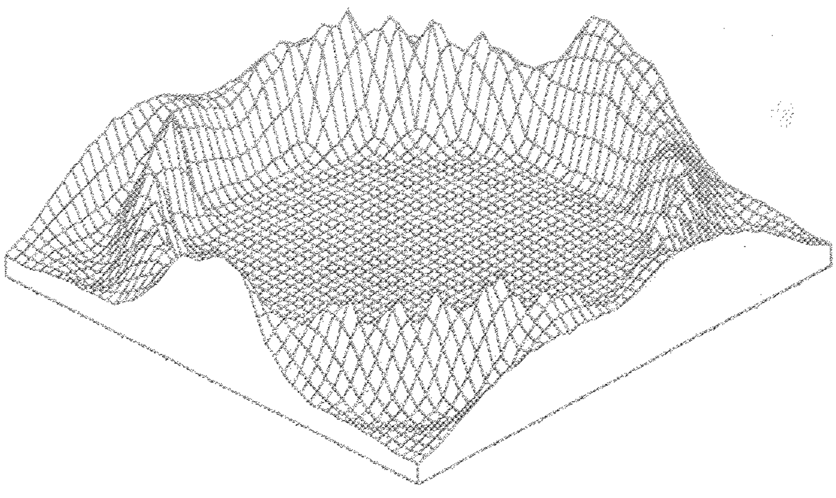
ISSN 1029-6670

ИЗДАНИЕ
ИПРИМ РАН

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

ОКТЯБРЬ-ДЕКАБРЬ 2003
ТОМ 9, №4



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ДЕФЕКТОВ СПЛОШНЫХ СРЕД[1]

Белов П.А., Лурье С.А.

Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе делается попытка сформулировать общую теорию дефектов, в сплошных средах, установить общие закономерности генерации и залечивания дефектов. Предлагается кинематическое описание дефектных сред, вводится определение дефектов различных уровней, дается классификация дефектных сред, отмечается также иерархическое строение теории дефектов. Показывается, что все известные типы дефектов естественным образом включаются в предложенную классификацию дефектов.

Установлен широкий класс новых типов дефектов, дана их интерпретация. При этом существование новых классов дефектов непосредственно связывается с известными теоретическими и экспериментальными данными о возможности генерации таких дефектов как дислокации и дисклинации [1-3]. Например, установлено, что генерация дислокаций с необходимостью связана с наличием дисклинаций. Указан формальный класс дефектов, являющийся источником дисклинаций. Дается формальное обобщение классификации на дефекты любого конечного уровня. Построение последовательной теории дефектов весьма актуально с точки зрения моделирования поведения пористых сред, дисперсных композитов, динамики поверхностных эффектов, эффектов растрескивания, кавитации и турбулентности.

1. МОДЕЛЬ СРЕД КОШИ. СКАЛЯРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

1. Пусть задан непрерывный вектор перемещений R_i. Найдем условия, при которых вектор R_i может быть представлен как градиент дифференцируемого скаляра φ (тензора нулевого ранга). Положим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = R_i \qquad (1)$$

Следовательно скалярный потенциал в (1) определяется равенством:

$$\varphi = \int_{M_0}^{M_x} R_i dy_i \qquad (2)$$

Запишем условием существования скаляра φ как условие существования контурного интеграла(2):

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j}Э_{ijk} = 0 \qquad (3)$$

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований. Грант № 03-01-00165.*

Условие (3) – условие независимости интеграла от пути интегрирования можно трактовать как условие отсутствия вихрей $-\omega_k$:

$$\omega_k = 0 \tag{4}$$

Соотношением (4) определяется «бездефектная» модель среды, в которой отсутствует вихревое поле, а поле перемещений имеет скалярный потенциал.

Определим теперь «дефектное скалярное поле» D:

$$D = \int_{M_0}^{M_x} R_i dy_i ,$$

где криволинейный интеграл D зависит от траектории интегрирования.

Тогда формально вектор перемещений можно представить в виде

$$R_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + D_i^1 \tag{5}$$

При этом полагаем, что вектор R_i в (5) является общим решением неоднородного уравнения:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} Э_{ijk} = -2\omega_k , \tag{6}$$

а функция D_i^1 - является некоторым частным решением этого неоднородного уравнения (6), а $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ есть общее решение однородного уравнения:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} Э_{ijk} = 0$$

В результате, можно определить потенциал поля перемещений в следующем виде

$$D = \varphi + D^1 \tag{7}$$

Здесь φ - дифференцируемое скалярное поле (бездефектное поле), а $D^1 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^1 dy_i$ - дефектное скалярное поле.

Скалярное поле D^1 определяет поле скачков – разрывов потенциала перемещений. По определению, его значение в произвольной точке M_o, $J^1(M_0) = \oint D_i^1 dy_i$ зависит от траектории интегрирования.

Будем называть средой Коши такую среду , в которой вихри $(-2\omega_k)$ (см. (5)) являются источниками дефектов. Под дефектами в модели Коши понимаются разрывы скалярного потенциала перемещений. Такие дефекты определяют непрерывное поле D_i^1 , по которому строится поле дефектов J^1.

Основное свойство такой модели дефектной среды состоит в том, что в ней нет генерации новых дефектов указанного вида. Иначе говоря, источник вихрей ($\omega_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} Э_{ijk}$) отсутствует. Имеет место дифференциальный закон сохранения:

$$\frac{\partial(-2\omega_k)}{\partial x_k} = 0$$

и его интегральная форма:

$$\oint\!\!\oint \omega_k n_k dF = 0 .$$

Последнее равенство показывает отсутствие процесса генерации дефектов в рассматриваемом представительном объеме.

2. МОДЕЛЬ СРЕД ПАПКОВИЧА (КОССЕРА). ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ, ВЕКТОРНОЕ ПОЛЕ ДЕФЕКТОВ

Рассмотрим однородные уравнения Папковича, которые являются условиями существования криволинейного интеграла в определении вектора перемещений [4]

$$(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in} - \omega_k Э_{ink}),_m Э_{nmj} = 0 , \; (R_i,_n = \gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in} - \omega_k Э_{ink}) \qquad (8)$$

Однородные уравнения Папковича (8) являются критерием существования векторного потенциала для тензора дисторсии $d^0{}_{in} = \gamma^0{}_{in} + \frac{1}{3}\theta^0\delta_{in} - \omega^0{}_k Э_{ink}$,. Этим векторным потенциалом r_i^0 является вектор перемещений. Здесь наблюдается полная аналогия со скалярным потенциалом для вектора перемещений R_i.

В соответствии с общей процедурой, рассмотрим неоднородные уравнения Папковича

$$(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\, \delta_{in} - \omega_k Э_{ink}),_m Э_{nmj} = \Xi_{ij} \qquad (9)$$

Непрерывным тензором "несовместностей" Ξ_{ij} определяется неоднородность соотношений Папковича. Для этого тензора справедлив дифференциальный закон сохранения:

$$\frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_j} = 0 .$$

Чтобы это показать, достаточно воспользоваться равенством (9) и подействовать на его левую и правую части оператором дивергенции.

Решение неоднородных уравнений Папковича (9) относительно γ_{ij}, ω_k и θ можно представить в виде суммы общего решения однородных уравнений Папковича γ_{ij}^0, ω_k^0, θ^0:

$$\gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2}\frac{\partial r_i^0}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial r_j^0}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial r_k^0}{\partial x_k}\delta_{ij}, \quad \omega_k^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial r_i^0}{\partial x_j}Э_{ijk}, \quad \theta^0 = \frac{\partial r_k^0}{\partial x_k}$$

и частного решения неоднородных уравнений Папковича (9): γ_{ij}^{Ξ}, ω_k^{Ξ} и θ^{Ξ}.

В результате можем записать

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^0 + \gamma_{ij}^{\Xi} = (\frac{1}{2}\frac{\partial r_i^0}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial r_j^0}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial r_k^0}{\partial x_k}\delta_{ij}) + \gamma_{ij}^{\Xi} ,$$

$$\omega_k = \omega_k^0 + \omega_k^{\Xi} = (-\frac{1}{2}\frac{\partial r_i^0}{\partial x_j}Э_{ijk}) + \omega_k^{\Xi}$$

$$\theta = \theta^0 + \theta^\Xi = (\frac{\partial r_k^0}{\partial x_k}) + \theta^\Xi$$

Частное решение неоднородных уравнений Папковича относительно тензора дисторсии d_{ij}^Ξ или, что тоже самое, относительно γ_{ij}^Ξ, ω_k^Ξ и θ^Ξ можно рассматривать как независимые от перемещений степени свободы. Для полной аналогии с предыдущим, тензор дисторсии d_{ij}^Ξ можно рассматривать как «обобщенные перемещения». Эти «обобщенные перемещения», связаны со своей «обобщенной деформацией» - тензором "несовместностей" Ξ_{ij} :

$$(\gamma_{in}^\Xi + \frac{1}{3}\theta^\Xi \delta_{in} - \omega_k^\Xi Э_{ink}),_m Э_{nmj} = \Xi_{ij} \tag{10}$$

Пользуясь терминологией среды Коссера, $\omega_k^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial r_i^0}{\partial x_j} Э_{ijk}$ будем называть стесненным вращением, а ω_k^Ξ - свободным вращением или спином. Аналогично будем называть γ_{ij}^0, и θ^0 - стесненными деформациями, а γ_{ij}^Ξ, и θ^Ξ - свободным деформациями.

Соотношениями (8)-(10) описывается кинематика сред с дефектами типа дислокаций. Эти соотношения позволяют сделать следующие выводы:

1. Поля свободных деформаций и спинов не могут быть постоянными, так как в этом случае $\Xi_{ij} = 0$.
2. Поля свободных деформаций и спинов могут иметь источники.

Действительно, имея ввиду (10), покажем, что поле спинов не является вихревым полем. Осуществляя свертку левой и правой части последнего равенства с δ_{ij}, получим:

$$\frac{\partial \omega_k^\Xi}{\partial x_k} = -\frac{1}{2}\Xi_{kk}.$$

Модели сред с векторным потенциалом назовем средами Папковича. Кинематика таких сред имеет следующую структуру:

- Поле перемещений R_i представляет собой суперпозицию двух полей – непрерывного поля r_i^0 и поля разрывов перемещений D_i^2: $R_i = r_i^0 + D_i^2$;
- Поле разрывов перемещений D_i^2 интегрально выражается через поля свободных деформаций и спинов по формулам, аналогичным формулам Чезаро: $D_i^2 = \int_{M_0}^{M_x} (\gamma_{ij}^\Xi + \frac{1}{3}\theta^\Xi \delta_{ij} - \omega_k^\Xi Э_{ijk}) dy_j$;
- Тензор «несовместности» перемещений Ξ_{ij} является тензором дислокаций [1].
- Имеет место дифференциальный закон сохранения для тензора дислокаций

$$\frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

- Интегральный аналог закона сохранения имеет вид:

$$\iiint \frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_j} dV = \oiint \Xi_{ij} n_j dF = 0$$

- В качестве меры поврежденности (дислокаций) можно выбрать поток тензора Ξ_{ij} через плоскость, в которой лежит выбранный плоский контур.

$$\iint\limits_{+} \Xi_{ij} n_j dF = n_j \iint\limits_{0} \Xi_{ij} dF$$

Здесь F -замкнутая поверхность, натянутая на плоский контур.

Иначе говоря, поток тензора Ξ_{ij} через любую поверхность, натянутую на выбранный плоский контур, один и тот же. В качестве меры поврежденности можно выбрать поток тензора Ξ_{ij} через плоскость, в которой лежит выбранный плоский контур.

Специально, отметим одно из основных свойств моделей сред Папковича (Коссера). В рамках таких моделей нельзя описать генерацию и залечивание дислокаций, поскольку $\oiint \Xi_{ij} n_j dF = 0$. Следовательно, дефекты, связанные с сохраняющимся тензором дислокаций Ξ_{ij}, не могут рождаться или исчезать.

3. МОДЕЛЬ СРЕД СЕН-ВЕНАНА. ТЕНЗОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ, ТЕНЗОРНОЕ ПОЛЕ ДЕФЕКТОВ

Чтобы кинематическая модель среды допускала рождение и исчезновение дислокаций, следует рассмотреть следующий уровень кинематических моделей сред. Этот класс сплошных сред будем называть средами Сен-Венана.

Введем кривизны деформаций: $\gamma_{ijn} = \dfrac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_k}$, $\theta_i = \dfrac{\partial \theta}{\partial x_j}$, $\omega_{ij} = \dfrac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$. Эти тензорные величины формально определяют тензор кривизн третьей валентности $D_{ijn}(\omega_{in}, \theta_n, \gamma_{ijn})$, который является производной от тензора дисторсии

$$(d_{in}),_j = D_{ijn}$$

где d_{in} – тензор дисторсии, $D_{ijn} = \gamma_{ijn} + \dfrac{1}{3}\theta_n \delta_{ij} - \omega_{qn} Э_{ijq}$

Следуя общему алгоритму, рассмотрим условия интегрируемости тензора дисторсии:

$$\frac{\partial D_{ijn}}{\partial x_m} Э_{nmk} = 0 \qquad (11)$$

Соотношения (11) являются условиями существования контурного интеграла (условиями интегрируемости) при определении тензора дисторсии d_{in} через тензор кривизн D_{ijn}. Назовем соотношения (11) обобщенными соотношениями Сен-Венана.

Условия интегрируемости являются критерием существования тензорного потенциала для тензора кривизн дисторсии $D_{ijn} = (d_{in}),_j$. Этим потенциалом является тензор дисторсии $-d_{in}$. Имеет место полная аналогия со скалярным потенциалов для вектора R_i (среды Коши) и векторным потенциалом для тензора дисторсии (среды Папковича).

Замечание. Тензор дисторсии перемещений d_m определяется в общем случае для полей перемещений с учетом возможных полей разрывов (см. среды Папковича) В общем случае когда условия интегрируемости (11) не выполняются имеет место неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial D_{ijn}}{\partial x_m} Э_{nmk} = \Omega_{ijk} \tag{12}$$

Непрерывным тензором "несовместностей" Ω_{ijk} определяется неоднородность обобщенных соотношений Сен-Венана:

$$\Omega_{ijk} = \Gamma_{ijk} + \frac{1}{3}\Theta_k \delta_{ij} - \Omega_{qk} Э_{ijq} \tag{13}$$

Альтернируя и симметризуя (12), (13) по первым двум индексам, найдем

$$\frac{\partial \omega_m}{\partial x_m} Э_{nmj} = \Omega_{ij}, \quad \frac{\partial \theta_n}{\partial x_m} Э_{nmj} = \Theta_j, \quad \frac{\partial \gamma_{ijn}}{\partial x_m} Э_{nmk} = \Gamma_{ijk}$$

Продолжая и обобщая общий алгоритм, можем предположить, что поля кривизн будут интегрируемыми либо неинтегрируемыми в зависимости от того, равны или нет нулю соответствующие тензоры «несовместностей» Ω_{ij}, Θ_j и Γ_{ijk}. Пусть тензоры «несовместностей» Ω_{ij}, Θ_j и Γ_{ijk} отличны от нуля. В силу определения (13) эти тензоры удовлетворяют дифференциальным законам сохранения:

$$\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \Theta_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial x_k} = 0$$

Поля поворотов можно разделить на непрерывную часть и поле скачков:

$$\omega_i = (-\frac{1}{2}\frac{\partial r_n^0}{\partial x_m} Э_{nmi} + \omega_i^{\Xi}) + \omega_i^{\Omega}$$

$$\omega_{ij} = (-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_n^0}{\partial x_j \partial x_m} Э_{nmi} + \frac{\partial \omega_i^{\Xi}}{\partial x_j} + \omega_{ij}^{\Omega})$$

Здесь $\omega_{ij}^{\Xi 0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_n^0}{\partial x_j \partial x_m} Э_{nmi} + \frac{\partial \omega_i^{\Xi}}{\partial x_j}$ можно трактовать как общее решение однородного уравнения Сен-Венана $\frac{\partial \omega_m^{\Xi 0}}{\partial x_m} Э_{nmj} = 0$, а ω_{ij}^{Ω} - частное решение неоднородного уравнения Сен-Венана $\frac{\partial \omega_{in}^{\Omega}}{\partial x_m} Э_{nmj} = \Omega_{ij} (= -\frac{1}{2}\Omega_{nmj} Э_{nmi})$.

Аналогично, поля деформаций также можно разделить на непрерывную часть и поле скачков:

$$\theta = (\frac{\partial r_k^0}{\partial x_k} + \theta^{\Xi}) + \theta^{\Omega}, \quad \theta_j = (\frac{\partial^2 r_k^0}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial \theta^{\Xi}}{\partial x_j} + \theta_j^{\Omega})$$

и

$$\gamma_{ij} = (\frac{1}{2}\frac{\partial r_i^0}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial r_j^0}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial r_k^0}{\partial x_k}\delta_{ij} + \gamma_{ij}^{\Xi}) + \gamma_{ij}^{\Omega}$$

$$\gamma_{ijk} = (\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_i^0}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r_j^0}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 r_q^0}{\partial x_k \partial x_q}\delta_{ij} + \frac{\partial \gamma_{ij}^{\Xi}}{\partial x_k} + \gamma_{ijk}^{\Omega})$$

Здесь $\theta_i^{\Xi 0} = \dfrac{\partial^2 r_k^0}{\partial x_i \partial x_k} + \dfrac{\partial \theta^{\Xi}}{\partial x_i}$ - общее решение однородного уравнения $\dfrac{\partial \theta_n^{\Xi 0}}{\partial x_m} Э_{nmj} = 0$,

θ_i^{Ω} - частное решение неоднородного уравнения $\dfrac{\partial \theta_n^{\Omega}}{\partial x_m} Э_{nmj} = \Theta_j (= \Omega_{nmj} \delta_{nm})$.

Соответственно, $\gamma_{ijk}^{\Xi 0} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 r_i^0}{\partial x_k \partial x_j} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 r_j^0}{\partial x_k \partial x_i} - \dfrac{1}{3} \dfrac{\partial^2 r_q^0}{\partial x_k \partial x_q} \delta_{ij} + \dfrac{\partial \gamma_{ij}^{\Xi}}{\partial x_k}$ трактуется как общее решение однородного уравнения $\dfrac{\partial \gamma_{ijn}^{\Xi 0}}{\partial x_m} Э_{nmk} = 0$, а γ_{ijk}^{Ω} - как частное решение неоднородного уравнения $\dfrac{\partial \gamma_{ijn}^{\Omega}}{\partial x_m} Э_{nmk} = \Gamma_{ijk} (= \dfrac{1}{2} \Omega_{ijk} + \dfrac{1}{2} \Omega_{ijk} - \dfrac{1}{3} \Omega_{nmk} \delta_{ij})$.

Заметим, что кривизны связаны еще дополнительными соотношениями (неоднородными соотношениями Папковича), выражающими условия существования дислокаций:

$$\gamma_{inm} Э_{nmj} + \frac{1}{3} \theta_n Э_{inj} - \omega_{km} Э_{ink} Э_{nmj} = \Xi_{ij} .$$

Таким образом, с помощью девяти неоднородных уравнений Папковича можно выразить все девять компонент тензора кривизн ω_{ij} через тензор дислокаций и остальные кривизны θ_m и γ_{inm}:

$$\omega_{ji} = \Xi_{ij} - \frac{1}{2} \Xi_{kk} \delta_{ij} - \gamma_{inm} Э_{nmj} - \frac{1}{3} \theta_m Э_{imj} .$$

Условие существования скачков в спинах ω_{ij} даст обобщение уравнений Сен-Венана:

$$\frac{\partial \omega_{in}}{\partial x_m} Э_{nmj} = \Omega_{ij} \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x_m} [\Xi_{ni} - \frac{1}{2} \Xi_{kk} \delta_{ni} - \gamma_{npq} Э_{pqi} - \frac{1}{3} \theta_k Э_{nki}] Э_{imj} = \Omega_{ij} .$$

Условие существования скачков в свободном изменении объема после исключения тензора кривизн θ_k с помощью обобщения уравнений Сен-Венана дает обобщение дифференциального закона сохранения дислокаций. Действительно, выразим явно кривизны, связанные со свободной деформацией изменения объема

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} = (\Omega_{ij} - \frac{1}{2} \Omega_{kk} \delta_{ij}) - \frac{\partial \Xi_{pk}}{\partial x_q} (\delta_{ki} Э_{pqj} - \frac{1}{2} \delta_{ij} Э_{pqk} - \frac{1}{2} \delta_{pk} Э_{iqj}) +$$
$$+ \frac{\partial \gamma_{npq}}{\partial x_m} (Э_{pqi} Э_{nmj} - \frac{1}{2} Э_{pqk} Э_{nmk} \delta_{ij})$$

и учтем условия существования скачков в свободном изменении объема:

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial x_m} Э_{nmj} = \Theta_j .$$

Получим следующую цепочку равенств:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \theta_j}{\partial x_i} Э_{ji\mu} = \frac{1}{3} \Theta_\mu = \Omega_{ij} Э_{ji\mu} - \frac{\partial \Xi_{pk}}{\partial x_q} (Э_{pqi} Э_{jk\mu} - \delta_{pk} \delta_{q\mu}) + \frac{\partial \gamma_{npq}}{\partial x_m} Э_{pqi} Э_{nmj} Э_{ji\mu} =$$

$$= \Omega_{ij} Э_{j\mu} - \frac{\partial \Xi_{pk}}{\partial x_q} (\delta_{pk}\delta_{q\mu} - \delta_{p\mu}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{q\mu}) + \frac{\partial \gamma_{npq}}{\partial x_m} (\delta_{p\mu}\delta_{qj} - \delta_{pj}\delta_{q\mu}) Э_{nmj} =$$

$$= \Omega_{ij} Э_{ji\mu} - \frac{\partial \Xi_{pk}}{\partial x_q} (\delta_{pk}\delta_{q\mu} - \delta_{p\mu}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{q\mu}) + \frac{\partial \gamma_{npq}}{\partial x_m} (\delta_{p\mu}\delta_{qj} - \delta_{pj}\delta_{q\mu}) Э_{nmj} =$$

$$= \Omega_{ij} Э_{j\mu} + \frac{\partial \Xi_{\mu k}}{\partial x_k} + \frac{\partial \gamma_{n\mu q}}{\partial x_m} Э_{nmq} - \frac{\partial \gamma_{nj\mu}}{\partial x_m} Э_{nmj} = \Omega_{ij} Э_{j\mu} + \frac{\partial \Xi_{\mu k}}{\partial x_k} - \Gamma_{n\mu n}.$$

Перенося дивергенцию тензора дислокаций в левую часть, окончательно найвем:

$$\frac{\partial \Xi_{\mu k}}{\partial x_k} = \Gamma_{n\mu n} + \frac{1}{3}\Theta_\mu - \Omega_{ij} Э_{ji\mu} = \Omega_{\mu kk}. \qquad (14)$$

Уравнение (14) переходит в уравнение закона сохранения тензора дислокаций в средах Папковича при нулевой правой части $\frac{1}{3}\Theta_\mu - \Omega_{ij} Э_{j\mu} + \Gamma_{n\mu n} = 0$. При не нулевой правой части это уравнение описывает рождение и уничтожение дислокаций.

Будем трактовать поле скачков ω_i^Ω (поле векторов Франка) как векторное поле дисклинаций, а тензор «несовместности» Ω_{ij} назовем вслед за Виттом [1] тензором дисклинаций. Заметим, что в отличие от классических представлений, дислокации могут рождаться и исчезать и при отсутствии дисклинаций $\Omega_{ij} = 0$, если принимать во внимание существование двух новых классов дефектов, определяемых тензорами несовместностей Θ_μ и $\Gamma_{n\mu n}$. Эти тензоры являются наряду с дисклинациями равноправными источниками дислокаций и определяемые этими тензорами дефекты играют такую же роль в отношении рождения и уничтожения дислокаций, как и дисклинации.

Назовем скалярное поле скачков изменения объема θ^Ω порами, а вектор «несовместности» свободного изменения объема Θ_i - вектором кавитации.

Будем называть тензорное поле скачков изменения формы γ_{ij}^Ω полем двойникования, а тензор «несовместности» изменения формы Γ_{ijk} - назовем тензором двойникования.

Кинематическая модель сред Сен-Венана таким образом имеет следующую структуру (в правых частях непрерывную часть заключаем в круглые скобки):

$$R_i = (r_i^0) + R_i^\Xi + R_i^\Omega$$

$$\begin{cases} \omega_k = (-\frac{1}{2}\frac{\partial r_i^0}{\partial x_j} Э_{ijk} + \omega_k^\Xi) + \omega_k^\Omega \\ \theta = (\frac{\partial r_k^0}{\partial x_k} + \theta^\Xi) + \theta^\Omega \\ \gamma_{ij} = (\frac{1}{2}\frac{\partial r_i^0}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial r_j^0}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial r_k^0}{\partial x_k}\delta_{ij} + \gamma_{ij}^\Xi) + \gamma_{ij}^\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{ij} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 r_n^0}{\partial x_j \partial x_m} Э_{nmi} + \dfrac{\partial \omega_i^{\Xi}}{\partial x_j} + \omega_{ij}^{\Omega} \\ \theta_j = \dfrac{\partial^2 r_k^0}{\partial x_j \partial x_k} + \dfrac{\partial \theta^{\Xi}}{\partial x_j} + \theta_j^{\Omega} \\ \gamma_{ijk} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 r_i^0}{\partial x_k \partial x_j} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 r_j^0}{\partial x_k \partial x_i} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 r_q^0}{\partial x_k \partial x_q}\delta_{ij} + \dfrac{\partial \gamma_{ij}^{\Xi}}{\partial x_k} + \gamma_{ijk}^{\Omega} \end{cases}$$

$$\Xi_{im} = \frac{\partial}{\partial x_n}(\gamma_{ij}^{\Xi} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij} - \omega_k^{\Xi} Э_{ijk})Э_{pnm} + (\gamma_{ipn}^{\Omega} + \frac{1}{3}\theta_n^{\ \Omega}\delta_{ij} - \omega_{kn}^{\Omega} Э_{ijk})Э_{jnm}$$

$$\begin{cases} \Omega_{ij} = \dfrac{\partial \omega_{in}^{\Omega}}{\partial x_m} Э_{nmj} \\ \Theta_j = \dfrac{\partial \theta_n^{\Omega}}{\partial x_m} Э_{nmj} \quad или \quad \dfrac{\partial \Xi_{jk}}{\partial x_k} = \Gamma_{jn} + \dfrac{1}{3}\Theta_j + \Omega_{nn} Э_{nmj} = \Omega_{jkk} \\ \Gamma_{ijk} = \dfrac{\partial \gamma_{ijn}^{\Omega}}{\partial x_m} Э_{nmk} \end{cases}$$

Среды Сен-Венана в общем случае описываются тридцатью девятью степенями свободы: r_i^0, ω_k^{Ξ}, θ^{Ξ}, γ_{ij}^{Ξ}, ω_{ij}^{Ω}, θ_j^{Ω}, γ_{ijk}^{Ω}. Они допускают двухуровневую систему дефектов: первый уровень – дислокации, способные как сохраняться, так и рождаться или исчезать; второй уровень дефектов – сохраняющиеся дисклинации, кавитация и двойникование. Пространство сред Сен-Венана содержит в себе в качестве подпространств среды Папковича с двенадцатью степенями свободы: r_i^0, ω_k^{Ξ}, θ^{Ξ}, γ_{ij}^{Ξ}, и классические среды (среды Коши) с тремя степенями свободы r_i^0.

В рамках этой кинематической модели могут быть построены модели:

- «турбулентности» с девятью степенями свободы r_i^0, ω_k^{Ξ}, ω_{ij}^{Ω}, в которой при сохраняющихся спинах ω_k^{Ξ} могут рождаться и исчезать спины ω_k^{Ω};
- «кавитирующие» среды с семью степенями свободы r_i^0, θ^{Ξ}, θ_j^{Ω}, в которых при сохраняющихся порах θ^{Ξ} могут рождаться и исчезать поры θ^{Ω};
- среды с «двойникованием» с двадцатью тремя степенями свободы r_i^0, γ_{ij}^{Ξ}, γ_{ijk}^{Ω}, в которых при сохраняющихся свободных сдвигах γ_{ij}^{Ξ} могут рождаться и исчезать свободные деформации изменения формы γ_{ij}^{Ω}, что имеет место при кристаллизации, полимеризации и т.п.

4. МОДЕЛЬ СРЕД N- ГО УРОВНЯ. ТЕНЗОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВАЛЕНТНОСТИ N

Пусть требуется построить кинематическую модель дефектов N - го уровня. Для этого определим сохраняющийся тензор «несовместностей» $T_{..\rho}^{N+1}$ ранга $N+1$:

$$\frac{\partial T^{N+1}_{..\rho}}{\partial x_\rho} = 0,$$

ρ - последний, $(N+1)$-ый индекс тензора «несовместностей». Тогда поле мультидеформаций $D_{..n}$ ранга $N+1$ будет определяться как общее решение уравнений сохранения:

$$T^{N+1}_{..\rho} = \frac{\partial D_{..n}}{\partial x_m} Э_{nm\rho}.$$

Представляя решение этого неоднородного уравнения совместности как сумму общего решения $\frac{\partial D_{...}}{\partial x_n}$ однородного уравнения и частного решения $D^{N+1}_{..n}$ неоднородного, получим:

$$D_{..n} = \frac{\partial D_{...}}{\partial x_n} + D^{N+1}_{..n},$$

где тензор $D_{...}$ ранга N можно интерпретировать как тензорный потенциал для некоторого тензора валентности N+1.

С другой стороны, $D_{...}$ можно рассматривать как поле мультиперемещений. Пусть поле мультиперемещений представлено в виде, аналогичном полю мультидеформаций. Тогда для тензора мультидеформаций можно записать:

$$D_{..kn} = \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial D^{N-1}_{...}}{\partial x_k} + D^{N}_{..k}\right) + D^{N+1}_{..kn}.$$

Здесь k - предпоследний индекс дефектного поля $D_{..kn}$ ранга $N+1$ или последний индекс дефектного поля $D_{..k}$ ранга N:

$$D_{..k} = \frac{\partial D^{N-1}_{...}}{\partial x_k} + D^{N}_{..k} + D^{N+1}_{..k},$$

где $D^{N+1}_{..k} = \int\limits_{M_0}^{M_x} D^{N+1}_{..kn} dy_n$.

Отсюда следует формальное определение тензора несовместностей предпоследнего уровня $T^{N}_{..q}$ ранга N:

$$\frac{\partial D_{..k}}{\partial x_n} Э_{knq} = \frac{\partial^2 D^{N-1}_{...}}{\partial x_n \partial x_k} Э_{knq} + \frac{\partial D^{N}_{..k}}{\partial x_n} Э_{knq} + D^{N+1}_{..kn} Э_{knq} = \frac{\partial D^{N}_{..k}}{\partial x_n} Э_{knq} + D^{N+1}_{..kn} Э_{knq} = T^{N}_{..q}.$$

Закон генерации и залечивания источников дефектов предпоследнего уровня имеет вид:

$$\frac{\partial T^{N}_{..q}}{\partial x_q} = \frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{\partial D^{N}_{..k}}{\partial x_n} Э_{knq} + D^{N+1}_{..kn} Э_{knq}\right) = \frac{\partial D^{N+1}_{..kn}}{\partial x_q} Э_{nqk} = T^{N+1}_{..kk}$$

$$\frac{\partial T^{N}_{..q}}{\partial x_q} = T^{N+1}_{..kk}$$

После N шагов этого алгоритма мы придем к полю мультиперемещений ранга ноль (скалярному полю) D, на котором естественным образом алгоритм завершается.

5. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛЕЙ ДЕФЕКТОВ

Предложенный выше алгоритм кинематического исследования полей дефектов позволяет дать следующую общую картину кинематических моделей дефектных сплошных сред, соответствующую имеющимся экспериментальным фактам:

1. Можно считать обоснованными факты генерации и залечивания дефектов вплоть до второго уровня, а именно:
   - нулевого уровня с тензором несовместности $T_i^1 = -2\omega_i$ (турбулентность, как дефект потенциального состояния среды);
   - первого уровня с тензором несовместности $T_{ij}^2 = \Xi_{ij}$ (дислокации);
   - второго уровня с тензором несовместности $T_{ijk}^3 = \Omega_{ijk}$ (обобщенные дисклинации – «классические» дисклинации, кавитация, двойникование).

Действительно, такое явление как турбулентность является известным, экспериментально зафиксированы дефекты типа дислокации и дисклинации. В работе предложено объяснение и взаимосвязь процессов генерации и залечивания.

2. Если предположить, что факт генерации и залечивания дисклинаций действительно имеет место, то в соответствии с данным исследованием следует признать существование дефектов третьего уровня с сохраняющимся (по крайней мере) тензором несовместности $T_{ijnm}^4 = \Theta_{ijnm}$. Они должны быть введены в рассмотрение. В противном случае обобщенные дисклинации не могли бы рождаться и исчезать.
3. Модель дефектных сплошных сред N-го уровня имеет следующую кинематическую структуру:
   - Источники дефектов (тензоры несовместностей) до валентности N включительно подчиняются соотношениям:

$$T_{ijkq}^4 = \frac{\partial D_{ijkn}}{\partial x_m} Э_{nmq} = \frac{\partial D_{ijkn}^3}{\partial x_m} Э_{nmq} \qquad \frac{\partial T_{ijkq}^4}{\partial x_q} = 0$$

$$T_{ijk}^3 = \frac{\partial D_{ijn}}{\partial x_m} Э_{nmk} = \frac{\partial D_{ijn}^2}{\partial x_m} Э_{nmk} + D_{ijnm}^3 Э_{nmk} \qquad \frac{\partial T_{ijk}^3}{\partial x_k} = T_{ijnm}^4$$

$$T_{ij}^2 = \frac{\partial D_{in}}{\partial x_m} Э_{nmj} = \frac{\partial D_{in}^1}{\partial x_m} Э_{nmj} + D_{inm}^2 Э_{nmj} + D_{inm}^3 Э_{nmj} \qquad \frac{\partial T_{ij}^2}{\partial x_j} = T_{inm}^3$$

$$T_i^1 = \frac{\partial D_n}{\partial x_m} Э_{nmi} = \frac{\partial D_n^0}{\partial x_m} Э_{nmi} + D_{nm}^1 Э_{nmi} + D_{nm}^2 Э_{nmi} + D_{nm}^3 Э_{nmi} \qquad \frac{\partial T_i^1}{\partial x_i} = T_{nm}^2$$

   - Дефектные поля до валентности N включительно определяются как соответствующие «квадратуры»:

$$D = (D^0) + D^1 + D^2 + D^3 + D^4 + \dots$$

$$D_i = (\frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1) + D_i^2 + D_i^3 + D_i^4 + \dots$$

$$D_{ij} = (\frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2) + D_{ij}^3 + D_{ij}^4 + \dots$$

$$D_{ijk} = (\frac{\partial^3 D^0}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} + D_{ijk}^3) + D_{ijk}^4 + \dots$$

$$D_{ijks} = (\frac{\partial^4 D^0}{\partial x_s \partial x_k \partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^3 D_i^1}{\partial x_s \partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial^2 D_{ij}^2}{\partial x_s \partial x_k} + \frac{\partial D_{ijk}^3}{\partial x_s} + D_{ijks}^4) + \dots$$

Здесь введены обозначения в соответствии с которыми в круглые скобки заключены непрерывные части полей.

- Разрывные поля дефектов определяются равенствами:

$$D^1 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^1 dy_i ,$$

$$D_i^2 = \int_{M_0}^{M_x} D_{ij}^2 dy_j , \quad D^2 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^2 dy_i ,$$

$$D_{ij}^3 = \int_{M_0}^{M_x} D_{ijk}^3 dy_k , \quad D_i^3 = \int_{M_0}^{M_x} D_{ij}^3 dy_j , \quad D^3 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^3 dy_i ,$$

$$D_{ijk}^4 = \int_{M_0}^{M_x} D_{ijks}^4 dy_s \qquad D_{ij}^4 = \int_{M_0}^{M_x} D_{ijk}^4 dy_k , \quad D_i^4 = \int_{M_0}^{M_x} D_{ij}^4 dy_j , \quad D^4 = \int_{M_0}^{M_x} D_i^4 dy_i ,$$

....

Непрерывные поля - D^0, D_i^1, D_{ij}^2, D_{ijk}^3, D_{ijks}^4, ... и их производные могут быть аргументами вариационного уравнения или соответствующего функционала при построении математических моделей сред с дефектами.

4. Предложенная классификация указывает на следующую связь процессов рождения и уничтожения дефектов разных уровней:

$$\frac{\partial T_i^1}{\partial x_i} = T_{ii}^2 \qquad \frac{\partial(-2\omega_i)}{\partial x_i} = \Xi_{ii}$$

$$\frac{\partial T_{ij}^2}{\partial x_j} = T_{ijj}^3 \qquad \frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_j} = \Omega_{ijj}$$

$$\frac{\partial T_{ijk}^3}{\partial x_k} = T_{ijkk}^4 \qquad \frac{\partial \Omega_{ijk}}{\partial x_k} = \Theta_{ijkk}$$

$$\frac{\partial T_{ijkq}^4}{\partial x_q} = 0 (= T_{ijkqq}^5) \qquad \frac{\partial \Theta_{ijkq}}{\partial x_q} = 0$$

Следовательно, источниками и стоками дефектов N - го уровня могут быть только дефекты $N+1$ - го уровня.

6. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Установлено, что все известные типы дефектов описываются в рамках предложенной теории дефектов (классификации).

- В рамках единой классификации модели сред допускающие наличие потенциала перемещений интерпретируются как модель бездефектной среды (среды Коши). Дефектами нулевого уровня являются разрывы в потенциале перемещений. Источником дефектов нулевого уровня является вектор поворотов - тензор первой валентности.
- В рамках предложенной единой классификации дислокации являются дефектами первого уровня (среды Папковича). Среды Папковича допускают одноуровневую систему дефектов – дислокации. Здесь дислокации яывляются сохраняющимися дефектами, не способными рождаться и исчезать Источником дислокации является тензор второго ранга.
- Установлено, что модели второго уровня (среды Сен-Венана) имеют сложную структуру и включают три сорта дефектов. Дефекты здесь определяются тензором третьего ранга. Этот тензор является источником дефектов второго уровня. Указана следующая структура дефектов второго уровня:
    - классические дефекты - дисклинации определяются как антисимметричная часть этого тензора третьего ранга (под дисклинациями понимаются дефекты связанные с разрывами в поле поворотов);
    - классификация позволяет прогнозировать существование еще двух видов дефектов в средах второго уровня, - они определяются через симметричную часть тензора третьего ранга:
        - один из этих видов определяет скачки в изменении объема - вектор «кавитации».
        - второй сорт новых дефектов второго уровня определяет скачки в компонентах тензора девиатора деформаций (тензор третьего ранга) – тензор «двойникования».

Дефекты второго уровня назовем обобщенными дисклинациями.

- Установлена возможность существования дефектов более высокого уровня. Необходимость существования дефектов третьего уровня ~~является~~ определяется условием генерации дефектов второго уровня. Эти дефекты описываются тензором четвертого ранга и имеют сложную иерархию внутри класса по сортам. Источником дефектов третьего уровня является тензор четвертого ранга.
- Дано обобщение классификации на дефекты любого конечного уровня. Показано, что наличие дефектов N-го уровня с необходимостью определяется возможностью генерации дефектов N-1-го уровня. Предложенная классификация позволяет описать список аргументов функционала при построении математических моделей сред различной сложности вариационным методом:
- При формулировке математической постановки модели сред Коши основными кинематическими переменными для формулировки лагранжиана такой модели среды будут являться необходимое число раз дифференцируемые поля φ и D_i^i .
- При формулировке математической постановке модели сред Папковича (Коссера) основными кинематическими переменными для формулировки

лагранжиана такой модели среды являются r_i^0, ω_k^Ξ, θ^Ξ, γ_{ij}^Ξ. Среды Папковича (Коссера) в общем случае описываются двенадцатью степенями свободы. Среды Папковича (Коссера) в общем случае описываются двенадцатью степенями свободы – непрерывными полями r_i^0, ω_k^Ξ, θ^Ξ, γ_{ij}^Ξ. Пространство сред Папковича (Коссера) содержит в качестве подпространств «классическую» среду Коссера с шестью степенями свободы r_i^0, ω_k^Ξ, среды с «пористостью» с четырьмя степенями свободы r_i^0, θ^Ξ, среды с «двойникованием» с восемью степенями свободы r_i^0, γ_{ij}^Ξ и классические среды (среды Коши) с тремя степенями свободы r_i^0.

- При формулировке математической постановки модели сред Сен-Венана следует иметь ввиду, что в общем случае описываются тридцатью девятью степенями свободы: r_i^0, ω_k^Ξ, θ^Ξ, γ_{ij}^Ξ, ω_{ij}^Ω, θ_i^Ω, γ_{ijk}^Ω. Они допускают двухуровневую систему дефектов: первый уровень – дислокации, способные как сохраняться, так и рождаться или исчезать; второй уровень дефектов – сохраняющиеся дисклинации, кавитация и двойникование. Пространство сред Сен-Венана содержит в себе в качестве подпространств среды Папковича с двенадцатью степенями свободы: r_i^0, ω_k^Ξ, θ^Ξ, γ_{ij}^Ξ, и классические среды с тремя степенями свободы r_i^0.

Выбор той или иной кинематической структуры дефектной среды определяет возможность описания тех или иных физических свойств моделируемой среды. Так , например, модели, построенные на кинематике сред Коши, в принципе не могут служить основой построения теории мелкодисперсных композитов. Действительно, мелкодисперсные включения можно трактовать как дислокации замещения в материнской фазе или матрице. То же самое можно сказать и о плохо дегазированной матрице: пузырьки газа можно трактовать как вакансии. Такие дислокации не рождаются и не исчезают, поэтому можно теорию мелкодисперсных композитов строить как модель дефектной среды первого уровня (с сохраняющимися дислокациями). Если в среде имеют место фазовые переходы, то они могут связываться с появлением дефектов – дислокаций в материнской фазе. Модель такой среды некорректно строить на базе сред Папковича. Минимальной необходимой моделью здесь является модель Сен-венана с генерируемыми дислокациями и сохраняющимися дисклинациями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Де Витт Континуальная теория дисклинации. М., Мир, 1977, 209 с.
2. Лихачев В.А., Волков А.Е., Шудегов В.Е. Континуальная теория дефектов. Л., Изд. Ленингр. Унив-та, 1986, 228 с.
3. Лихачев В.А., Хайров Р.Ю. Введение в теорию дисклинаций. Л., Изд. Ленингр. Унив-та, 1975, 184 с.
4. Лурье С.А., Белов П.А. Математические модели механики сплошной среды и физических полей. М., Изд. ВЦ РАН, 2000, 151 с.

Поступила в редакцию 30 июля 2003 года.