

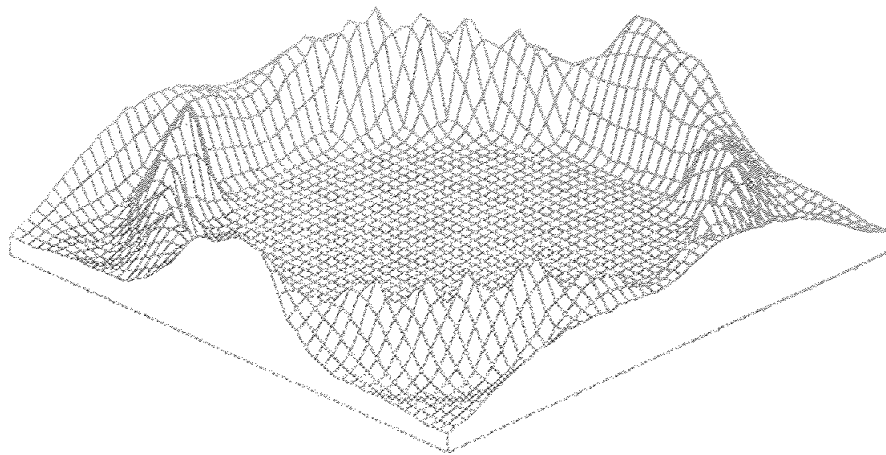
ISSN 1029-6670



ИЗДАНИЕ  
ИПРИМ РАН

# МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

ОКТАБРЬ-ДЕКАБРЬ 2002  
ТОМ 8, №4



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

**Описание реологических свойств электрореологических жидкостей на основе много частичной, упорядоченной, трехмерной модели**

Згаевский В.Э., Яновский Ю.Г., Карнет Ю.Н..... 577

**О моделировании масштабных эффектов в тонких структурах**

Белов П.А., Бодунов А.М., Лурье С.А., Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г..... 585

## О МОДЕЛИРОВАНИИ МАСШТАБНЫХ ЭФФЕКТОВ В ТОНКИХ СТРУКТУРАХ<sup>1</sup>

Белов П.А., Бодунов А.М.\* , Лурье С.А., Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г.

*Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

*\*Московский государственный автомеханический институт (МАМИ), г. Москва, Россия*

### РЕЗЮМЕ

В работе моделируется деформирование тонких пленок на основе двух вариантов неклассических моделей механики сплошных сред, учитывающих масштабные эффекты. Первая модель, так называемая «базисная» модель [1]. Она описывает упругие взаимодействия, аналогичные взаимодействиям, определяемым распределенными по объему винклеровскими пружинками с жесткостью  $C$ . Вторая модель – «модель когезионного поля», является модифицированным вариантом моментных теорий [2-6]. В этом варианте теории, наряду с кривизнами  $\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$ , в лагранжиане учитываются кривизны  $\frac{\partial \theta}{\partial x_j}$ . Система

уравнений в такой модели допускает представление решения в перемещениях в форме суперпозиции «классического» и «когезионного» решений («классического» и «когезионного» перемещений). «Когезионное» перемещение удовлетворяет той же системе уравнений равновесия, что и «базисная» модель.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Целью этой работы является исследование аномального увеличения жесткости сверхтонких (нано) слоев и как следствие – разрушение нанослоя при заданной деформации. Этот эффект имеет место при тиснении голограмм и резке голографической фольги и не может быть объяснен в рамках классических представлений. Для построения определяющих соотношений используется общий вариационный подход, который авторы называют «кинематическим» вариационным подходом [1]. По заданным кинематическим связям находится вид функционала энергии для линейно упругой среды и устанавливается характер силовых взаимодействий, соответствующих введенным кинематическим связям. В качестве таковых связей для «базисной» модели берется выражение для несимметричного тензора дисторсии, а для «модели когезионного поля» – неоднородные уравнения Папковича. Используемый алгоритм построения моделей сред приведен в работах [7-11].

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант N 00-01-00393).

## 2. ФОРМУЛИРОВКА «БАЗИСНОЙ» МОДЕЛИ И РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Несимметричные соотношения Коши рассматриваются как кинематические связи между двенадцатью зависимыми степенями свободы произвольного бесконечно малого параллелепипеда среды

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} - \omega_k \mathcal{E}_{ijk} \quad (1)$$

где  $R_i$  - компоненты вектора перемещений,  $\gamma_{ij}$  и  $\theta$  - компоненты тензора девиатора деформаций и шарового тензора соответственно,  $\omega_k$  - компоненты вектора линейных поворотов,  $\mathcal{E}_{ijk}$  - тензор Леви-Чевиты.

Используя процедуру «кинематического» вариационного подхода можно установить список аргументов в объемной и поверхностной плотностях потенциальной энергии

$$U = \iiint_V W_V(\gamma_{ij}, \theta, \omega_k, R_i) dV + \iint_F W_F(R_i) dF.$$

Полагая физическую линейность исследуемой среды, а, следовательно, и квадратичность плотности потенциальной энергии относительно аргументов  $\gamma_{ij}$ ,  $\theta$ ,  $\omega_k$ ,  $R_i$  и учитывая тензорную размерность этих переменных, получаем

$$W_V = \mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{1}{6} (2\mu + 3\lambda) \theta^2 + 2\chi \omega_k \omega_k + 2D \omega_k R_k + \frac{1}{2} C R_i R_i \\ W_F = 1/2 A R_i R_i n_i n_i + 1/2 B R_i R_i (\delta_{ij} - n_i n_j) = 1/2 B_{ij} R_i R_j \quad (2)$$

Так как внутренние силовые факторы находятся как производные от потенциальной энергии (2) по обобщенным кинематическим переменным, получаем, что модель сплошной среды, обусловленная соотношениями (1) допускает существование внутри объема внутренних силовых факторов типа напряжений  $\sigma_{ij} = \partial W_V / \partial R_{i,j}$  и объемных сил  $\sigma_i = \partial W_V / \partial R_i$ , а на поверхности - внутренних поверхностных сил  $f_i = \frac{\partial W_F}{\partial R_i}$ .

$$\sigma_{ij} = \mu (R_{i,j} + R_{j,i}) + \lambda R_{k,k} \delta_{ij} + \chi (R_{i,j} - R_{j,i}) - D R_k \mathcal{E}_{ijk} \quad (3)$$

$$\sigma_k = C R_k + 2D \omega_k \quad (4)$$

На поверхности исследуемого тела справедливы следующие физические уравнения:

$$f_i = B_{ij} R_j = [A n_i n_j + B (\delta_{ij} - n_i n_j)] R_j \quad (5)$$

Естественно считать, что  $\mu$  и  $\lambda$  равны известным в теории упругости коэффициентам Ламе ( $\mu$  - модуль сдвига). Постоянные  $\chi, A, B, C, D$  являются новыми упругими постоянными среды. Непарность касательных напряжений определяется упругими постоянными  $\chi$  и  $D$ . В дальнейшем полагаем с целью упрощений, что  $\chi = D = 0$ . Поверхностные эффекты описываются с помощью соответственно физических постоянных  $A$  и  $B$ .

Для изотропной среды, в которой перемещения подчиняются связям, соответствующим несимметричным соотношениям для тензора дисторсии (1) вариационное уравнение имеет вид:

$$\delta L = \iiint [(\mu + \chi) \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\mu + \lambda - \chi) \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_i} + 2D \frac{\partial R_k}{\partial x_m} \partial_{ijk} - CR_k + \chi_j \delta R] dV + \quad (6)$$

$$+ \iint [Y_i - \mu (\frac{\partial R_j}{\partial x_j} + \frac{\partial R_i}{\partial x_i}) n_j - \lambda \frac{\partial R_m}{\partial x_m} n_i - \chi (\frac{\partial R}{\partial x_j} - \frac{\partial R_i}{\partial x_i}) n_j + DR_k n_j \partial_{kji} - B_j R_j \delta R] dF$$

Уравнениями (6) определяется математическая постановка задачи, заключающаяся в формулировке системы разрешающих дифференциальных уравнений и граничных условий для исследуемой среды.

Рассматриваемая модель среды определяется следующей изменчивостью решения  $\sim e^{-r\sqrt{\sigma}/r}$ , в то время как классической модели соответствует изменчивость, диктуемая гармоническим оператором  $-1/r$ . Такое решение определяет локальное поле. Следовательно, предлагаемая модель отличается от классической модели, если только  $C$  не мало. Оно в общем случае должно дополнять классическое решение. Следует отметить, что предлагаемая модель учитывает масштабные эффекты.

Ниже будет показано, что на основе модели «когезионного поля» строится модель среды, разрешающей система уравнений которой является произведением оператора классической теории упругости и оператора «базисной» модели (6). Ее решение представляется в виде линейной комбинации решения классической теории упругости и решения, соответствующего «базисной» модели (6).

### 3. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ «КОГЕЗИОННОГО ПОЛЯ» И РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Предположим, что соотношения Панковича не выполняются, т.е. являются неоднородными. Эту неоднородность будем определять тензором  $\Xi_{ij}$ .

Следуя «кинематическому» вариационному принципу, построим возможную работу внутренних сил:

$$\bar{\delta} U = \iiint \{ \sigma_{ij} \delta (\gamma_{ij}^0 + \frac{1}{3} \theta^0 \delta_{ij} - \omega_k^0 \partial_{ijk} - \frac{\partial R_k^0}{\partial x_j}) + m_{ij} \delta [\Xi_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_m} (\gamma_{ij}^{\Xi} + \frac{1}{3} \theta^{\Xi} \delta_{ij} - \omega_k^{\Xi} \partial_{ijk}) \partial_{nmj}] \} dV \quad (7)$$

Проведем интегрирование по частям соответствующих производных в выражении (7). Получим

$$\bar{\delta} U = \iiint \{ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta R_k^0 + \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij}^0 + \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} \delta \theta^0 - \sigma_{ij} \partial_{ijk} \delta \omega_k^0 + m_{ij} \delta \Xi_{ij} +$$

$$+ (\frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m} \partial_{ijn} + \frac{1}{2} \frac{\partial m_{in}}{\partial x_m} \partial_{imn} - \frac{1}{3} \frac{\partial m_{km}}{\partial x_m} \partial_{kmj} \delta_{ij}) \delta \gamma_{ij}^{\Xi} + \frac{1}{3} \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m} \partial_{nmj} \delta \theta^{\Xi} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m} \partial_{nmj} \partial_{ijk} \delta \omega_k^{\Xi} \} dV +$$

$$+ \iint [ -\sigma_{ij} n_j \delta R_k^0 - m_{in} n_m \partial_{ijn} \delta (\gamma_{ij}^{\Xi} + \frac{1}{3} \theta^{\Xi} \delta_{ij} - \omega_k^{\Xi} \partial_{ijk}) ] dF$$

Представим тензор несовместностей в виде разложения на дивергент, шаровой и антисимметричный тензоры:

$$\Xi_{ij} = \xi_{ij} + \frac{1}{3} \xi \delta_{ij} - \xi_k \partial_{ijk}$$

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}(\Xi_{ij} + \Xi_{ji}) - \frac{1}{3}\Xi_{pp}\delta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{in}^{\Xi}}{\partial\alpha_m}\partial_{imj} + \frac{\partial\gamma_{jn}^{\Xi}}{\partial\alpha_m}\partial_{imj}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_i^{\Xi}}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_j^{\Xi}}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial\omega_k^{\Xi}}{\partial\alpha_k}\delta_{ij}\right)$$

$$\xi = \Xi_{ij}\delta_{ij} = -2\frac{\partial\omega_k^{\Xi}}{\partial\alpha_k}, \quad \xi_k = -\frac{1}{2}\Xi_{ij}\partial_{ijk} = -\frac{\partial\gamma_{kj}^{\Xi}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{3}\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial\alpha_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_n^{\Xi}}{\partial\alpha_n}\partial_{imk}$$

Тензорные и векторные величины, в поверхностном интеграле, разложим на составляющие по нормали и по касательной к поверхности. С этой целью введем следующие обозначения, выделяющие кинематические факторы в направлении ортогональном к поверхности тела

$$\hat{\gamma}_{pq}^{\Xi} = \gamma_{pq}^{\Xi}(\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{np} - n_n n_p),$$

$$\hat{\omega}_k^{\Xi} = \omega_k^{\Xi}(\delta_{kj} - n_k n_j), \quad \hat{R}_k^0 = R_k^0(\delta_{kp} - n_k n_p), \quad \hat{\gamma}_n^{\Xi} = \gamma_{pq}^{\Xi} n_q (\delta_{np} - n_n n_p)$$

$$\omega^{\Xi} = \omega_q^{\Xi} n_q, \quad R^0 = R_q^0 n_q, \quad \gamma^{\Xi} = \gamma_{pq}^{\Xi} n_p n_q$$

Тогда можно записать следующие разложения

$$\omega_k^{\Xi} = \hat{\omega}_k^{\Xi} + \omega^{\Xi} n_k$$

$$\gamma_{ij}^{\Xi} = \hat{\gamma}_{ij}^{\Xi} + \hat{\gamma}_i^{\Xi} n_j + \hat{\gamma}_j^{\Xi} n_i + \gamma^{\Xi} n_i n_j$$

$$R_k^0 = \hat{R}_k^0 + R^0 n_k$$

В результате, выражение для тензора свободной дилатации переписывается в виде

$$d_{ij}^{\Xi} = \gamma_{ij}^{\Xi} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij} - \omega_k^{\Xi}\partial_{ijk} =$$

$$= (\hat{\gamma}_{ij}^{\Xi} + \hat{\gamma}_i^{\Xi} n_j + \hat{\gamma}_j^{\Xi} n_i + \gamma^{\Xi} n_i n_j) + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij} - (\hat{\omega}_k^{\Xi} + \omega^{\Xi} n_k)\partial_{ijk}$$

С учетом введенных величин предыдущее вариационное равенство после некоторых преобразований переписывается в виде

$$\delta U = \iiint \left\{ \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\alpha_j} \delta R_i^0 + \sigma_{ij} \delta\gamma_{ij}^0 + \frac{1}{3}\sigma_{ij} \delta_{ij} \delta\theta^0 - \sigma_{ij} \partial_{ijk} \delta\omega_k^0 + \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{2}m_{ij} + \frac{1}{2}m_{ji} - \frac{1}{3}m_{kk}\delta_{ij}\right) \delta\xi_{ij}^{\Xi} + \frac{1}{3}m_{ij} \delta_{ij} \delta\xi^{\Xi} - m_{ij} \partial_{ijk} \delta\xi_k^{\Xi} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\frac{\partial m_m}{\partial\alpha_m} \partial_{jmm} + \frac{1}{2}\frac{\partial m_m}{\partial\alpha_m} \partial_{mmm} - \frac{1}{3}\frac{\partial m_{km}}{\partial\alpha_m} \partial_{kmj} \delta_{ij}\right) \delta\gamma_{ij}^{\Xi} + \frac{1}{3}\frac{\partial m_{ij}}{\partial\alpha_m} \partial_{mij} \delta\theta^{\Xi} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial\alpha_m} \partial_{mij} \partial_{imk} \delta\omega_k^{\Xi} \Big] dV +$$

$$- \iint [\sigma_{kj}(\delta_{ik} - n_i n_k) n_j \delta\hat{R}_i^0 + \sigma_{kj} n_k n_j \delta R^0 + m_{pm}(\delta_{ip} - n_i n_p)(\delta_{jq} - n_j n_q) n_m \partial_{qpm} \delta\hat{\gamma}_{ij}^{\Xi} +$$

$$+ m_{in} n_m n_i \partial_{jmm} \delta\hat{\gamma}_j^{\Xi} - \frac{1}{3}m_{ij} n_m \partial_{mij} \delta\theta^{\Xi} - m_{in} n_m \partial_{jmm} \partial_{ijl} (\delta_{kl} - n_k n_l) \delta\hat{\omega}_k^{\Xi} - m_{in} n_m n_q \partial_{jmm} \partial_{ijl} \delta\omega_l^{\Xi}] dF$$

Полученная вариационная форма позволяет определить списки аргументов объемной и поверхностной плотностей потенциальной энергии. В результате считая, что вариационная линейная форма интегрируема (существует потенциальная энергия), можем записать

$$U_V = U_V(\gamma_{ij}^0; \hat{\gamma}_{ij}^{\Xi}; \xi_{ij}; R_k^0; \omega_k^0; \omega_k^{\Xi}; \xi_k; \theta^0; \theta^{\Xi}; \xi)$$

$$U_F = U_F(\hat{\gamma}_{ij}^{\Xi}; \hat{\gamma}_k^{\Xi}; \hat{\omega}_k^{\Xi}; \hat{R}_k^0; \omega^{\Xi}; \theta^{\Xi}; R^0)$$

Предполагая физическую линейность формулируемой модели (т.е. квадратичность лагранжиана), представим лагранжиан рассматриваемой модели в следующем виде

$$\begin{aligned}
 U_V = \frac{1}{2} [ & 2\mu\gamma_{ij}^0\gamma_{ij}^0 + \mu^{\Xi 0}\gamma_{ij}^{\Xi}\gamma_{ij}^{\Xi} + \mu^{\xi 0}\xi_{ij}^0\xi_{ij}^0 + \\
 & + \mu^{\Xi 0}\gamma_{ij}^0\gamma_{ij}^{\Xi} + 2\mu^{\Xi\xi}\gamma_{ij}^{\Xi}\gamma_{ij}^{\Xi} + \mu^{\Xi\xi}\xi_{ij}^{\Xi}\xi_{ij}^{\Xi} + \\
 & + \mu^{\xi 0}\gamma_{ij}^0\xi_{ij}^0 + \mu^{\xi\xi}\gamma_{ij}^{\Xi}\xi_{ij}^{\Xi} + 2\mu^{\xi\xi}\xi_{ij}^{\Xi}\xi_{ij}^{\Xi} + \\
 & + CR_k^0R_k^0 + D\omega_k^0R_k^0 + D^{\Xi 0}\omega_k^{\Xi}R_k^0 + D^{\xi 0}\xi_kR_k^0 + \\
 & + DR_k^0\omega_k^0 + 4\chi\omega_k^0\omega_k^0 + \chi^{\Xi 0}\omega_k^{\Xi}\omega_k^0 + \chi^{\xi 0}\xi_k\omega_k^0 + \\
 & + D^{\Xi 0}R_k^0\omega_k^{\Xi} + \chi^{\Xi 0}\omega_k^0\omega_k^{\Xi} + \chi^{\Xi\xi}\omega_k^{\Xi}\omega_k^{\Xi} + \chi^{\xi 0}\xi_k\omega_k^{\Xi} + \\
 & + D^{\xi 0}R_k^0\xi_k + \chi^{\xi 0}\omega_k^0\xi_k + \chi^{\Xi\xi}\omega_k^{\Xi}\xi_k + \chi^{\xi\xi}\xi_k\xi_k + \\
 & + \lambda^{\Xi 0}\theta^0\theta^{\Xi} + (\frac{2\mu^{\Xi\xi}}{3} + \lambda^{\Xi\xi})\theta^{\Xi}\theta^{\Xi} + \lambda^{\xi\xi}\xi\theta^{\Xi} + \\
 & + \lambda^{\xi 0}\theta^0\xi + \lambda^{\xi\xi}\theta^{\Xi}\xi + (\frac{2\mu^{\xi\xi}}{3} + \lambda^{\xi\xi})\xi\xi ]
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 U_V = \frac{1}{2} [ & 2M\hat{\gamma}_{ij}^{\Xi}\hat{\gamma}_{ij}^{\Xi} + B^{\pi\pi}\hat{\gamma}_k^{\Xi}\hat{\gamma}_k^{\Xi} + B^{\omega\omega}\hat{\omega}_k^{\Xi}\hat{\omega}_k^{\Xi} + B^{\hat{R}\hat{R}}\hat{R}_k^0\hat{\gamma}_k^{\Xi} + \\
 & + B^{\omega\hat{\gamma}}\hat{\gamma}_k^{\Xi}\hat{\omega}_k^{\Xi} + B^{\omega\hat{\omega}}\hat{\omega}_k^{\Xi}\hat{\omega}_k^{\Xi} + B^{\hat{R}\hat{\omega}}\hat{R}_k^0\hat{\omega}_k^{\Xi} + \\
 & + B^{\hat{R}\hat{\hat{R}}}\hat{\gamma}_k^{\Xi}\hat{R}_k^0 + B^{\hat{R}\omega}\hat{\omega}_k^{\Xi}\hat{R}_k^0 + B^{\hat{R}\hat{R}}\hat{R}_k^0\hat{R}_k^0 + \\
 & + A^{\omega\omega}\omega^{\Xi}\omega^{\Xi} + A^{\theta\omega}\theta^{\Xi}\omega^{\Xi} + A^{\hat{R}\omega}R^0\omega^{\Xi} + \\
 & + A^{\theta\theta}\omega^{\Xi}\theta^{\Xi} + A^{\theta\theta}\theta^{\Xi}\theta^{\Xi} + A^{\hat{R}\theta}R^0\theta^{\Xi} + \\
 & + A^{\hat{R}\omega}\omega^{\Xi}R^0 + A^{\hat{R}\theta}\theta^{\Xi}R^0 + AR^0R^0 ]
 \end{aligned} \tag{9}$$

Из соотношений (8), (9) следуют обобщенные уравнения закона Гука (определяющие соотношения) для общей модели среды Панковича-Коссера внутри области:

для напряжений

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial (\partial R_i^0 / \partial x_j)} = \\
 &= (2\mu\gamma_{ij}^0 + \mu^{\Xi 0}\gamma_{ij}^{\Xi} + \mu^{\xi 0}\xi_{ij}^0) + ((\frac{2\mu}{3} + \lambda)\theta^0 + \lambda^{\Xi 0}\theta^{\Xi} + \lambda^{\xi 0}\xi)\delta_{ij} - \\
 &- \frac{1}{2}(DR_k^0 + 4\chi\omega_k^0 + \chi^{\Xi 0}\omega_k^{\Xi} + \chi^{\xi 0}\xi_k)\varepsilon_{ijk}
 \end{aligned}$$

для моментных напряжений

$$\begin{aligned}
 m_{ij} &= \frac{\partial U_V}{\partial \Xi_{ij}} = \\
 &= (\mu^{\xi 0}\gamma_{ij}^0 + \mu^{\Xi\xi}\gamma_{ij}^{\Xi} + 2\mu^{\xi\xi}\xi_{ij}^{\Xi}) + (\lambda^{\xi 0}\theta^0 + \lambda^{\Xi\xi}\theta^{\Xi} + (\frac{2\mu^{\xi\xi}}{3} + \lambda^{\xi\xi})\xi)\delta_{ij} - \\
 &- \frac{1}{2}(D^{\xi 0}R_k^0 + \chi^{\xi 0}\omega_k^0 + \chi^{\Xi\xi}\omega_k^{\Xi} + \chi^{\xi\xi}\xi_k)\varepsilon_{ijk}
 \end{aligned}$$

для обобщенных когезионных сил

$$\sigma_k = \frac{\partial U_V}{\partial R_k^0} = CR_k^0 + D\omega_k^0 + D^{\Xi 0}\omega_k^{\Xi} + D^{\xi 0}\xi_k$$

для тензора взаимодействий в среде Коссера

$$p_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial d_{ij}^{\Xi}} = (\mu^{\Xi 0}\gamma_{ij}^0 + 2\mu^{\Xi\Xi}\gamma_{ij}^{\Xi} + \mu^{\xi\Xi}\xi_{ij}) + \\ - \frac{1}{2}(D^{\Xi 0}R_k^0 + \chi^{\Xi 0}\omega_k^0 + \chi^{\Xi\Xi}\omega_k^{\Xi} + \chi^{\xi\Xi}\xi_k)\epsilon_{ijk} + \\ + (\lambda^{\Xi 0}\theta^0 + (\frac{2\mu^{\Xi\Xi}}{3} + \lambda^{\Xi\Xi})\theta^{\Xi} + \lambda^{\xi\Xi}\xi)\delta_{ij}$$

На поверхности области соотношения (8),(9) приводят к следующим обобщенным уравнениям закона Гука для общей модели среды Папковича-Коссера

$$\bar{\tau}_{ij}^{\Xi} = \frac{\partial U_F}{\partial \bar{\gamma}_{ij}^{\Xi}} = 2M\bar{\gamma}_{ij}^{\Xi},$$

$$\bar{\tau}_k^{\Xi} = \frac{\partial U_F}{\partial \bar{\gamma}_k^{\Xi}} = B^{\gamma\gamma}\bar{\gamma}_k^{\Xi} + B^{\omega\gamma}\bar{\omega}_k^{\Xi} + B^{\xi\gamma}\bar{\xi}_k^0$$

$$\bar{m}_k = \frac{\partial U_F}{\partial \bar{\omega}_k^{\Xi}} = B^{\omega\omega}\bar{\omega}_k^{\Xi} + B^{\xi\omega}\bar{\xi}_k^0 + B^{\theta\omega}\bar{\theta}_k^0,$$

$$f_k = \frac{\partial U_F}{\partial \bar{R}_k^0} = B^{\xi\xi}\bar{\xi}_k^0 + B^{\theta\xi}\bar{\theta}_k^0 + B\bar{R}_k^0$$

$$m^{\Xi} = \frac{\partial U_F}{\partial \omega^{\Xi}} = A^{\omega\omega}\omega^{\Xi} + A^{\theta\omega}\theta^{\Xi} + A^{\xi\omega}R^0$$

$$\sigma^{\Xi} = \frac{\partial U_F}{\partial \theta^{\Xi}} = A^{\theta\theta}\theta^{\Xi} + A^{\xi\theta}\xi^0 + A^{\theta R}R^0$$

$$f = \frac{\partial U_F}{\partial R^0} = A^{\xi R}\xi^0 + A^{\theta R}\theta^{\Xi} + AR^0$$

Построенные плотности объемной и поверхностной потенциальной энергии и определяющие соотношения позволяют записать лагранжиан и выписать соответствующие уравнения Эйлера:

$$\delta L = \iiint [(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \sigma_i + X_i)\delta R_i^0 - (\frac{\partial m_{ij}^{\Xi}}{\partial x_m} \epsilon_{nmj} + p_{ij})\delta d_{ij}^{\Xi}]dV + \\ + \iint [(Y_i - \sigma_{ij}n_j - f_i)\delta \bar{R}_i^0 + (Y_i n_i - \sigma_{ij}n_j n_j - f)\delta R^0 + \\ + (m_{in}n_m \epsilon_{nmj} - \bar{\tau}_{ij}^{\Xi})\delta \bar{\gamma}_{ij}^{\Xi} + (m_{in}n_m \epsilon_{nmk} - \bar{\tau}_k^{\Xi})\delta \bar{\gamma}_k^{\Xi} - (m_{in}n_m \epsilon_{nmj} \epsilon_{ijk} + \bar{m}_k)\delta \bar{\omega}_k^{\Xi} + \\ - (m_{in}n_m n_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{nmj} + m^{\Xi})\delta \omega^{\Xi} + (\frac{1}{3}m_{in}\delta_{ij}n_m \epsilon_{nmj} - \sigma^{\Xi})\delta \theta^{\Xi}]dF = 0 \quad (10)$$

Таким образом, с учетом определяющих соотношений сформулирована математическая постановка задачи для общей моментной среды Папковича-Коссера, в которой реализуются неоднородные соотношения Папковича (24) Построена соответствующая краевая задача.

Далее на основе общей модели (10) строится модель «когезионного поля». Сделаем следующее предварительное замечание. Последовательный анализ сред Папковича-Коссера позволяет сформулировать следующее утверждение: ...



моментной среде Папковича-Коссера (со свободными деформациями) (10) может быть поставлена в соответствие конкретная модель среды Койтера. Этот факт аналитически выражается в том, что свободные деформации могут быть алгебраически записаны в явной форме через некоторые линейные дифференциальные операторы второго порядка от вектора перемещений.

Сформулированное утверждение дает некоторые формальные основания для упрощения модели. Действительно, в соответствии с утверждением, вектор свободных поворотов  $\omega_k^z$ , например, определяется в следующей форме

$$\omega_k^z = aR_k + b\omega_k + c \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + d \frac{\partial \omega_n}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk}.$$

Аналогичные точные формы могут быть установлены и для  $\theta^z, \gamma_{ij}^z$ . Для предлагаемой, наиболее простой модели «когезионного поля» удержим в указанном разложении для свободных поворотов только первое слагаемое:  $\omega_k^z = a\omega_k$ . В отношении  $\theta^z$  и  $\gamma_{ij}^z$  предлагается аналогично принять  $\theta^z = b\theta, \gamma_{ij}^z = 0$ , где  $a$  и  $b$  некоторые рациональные функции модулей общей модели (10). После таких упрощений примем дополнительно следующую систему упрощающих положений:

- считаем далее, что плотность объемной потенциальной энергии  $U_v$  не имеет перекрестных членов, т.е. записывается в канонической форме;
- плотность поверхностной потенциальной энергии полагается равной нулю;
- строится модель среды с симметричным тензором напряжений;
- моментный «коэффициент Пуассона» считается равным нулю (коэффициент при свертке векторов кривизн  $\xi_k, \xi_k$ ).

Оставшиеся после этих упрощений коэффициенты общей модели подбираются так, чтобы оператор разрешающего уравнения модели мог быть представлен в виде произведения оператора классической теории упругости и оператора, определяющего масштабный эффект. Предлагается простейший вариант модели когезионного поля, который содержит лишь одну дополнительную постоянную модели  $C$ . В результате получим следующее выражение для лагранжиана

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + (\frac{2\mu}{3} + \lambda)\theta^2 + 8\frac{\mu^2}{C}\xi_{ij}\xi_{ij} + \frac{(2\mu + \lambda)^2}{C}\theta,\theta] dV$$

Вариационное уравнение рассматриваемой модели когезионного поля может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \iiint [(2\mu + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + 2\mu \frac{\partial \omega_n}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nm} - \frac{2\mu^2}{C} \Delta \frac{\partial \omega_n}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nm} - \frac{(2\mu + \lambda)^2}{C} \Delta \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + P_i^f] \delta R_i dV - \\ & - \iint \{ -\frac{2\mu^2}{C} (n_m n_j \mathcal{E}_{jm} + n_n n_j \mathcal{E}_{jn}) \frac{\partial \omega_n}{\partial x_m} + \frac{(2\mu + \lambda)^2}{C} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} n_k n_j \} \delta \frac{\partial R_j}{\partial x_q} n_q dF + \\ & + \iint \{ P_i^f - [2\mu\gamma_{ij} + (\frac{2\mu}{3} + \lambda)\theta\delta_{ij} + \frac{2\mu^2}{C} \Delta \omega_n \mathcal{E}_{nm} - \frac{(2\mu + \lambda)^2}{C} \Delta \theta \delta_{ij}] n_j + \\ & + (\delta_{ij} - n_q n_j) \frac{\partial}{\partial x_q} [-\frac{2\mu^2}{C} (\frac{\partial \omega_k}{\partial x_p} + \frac{\partial \omega_p}{\partial x_k}) n_p \mathcal{E}_{jk} + \frac{(2\mu + \lambda)^2}{C} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} n_k \delta_{ij}] \} \delta R_j dF - \\ & - \sum \int \{ -\frac{2\mu^2}{C} (\frac{\partial \omega_k}{\partial x_p} + \frac{\partial \omega_p}{\partial x_k}) n_p v_j \mathcal{E}_{jk} + \frac{(2\mu + \lambda)^2}{C} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} n_k v_j \} \delta R_j ds = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим разрешающее уравнение для модели (11). Введём «классический» оператор равновесия

$$L_{ij}(\dots) = (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x_i \partial x_j} + \mu(\delta_{ij} \Delta(\dots) - \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x_i \partial x_j}) \quad (12)$$

Нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств

$$\Delta \theta = \frac{1}{(2\mu + \lambda)} \frac{\partial(\dots)}{\partial x_i} L_{ij}(R_j), \quad \Delta \omega_k = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial(\dots)}{\partial x_j} L_{ij}(R_j) \varepsilon_{ijk}$$

Учитывая последние равенства и (12), разрешающее уравнение в (11) может быть переписано в перемещениях в следующем виде:

$$\left[ \frac{(2\mu + \lambda)}{C} \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\mu}{C} (\Delta(\dots) \delta_{ij} - \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x_i \partial x_j}) - (\dots) \delta_{ij} \right] L_{jk}(R_k) - P_i^j = 0$$

или

$$\left[ -\frac{1}{C} L_{ij}(\dots) + (\dots) \delta_{ij} \right] L_{jk}(R_k) + P_i^j = 0 \quad (13)$$

Здесь  $L_{ij}(\dots)$  - оператор классической теории упругости,

$$L_{ij}(\dots) = \mu \Delta(\dots) \delta_{ij} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \Delta(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x_i \partial x_i}, \quad R_k - \text{вектор перемещений, } \mu, \lambda -$$

коэффициенты Ламе.

Предлагаемая модель содержит только одну новую физическую константу  $C$  по сравнению с классической теорией упругости. Эта константа имеет иную размерность, чем размерность коэффициентов Ламе, и отличается от них на квадрат длины.

Дадим определение перемещений когезионного поля. Будем называть вектором перемещения когезионного поля (когезионным перемещением) следующий вектор:

$$u_i = -\frac{1}{C} L_{ij}(R_j) = -\frac{1}{C} \left[ (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \Delta R_j \right] \quad (14)$$

Используя (13) получаем уравнения для вектор-функции  $u_i$  (14)

$$(\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \Delta u_i - C u_i + P_i^j = 0 \quad (15)$$

или  $H_{ij}(u_j) + P_i^j = 0$ ,

где  $H_{ij}(\dots) = L_{ij}(\dots) - C(\dots) \delta_{ij}$ .

Очевидно, что уравнения (15) в точности совпадают с уравнениями «базисной» модели, рассмотренной выше.

Аналогично введём определение вектора классических перемещений  $U_i$ . В уравнении (13) можно изменить последовательность действия операторов. Тогда получим следующее определение вектора  $U_i$

$$U_i = \left[ -\frac{1}{C} L_{ij}(\dots) + (\dots) \delta_{ij} \right] R_j = -\frac{(\mu + \lambda)}{C} \frac{\partial^2 R_k}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\mu}{C} \Delta R_j + R_j \quad (16)$$

Очевидно, вектор  $U_i$  удовлетворяет классическим уравнениям равновесия

$$(\mu + \lambda) \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_i} + \mu \Delta U_i + P_i'' = 0$$

Из определения (16) для  $U_i$  и определения (14) для  $u_i$  общее решение уравнений (13) можно представить в виде следующего разложения:

$$R_i = U_i - u_i \quad (17)$$

Таким образом, краевая задача (11) представляет собой связанную краевую задачу для классического решения и решения для модели когезионного поля. Краевая задача в общем случае не разделяется.

В заключение раздела следует отметить, что в рамках предложенного алгоритма могут быть предложены модели деформирования и аморфных пленок. Действительно, если считать аморфным материал с неупорядоченной структурой, в котором имеются благоприятные условия для образования дисклинаций [4], то естественное обобщение предложенной модели может являться основой для описания и таких структур. Предварительный анализ показал [1], что модели сред с полями дефектов (в том числе дисклинаций) также строятся как модели, описывающие масштабные эффекты, определенного порядка. Поэтому операторы разрешающих уравнений простейших моделей аморфных материалов могут быть получены из предложенных выше путем формального умножения на операторы, описывающие масштабные эффекты, т.е. на операторы типа Гельмгольца с постоянными, определяющими характерную длину дополнительных взаимодействий, связанных с наличием поля дисклинаций.

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ МОДЕЛИ. ПРИМЕРЫ

Использование модели «когезионного поля» для тонких структур дает существенное отличие результатов решения от результатов, даваемых классической теорией. Удалось качественно объяснить некоторые известные из экспериментов эффекты деформирования тонких пленок и тонких структур в целом (например, к таким можно отнести структуру, образующуюся в вершине трещины), не поддающиеся объяснению с точки зрения классической теории [12,13]. Так, например:

- для задачи о трещине позволило получить несингулярное решение для трещины и связать постоянную  $S$  постоянными механики разрушения. Оно дает формальное обоснование гипотезы Баренблата [14].
- для задачи о растяжении тонкой пленки позволило объяснить эффект сверхмодуля тонких пленок [1], который не мог быть объяснен с позиций классической теории упругости.
- для задачи о деформировании тонкой пленки под действием индентора [15] объяснить, почему расслоение тонких пленок начинается вне зоны контакта пленки с индентором.

В данной работе рассмотрены примеры деформирования пленок на растягиваемой подложке. Такая задача актуальна в связи с эффектом «осыпания» при тиснении рельефа на голографических фольгах. Эффект «осыпания» заключается в отслоении чешуек напыленного алюминиевого нанослоя от основы.

#### 4.1. Эффект «осыпания».

Предполагается, что тонкая пленка деформируется совместно с упругим основанием. Считается, что основание является абсолютно жестким в отношении поперечной координаты и диктует деформирование пленки в направлении продольной координаты. Таким образом, действие основания в зоне контакта будем моделировать заданием на поверхности контакта следующих граничных условий для пленки: при  $y=0$ ,  $w=0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_0$ . Верхняя поверхность пленки (при  $y=l$ ) считается свободной:  $\sigma_y = 0$  и  $\tau = 0$ .

Решение задачи (6) для пленки в общем случае строится в виде разложения в одинарный ряд Фурье в отношении продольной координаты  $x$  по системе функций  $X_n = \sin \lambda_n x$ , где  $\lambda_n = \frac{\pi}{2}(2n-1)$ .

В качестве конкретного примера принимается, что деформация изменяется по закону  $\varepsilon_0(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ . На графиках рис.1,2,3 представлены распределения нормальных и касательных напряжений по толщине пленки, взятые при  $x=0$ .

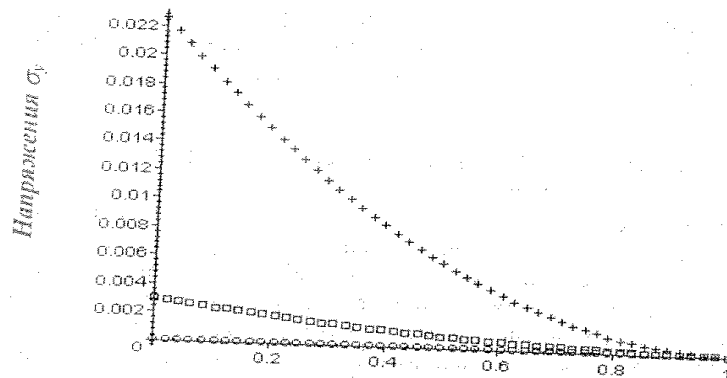


Рис.1. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_y$  по толщине.  $C=0$ -( $\circ\circ\circ$ ),  $C=20$ -( $\square\square\square$ ),  $C=100$ -( $+++$ ),  $A=B=0$ .

Характер распределений напряжений, как следует из графиков, существенно зависит от параметра  $C$  и для  $h \sim \sqrt{E/C}$  значительно отличается от напряжений, полученных по классической теории упругости. Амплитудные значения, полученные по модели "когезионного" поля значительно превышают амплитуды напряжений классического решения, что вероятно, и приводит к разрушению и отслоению чешуек металлизированного слоя от подложки.

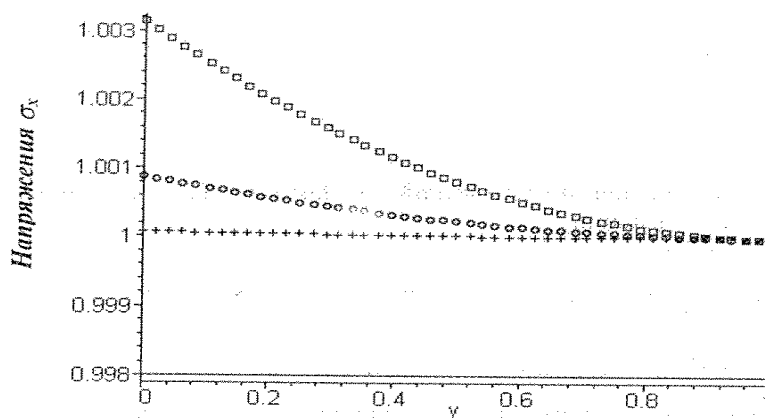


Рис.2. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  по толщине.  $C=0$ (—),  $C=10$ (-+-),  $C=50$ (ooo),  $C=100$ (-□-□),  $A=B=0$ .

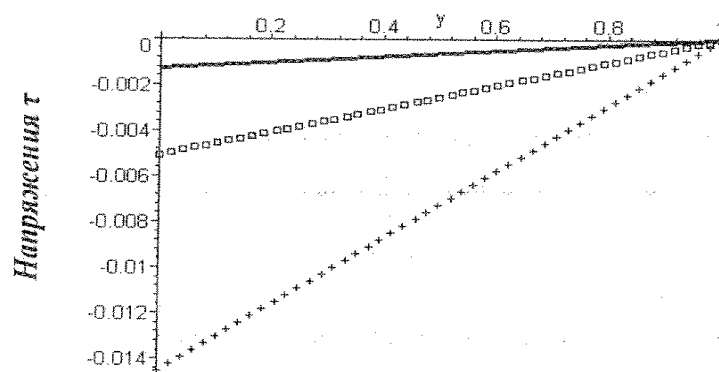


Рис.3. Распределение касательных напряжений  $\tau$  по толщине.  $C=10$ (—),  $C=50$ (-□-□),  $C=150$ (-+-),  $A=B=0$ .

#### 4.2. Деформирование двухслойной пленки.

Рассматривается деформирование двухслойной пленки, находящейся в условиях одноосного растяжения. В направлении действия растягивающей нагрузки реализуется однородная деформация. Исследуется распределение нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном нагружению, порождаемых эффектом Пуассона. Фактически требуется рассмотреть одномерную задачу. В рамках предложенной модели для постановки задачи здесь также удобно ввести понятия когезионных  $u$  и классических перемещений  $U$ . Тогда полное перемещение  $r$  запишется как разность «классического» и «когезионного» перемещений. Имеем

$$r = U - u$$

$$U = r - \frac{E}{C} r''$$

$$u = -\frac{E}{C} r''$$

Можно ввести определение «классической» и «когезионной» деформаций через оператор полных деформаций

$$\varepsilon = r' = U' - u'$$

$$U' = r' - \frac{E}{C} r'''$$

$$u' = -\frac{E}{C} r'''$$

где  $U'$  - «классическая» деформация,  $u'$  - «когезионная» деформация.

Введем также определение «классического» и «когезионного» напряжений через оператор полных напряжений:

$$\sigma = E\varepsilon = EU' - Eu'$$

$$EU' = Er' - \frac{E^2}{C} r'''$$

$$Eu' = -\frac{E^2}{C} r'''$$

Рассмотрим отдельно естественные граничные условия

$$EF\left(-\frac{E}{C} r''\right) \delta r' \Big|_{x=0} + [P_x^r - EF\left(r' - \frac{E}{C} r'''\right)] \delta r \Big|_{x=0} = 0$$

Имея ввиду данные определения, можно предложить следующую физическую трактовку этих условий:

(Интеграл от «когезионного» напряжения)  $\delta$  (полная деформация) +

(Внешняя сила - «классическое» напряжение)  $\delta$  (полное перемещение) = 0

Для свободного края имеем следующие условия:

$$EF\left(-\frac{E}{C} r''\right) = 0 \text{ - интеграл от «когезионных» напряжений равен нулю,}$$

$$P_x^r - EF\left(r' - \frac{E}{C} r'''\right) = 0 \text{ - «классические» напряжения равны внешней силе.}$$

Для решения контактной задачи в составном стержне на границе контакта следует обеспечить требования непрерывности полных перемещений и полных деформаций:

$$r_1 = r_2$$

$$r_1' = r_2'$$

Соответственно, следует положить равными «классические» напряжения и интегралы от «когезионных» напряжений (статические множители) в естественных граничных условиях

$$E_2 F\left(-\frac{E_2}{C_2} r_2''\right) = E_1 F\left(-\frac{E_1}{C_1} r_1''\right)$$

$$E_2 F\left(r_2' - \frac{E_2}{C_2} r_2'''\right) = E_1 F\left(r_1' - \frac{E_1}{C_1} r_1'''\right)$$

Приведенная выше постановка задачи применительно к конкретной проблеме для двойной пленки позволила построить решение в форме

$$r_i = D_1^i y + D_2^i + D_3^i e^{-a_1 y} + D_4^i e^{-a_2(h_2 - y)}, \quad i=1,2, \quad a_1 = \sqrt{\frac{C_1}{E_1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{C_2}{E_2}}$$

Здесь  $r_i$  - перемещения в направлении, перпендикулярном нагружению в каждой из двух пленок,  $E_i, C_i$  - физические постоянные пленок,  $h_{1,2}$  - толщины пленок.

Постоянные  $D_i$  в указанных разложениях находились из полной системы граничных условий.

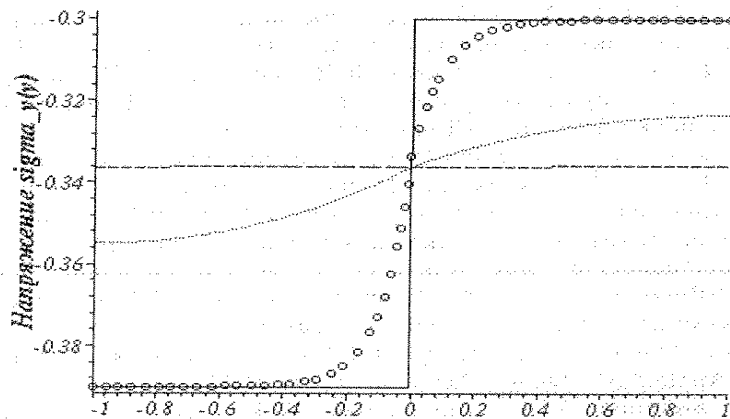


Рис.4. Напряжения  $\sigma_y(y)$  по толщине при следующих значениях:

— «классическое» решение  $E_1 = 1, E_2 = 1.5, \mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.26$

----- «когезионное» решение  $E_1 = 1, E_2 = 1.5, \mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.26, C_1 = 0.01, C_2 = 0.015$

..... «когезионное» решение  $E_1 = 1, E_2 = 1.5, \mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.26, C_1 = 1, C_2 = 1.5$

o o o «когезионное» решение  $E_1 = 1, E_2 = 1.5, \mu_1 = 0.3, \mu_2 = 0.26, C_1 = 100, C_2 = 200$

Часть решения, соответствующая быстрой, экспоненциальной изменяемости решения вблизи зоны контакта, отвечает «когезионной» составляющей решения. Заметим, что значение размерного параметра модели  $C$  качественно вполне моделирует толщину пленки. Если  $C$  мало по сравнению с модулем упругости, то можно считать, что пленка «погружена в когезионное поле». При больших значениях  $C$  пленка рассматривается как макрообъект. Приведенные графики показывают, что учет масштабных эффектов существенно меняет картину напряжений, если речь идет о тонких структурах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье С.А., Белов П.А. Математические модели механики сплошной среды и физических полей. Изд. ВЦ РАН, 2000, 151 с.
2. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des Corps Deformables, Paris, Hermann, 1909.
3. Койтер В.Т. Моментные напряжения в теории упругости. Механика, 1965, N3.
4. В.А.Лихачев, А.Е.Волков, В.Е.Шудегов. Континуальная теория дефектов. Изд-во Ленинградского университета, 1986.
5. Миндлин Р.Д. Микроструктура в линейной упругости. Механика, 1964, N4.
6. Wit R. Solid State Physics, N.Y., 1960, v.10
7. Лурье С.А., Белов П.А., Орлов А.П. Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые приложения. Механика композиционных материалов и конструкций. 1996, т.2, N2, с.84-104.
8. Лурье С.А., Белов П.А., Орлов А.П. Continuum Mechanics Models with Generalized Kinematics and Fracture Mechanics Application. Proc.16th Canadian Congress of Applied Mechanics. Quebec, Canada, 1997, pp.93-94.
9. Белов П.А., Лурье С.А., Модели деформирования твердых тел и их аналоги в теории поля. Механика твердого тела. Изв. РАН, 1998, №3, с.157-166.
10. Образцов И.Ф., Лурье, С.А., Яновский Ю.Г., Белов П.А. О некоторых классах моделей тонких структур. Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион, Естественные науки. Ростов-на-Дону, 2000, N3, с.110-118.
11. Лурье С.А., Белов П.А., Бабешко В.А., Яновский Ю.Г. Масштабные эффекты (Multyscale-эффекты) в моделях механики сплошных сред. Механика композиционных материалов и конструкций, 2002, т.8, N1, с.71-82.
12. Gleiter H. Nanostructured materials: Basic concepts and microstructure. Acta mater., 2000, v.48, pp.1-29.
13. Arzt E. Size Effects in materials due to microstructural and dimensional constraints: a comparative review. Acta mater., 1998, v.46, pp.5611-5626.
14. Barenblatt G.I. Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture. Advances in Applied Mechanics, Academic Press, 1962, N7.
15. Белов Р.А., Бодунов А.М., Криволицкая И.И., Лурье С.А. Масштабные эффекты в тонких пленках. Межотраслевой журнал «Механика композитных конструкций», ВИМИ, 2002, N2, с.33-40.

*Поступила в редакцию 4 декабря 2002 года.*