a = \overline{C}_{ab}Q_b \qquad p_d = \overline{D}_{df}q_f \qquad (16)$$

Далее будем рассматривать определяющие уравнения для неголономной части в 4-объёме моделируемой среды, а на ограничивающей его гиперповерхности диссипативными членами пренебрежем. Это делается только лишь с целью сокращения объема изложения.

Для объемной плотности линейной формы δW^* после некоторых преобразований и группировки подобных слагаемых, получим:

$$
\begin{aligned}
\delta W^* &= \int [\tfrac{1}{2}\overline{C}_{ab}(Q_b \delta Q_a - Q_a \delta Q_b)] dV = \\
&= \int \{[\overline{\Lambda}[N_n N_m(\delta_{ij} - N_i N_j) - (\delta_{nm} - N_n N_m) N_i N_j] \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - \\
&- iv[\overline{\Lambda}_1(\delta_{ij} - N_i N_j) N_n + \overline{E}_1 N_i N_j N_n + 2\overline{G}_1 S_{ijn}] R_n\} \delta \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \\
&+ iv[\overline{\Lambda}_1(\delta_{nm} - N_n N_m) N_i + \overline{E}_1 N_n N_m N_i + 2\overline{G}_1 S_{nmi}] \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \delta R_i\} dV = \\
&= \int \{(\overline{C}_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - \overline{C}_{ijn} R_n) \delta \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \overline{C}_{nmi} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \delta R_i\} dV
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Соответственно для моделируемых неголономных сред определяющие соотношения с учетом введенных тензоров термомеханических свойств $\overline{C}_{ijnm}$ и $\overline{C}_{ijn}$ записываются с помощью обобщенных соотношений Грина и имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial R_{ij}} + (\overline{C}_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - \overline{C}_{ijn} R_n) = \\
&= (C_{ijnm} + \overline{C}_{ijnm}) \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + (C_{ijn} - \overline{C}_{ijn}) R_n = \\
&= \{\mu(\delta_{in} - N_i N_n)(\delta_{jm} - N_j N_m) + \mu(\delta_{im} - N_i N_m)(\delta_{jn} - N_j N_n) + \\
&+ \lambda(\delta_{ij} - N_i N_j)(\delta_{nm} - N_n N_m) + \\
&+ G N_n N_i (\delta_{jm} - N_j N_m) + G N_m N_i (\delta_{jn} - N_j N_n) + \\
&+ G N_n N_j (\delta_{im} - N_i N_m) + G N_m N_j (\delta_{in} - N_i N_n) + \\
&+ (\Lambda + \Lambda) N_n N_m (\delta_{ij} - N_i N_j) + (\Lambda - \Lambda) N_i N_j (\delta_{nm} - N_n N_m) + \\
&+ E N_n N_m N_i N_j\} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + \\
&+ iv\{(\Lambda_1 - \Lambda_1)(\delta_{ij} - N_i N_j) N_n + (E_1 - E_1) N_i N_j N_n + \\
&+ (G_1 - G_1) N_i (\delta_{nj} - N_n N_j) + (G_1 - G_1) N_j (\delta_{ni} - N_n N_i)\} R_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_i &= \frac{\partial U_V}{\partial R_i} + C_{nmi} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} = \\
&= (C_{nmi} + C_{nmi}) \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C_{in} R_n = \\
&= iv\{(\Lambda_1 + \Lambda_1)(\delta_{nm} - N_n N_m) N_i + (E_1 + E_1) N_n N_m N_i + \\
&+ (G_1 + G_1) N_n (\delta_{im} - N_i N_m) + (G_1 + G_1) N_m (\delta_{in} - N_i N_n)\} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + \\
&+ [C(\delta_{in} - N_i N_n) + E_2 N_i N_n)] R_n \\
f_i &= \frac{\partial U_V}{\partial R_i}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Попытаемся выяснить смысл четвертой компоненты "перемещений" и соответствующих компонент "напряжений". Рассмотрим выражение, определяющее плотность потенциальной энергии. С учетом (1) имеем:

$$\sigma_{ij}\delta\frac{\partial R_i}{\partial x_j}=\sigma_{ij}(\delta_{in}-N_iN_n)(\delta_{jm}-N_jN_m)\delta\frac{\partial r_n}{\partial x_m}+\sigma_{ij}N_j\delta\frac{\dot{r}_i}{iv}+$$
$$+\sigma_{ij}N_i\delta\frac{\partial(R_kN_k)}{\partial x_m}(\delta_{jm}-N_jN_m)+\sigma_{ij}N_jN_i\delta\frac{\partial R_n}{\partial x_m}N_nN_m \tag{19}$$

В записанном выражении первое слагаемое точно совпадает с вариацией потенциальной энергии деформации среды, рассматриваемой в трёхмерном представлении $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\quad(i,j=1,3)$. Четвертое слагаемое может быть записано в виде $\sigma_{44}\delta\varepsilon_{44}$. Сравним первое и четвертое слагаемые в правой части записанного равенства (19) с правой частью первого закона термодинамики $dU=\sigma_{ij}de_{ij}+TdS$, ($U$ - плотность внутренней энергии системы, T - абсолютная температура, S - плотность энтропии [10]). Такое сравнение позволяет дать физическую интерпретацию компоненте тензора «деформаций» ε_{44} $(\varepsilon_{44}=\frac{\partial R_n}{\partial x_m}N_nN_m)$ и компоненте тензора «напряжений» σ_{44} $(\sigma_{44}=\sigma_{ij}N_iN_j)$. Действительно, можно принять, что выражение $\sigma_{ij}N_iN_j\delta\frac{\partial R_n}{\partial x_m}N_nN_m=\sigma_{44}\delta\varepsilon_{44}=T\delta S$ представляет собой изменение внутренней энергии, связанное с обратимыми тепловыми процессами. Тогда σ_{44} имеет смысл абсолютной температуры, а $\dot{R}$ - энтропии. Второе и третье слагаемые в (19) можно трактовать как приращение внутренней энергии за счет связанных динамических термоупругих процессов.

Вернемся к определяющим соотношениям (18). Из них, в частности, следуют равенства:

$$\begin{aligned}
&p=\frac{1}{3}\sigma_{ij}(\delta_{ij}-N_iN_j)=\\
&=[(2\mu+\lambda)(\delta_{nm}-N_nN_m)+(\Lambda+\bar{\Lambda})N_nN_m]\frac{\partial R_n}{\partial x_m}+iv(\Lambda_1-\bar{\Lambda}_1)N_nR_n=\\
&=(2\mu+\lambda)\theta+(\Lambda+\bar{\Lambda})\dot{R}-(\Lambda_1-\bar{\Lambda}_1)v^2R\\
&T=\sigma_{ij}N_iN_j=\\
&=[(\Lambda-\bar{\Lambda})(\delta_{nm}-N_nN_m)+EN_nN_m]\frac{\partial R_n}{\partial x_m}+iv(E_1-\bar{E}_1)N_nR_n=\\
&=(\Lambda-\bar{\Lambda})\theta+E\dot{R}-(E_1-\bar{E}_1)v^2R
\end{aligned} \tag{20}$$

Пусть мы находимся в условиях "плоской" задачи относительно величины R ($R\equiv 0$). Тогда из (20) непосредственно получим известные определяющие уравнения на шаровой тензор напряжений и температуру

$$p=\frac{1}{3}\sigma_{ij}(\delta_{ij}-N_iN_j)$$
$$T=(\Lambda-\bar{\Lambda})\theta$$

В общем случае, если из уравнений (20) исключить величины R и $\dot{R}$, то получим уравнение, описывающее комбинированную модель ползучести и релаксации для канонической пары θ и p. Это уравнение можно записать следующим образом:

$$\alpha_1 p + \alpha_2 \dot{p} = \beta_1 \theta + \beta_2 \dot{\theta} + \xi_1 T + \xi_2 \dot{T},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \xi_1, \xi_2$ - некоторые физические постоянные модели, выраженные через физические постоянные, введенные ранее.

Для полного математического анализа модели следует получить систему разрешающих уравнений и систему естественных краевых условий (начально-краевых условий). Следуя "кинематическому" вариационному принципу (4), получим в общем случае следующую систему основных уравнений и граничных условий

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \sigma_i + X_i\right)\delta R_i dV + \int_F (Y_i - \sigma_{ij} n_j - f_i)\delta R_i dF = 0 \qquad (21)$$

Здесь: n_j - вектор нормали к гиперповерхности F, R_i - 4-вектор перемещений, X_i - 4-вектор объемных сил, Y_i - 4-вектор гиперповерхностных сил.

Подынтегральное выражение в первом слагаемом равенства (21) даёт связную систему уравнений, включающую 3-и уравнений динамики сплошной среды при необратимом деформировании и обобщённое уравнение теплопроводности. Второй интеграл в уравнении (21) может быть записан в иной форме с учётом разложения (1). В результате могут быть получены естественные граничные условия и начальные условия исследуемой проблемы. Действительно, представляя гиперповерхностный интеграл в виде суммы интегралов:

$$\oiiint (Y_i - \sigma_{ij} n_j - f_i)\delta R_i dF =$$
$$= \int \oiint (Y_i - \sigma_{ij} n_j - f_i)\delta R_i df d(ivt) + \iiint (Y_i - \sigma_{ij} n_j - f_i)\delta R_i dV_3 \Big|_{t=t_0}^{t=t_1}$$

можно выделить явно краевую задачу (первый интеграл) и начальную (второй интеграл), если удастся свести краевую задачу по времени к задаче Коши.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе показано, что возможно обобщение кинематического вариационного принципа на неголономные среды. Получены следующие результаты:

1. Установлен общий вид физически нелинейных определяющих соотношений для неголономных внутренних напряжений и сил (11), которые являются условиями неинтегрируемости возможной работы внутренних силовых факторов - A_{ij}, A_i, B_i.
2. Для физически линейных неголономных сред получены определяющие соотношения общего вида (16). Показано, что консервативная часть определяющих соотношений строится с помощью симметричных по мульти-индексам тензоров термомеханических свойств среды, тогда как неголономная часть определяющих уравнений строится с помощью антисимметричных по мульти-индексам тензоров термомеханических свойств.
3. Записано вариационное уравнение для неголономных линейных сред. Получено общее представление для составляющих в вариационном уравнении, соответствующих консервативному и неконсервативному

процессам (13). Сформулирована соответствующая краевая (начально-краевая) задача (21).

4. Как частный случай из определяющих соотношений получена комбинированная модель ползучести и релаксации для канонической пары θ и p.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л.И., Об основных концепциях механики сплошной среды, в кн. «Некоторые проблемы математики и механики», Изд. Сибирск. Отд. АН СССР, Новосибирск, 1961, с.227-235.
2. Седов Л.И., Математические методы построения новых моделей сплошных сред, Успехи мат. наук, 1965, т.20, вып.5, с.121-180.
3. Седов Л.И., Эглит М.Э., Построение неголономных моделей сплошных сред с учётом конечности деформаций и некоторых физико-химических эффектов, ДАН, 1962, т.142, №1, с.54-57.
4. Бердичевский В.Л., Вариационные методы построения моделей сплошных сред с необратимыми процессами в специальной теории относительности, ПММ, 1966, т.30, вып.6, с.1081-1086.
5. Бердичевский В.Л., Построение моделей сплошных сред при помощи вариационного принципа, ПММ, 1966, т.30, вып.3, с.510-530.
6. Лурье С.А., Белов П.А., Модели деформирования твёрдых тел и их аналогии в теории поля, МТТ, №3, 1998, с.157-166.
7. Образцов И.Ф., Лурье С.А. Белов П.А. Об обобщенных разложениях в прикладной теории упругости и их приложения к конструкциям из композитов. Механика композиционных материалов и конструкций, 1997, №3, с.62-79.
8. Образцов И.Ф., Лурье, С.А., Яновский Ю.Г., Белов П.А. О некоторых классах моделей тонких структур. Изв. Вузов, Северо-Кавказский регион, Естеств. Науки, Ростов-на-Дону, 2000, №3, с.110-118.
9. .Лурье С.А., Белов П.А., Криволуцкая И.И. Об одной модели когезионных взаимодействий в сплошных средах. Конструкции из композиционных материалов, М., ВИМИ, 2000, №2, с.29-40.
10. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости, М., Наука, 1969, 336с.

Поступила в редакцию 2 апреля 2001 года.