

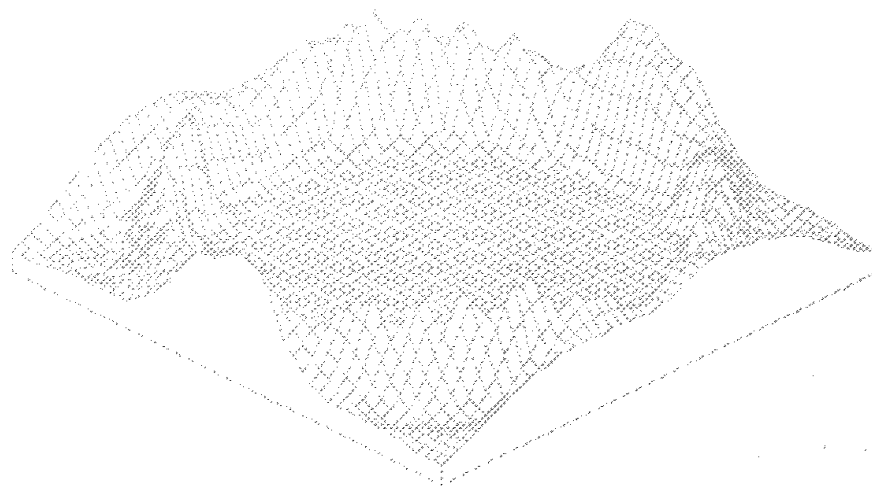
ISSN 1029-6670



ИЗДАНИЕ
ИПРИМ РАН

МЕХАНИКА КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

ОКТАБРЬ-ДЕКАБРЬ 2004
ТОМ 10, №4



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

Экспериментальное и теоретическое исследование свойств электрореологических жидкостей. Зависимость электрореологического эффекта от объемной доли наполнения	
Яновский Ю.Г., Згаевский В.Э., Карнет Ю.Н., Образцов И.Ф.....	457
Экспериментальное моделирование проникания ударников в преграды из композиционных материалов	
Ковяев А.А., Толкачёв В.Ф.....	466
Упругопластический изгиб пластин переменной толщины, армированных волокнами постоянного поперечного сечения по направлениям главных напряжений и деформаций	
Немировский Ю.В., Яновский А.П.....	477
Исследование механических свойств стеклопластиковых стержней методом продольного изгиба	
Савин В.Ф., Луговой А.Н., Блазнов А.Н., Волков Ю.П., Хе А.И.....	499
Математическое моделирование поведения многослойных пластин и цилиндрических оболочек при воздействии высокоэнергетическим импульсом	
Соломонов Ю.С., Белов Н.Н., Югов Н.Т., Карнаухов А.М., Афанасьева С.А., Валуйская Л.А.....	517
Вариант метода ускоренного прогнозирования долговечности полимерных конструкционных материалов при различных режимах нагружения	
Лавров А.В.....	532
Нелинейные задачи расчёта пологих оболочек и пластин с разрывными параметрами	
Попов О.Н., Радченко А.В.....	545
Устойчивость стеснённого стержня из сплава с памятью формы при обратном мартенситном фазовом превращении	
Сильченко Л.Г.....	566
Растяжение пластины с эллиптическим вырезом, усиленной софокусной эллиптической накладкой	
Сильвестров В.В., Землянова А.Ю.....	577
Основы теории межфазного слоя	
Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А., Волков-Богородский Д.Б., Яновский Ю.Г., Кочемасова Е.И., Дудченко А.А., Потупчик Е.М., Шумова Н.П.....	596
Реология и механика магнитореологических суспензий	
Яновский Ю.Г., Теплухин А.В., Филипенков П.А., Карнет Ю.Н.....	613

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕЖФАЗНОГО СЛОЯ¹

Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А., Волков-Богородский Д.Б.
Яновский Ю.Г., Кочемасова Е.И., Дудченко А.А.*, Потупчик Е.М., Шумова Н.П.*

Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

**Московский авиационный институт (Технический Университет), Россия*

РЕЗЮМЕ

В работе, дается последовательное описание математической теории межфазного слоя, которое включает: формальную математическую постановку проблемы; формулировку определяющих уравнений (физических уравнений); решение проблемы идентификации параметров, определяющих неклассические эффекты; аналитические оценки свойств межфазного слоя, оценки влияния свойств межфазного слоя на эффективные характеристики композита, качественный анализ теории. Изложение основано на аналитическом обзоре проведенных авторами исследований, в которых с использованием вариационных формулировок развиты корректные и согласованные варианты моделей, учитывающие масштабные эффекты, приведены модели когезионных и адгезионных взаимодействий в средах, даны примеры моделирования неклассических эффектов в механике разрушения, механике тонкопленочных структур, механике дисперсных композитов.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время вызывают большой интерес проблемы моделирования необычных свойств сверхтонких структур (наночастиц, усов, нанотрубок и нанопластин) и мелкодисперсных композиционных материалов на их основе. Необычные свойства новых материалов в первую очередь связывают с особыми собственными механическими свойствами таких сверхтонких структур и с особенностями взаимодействия таких структур при контакте с матрицей. Попытки объяснить особенности поведения таких композитов при деформировании на основе традиционных представлений и методов механики деформируемого твердого тела в целом следует признать неудачными. Методы физического молекулярного моделирования в некоторой степени позволяют описать особенности поведения тонких структур и связать их с микроструктурой. Однако в таких подходах имеет место многообразие сценариев моделирования, что в большой степени определяется субъективными пристрастиями исследователя. Эти методы являются весьма эффективными при определении физической картины образования тех или иных структур на молекулярном уровне. При этом актуальная проблема моделирования механических свойств тонких структур и композитов на их основе, а также проблема прогнозирования механических свойств материалов с наноструктурами остается открытой. Следовательно, для моделирования свойств следует привлекать новые подходы.

Можно исходить из того, что композит, рассматриваемый с позиций классической теории упругости, не является непрерывной средой, а является

¹ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 03-01-00165.

средой с распределенной системой дефектов, в качестве которых выступают армирующие наночастицы и, вообще говоря, прилегающие к ним некоторые области матрицы. С такими дефектами связаны внутренние, неучтенные в классической постановке, взаимодействия. Очевидно, что эти взаимодействия характеризуются существенной локальностью, концентрируются около дефектов, границ, поверхностей раздела (масштабные эффекты). Тем не менее, учет этих взаимодействий может оказываться значительным при моделировании сред с высокой концентрацией дефектов и при описании неоднородных сред с развитой системой поверхностей раздела. В этом случае мы говорим о значительном влиянии масштабных эффектов. Для исследования указанных явлений должны привлекаться модели, учитывающие масштабные эффекты. Предлагается использовать корректные согласованные модели механики. Сформулируем требования к таким моделям, оставаясь в рамках линейной теории:

1. Модели должны описывать поведение деформируемых сред с учетом масштабных эффектов. Следовательно, среди физических постоянных такого рода моделей должны содержаться постоянные различной размерности.
2. Полная энергия деформации с фиксированным списком аргументов, записанная для моделей деформирования, должна определяться не только объемной плотностью деформации, но и поверхностной плотностью деформации. При этом имеется в виду поверхностная энергия деформации, не сводящаяся к некоторой энергии деформации по объему. Это требование диктуется необходимостью учитывать поверхностные эффекты, а также масштабные эффекты, связанные с поверхностью тел и с поверхностью раздела различных фракций композита.
3. Модели деформирования должны быть согласованными и корректными, т.е. уравнения равновесия (движения) изучаемых сред и граничные условия, полученные из физических соображений, должны соответствовать вариационной постановке задачи. Таким образом, и уравнения движения должны совпадать с соответствующими уравнениями Эйлера, и статические граничные условия не должны противоречить естественным граничным условиям.
4. Обобщенные модели деформирования, учитывающие масштабные эффекты, должны включать классические модели, не противоречить им и допускать формальный предельный переход к известным классическим вариантам моделей сред. Следовательно, если решение, соответствующее уточненной модели, представить в виде разложения по фундаментальной системе решений, то в этом разложении должны содержаться фундаментальные решения, соответствующие классическим моделям.

К моделям, учитывающим масштабный эффект в первую очередь следует отнести известные модели моментных сред Миндлина, Коссера, Аэро-Кувшинского (среды со стесненным вращением). Следует отметить, что это, как правило, модели сред с несимметричным тензором напряжений. Сюда же следует отнести модели сред, учитывающие поля дефектов в рамках механики сплошной среды: континуальные теории дислокаций В.Ешелби, Р.Витта, Е.Кренера, Набарро и др. и «полевые» теории дефектов А.Голембевская-Ласота, А.Кадич, Д.Еделен и др. Отметим, что для этих моделей не выполняется требование 2. и, как правило, нарушаются условия 3, 4.

В данной работе приводится аналитический обзор проведенных авторами исследований, в которых развиваются корректные и согласованные варианты

моделей, учитывающие масштабные эффекты и удовлетворяющие сформулированным выше требованиям. Модели строятся на основе вариационной формулировки, что обеспечивает их корректность и согласованность. Привлекается новый «кинематический» вариационный принцип [1-8]. Он позволяет последовательно ввести в рассмотрение систему внутренних взаимодействий различного типа в изучаемой среде, как силовой реакции на свойственные среде кинематические связи.

Основные результаты исследований, о которых идет речь в настоящей работе, можно сформулировать следующим образом:

- предложена последовательная классификация кинематических моделей сред и классификация полей дефектов в рамках варианта теории дефектов в сплошных средах [9-11];
- предложена классификация multiscale-моделей на основе анализа операторов разрешающих уравнений [12];
- построена модель межфазного слоя [13-17];
- рассмотрены приложения в области тонких пленок, механике разрушения, механике дисперсно-армированных композитов [13-20];

В данной работе излагаются основы теории межфазного слоя, полученные на базе нового варианта модели сред с сохраняющимися дислокациями. Эту модель можно назвать обобщением модели Миндлина для сред с микроструктурой. Однако она принципиально отличается от моделей Миндлина наличием в лагранжиане поверхностной потенциальной энергии, которая дает возможность описать адгезионные взаимодействия. В заключение дается анализ полученных результатов и сравнение с известными аксиоматическими теориями мелкодисперсных композитов. Отметим, что в работах [21,22] кинематический вариационный метод предлагается использовать для моделирования необратимых процессов. Отметим также, что весьма перспективным для моделирования в рамках континуальных моделей, идентификации параметров моделей представляется использование информации, полученной методами молекулярного моделирования [23,24], которые позволяют изучить структуру межфазных слоев, дать оценку их протяженности.

1. ФОРМУЛИРОВКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.

Для построения моделей сред используется вариант «кинематического» вариационного принципа, развитый в [1-8]. В соответствии с ним по заданным кинематическим связям находится вид функционала энергии для исследуемой среды, и устанавливаются силовые взаимодействия, соответствующие введенным кинематическим связям. Модель среды полностью задается разнообразием вводимых кинематических связей. Далее везде предполагается, что рассматриваются линейные, обратимые процессы. Алгоритм построения модели сплошной среды сводится к следующим шагам:

1. Формулируются свойственные среде кинематические связи.
2. По кинематическим связям строится возможная работа внутренних сил, причем спектр внутренних сил определяется по неопределенным множителям Лагранжа, на которых вводятся кинематические связи.
3. Берутся по частям вариации производных от обобщенных кинематических переменных. Возможная работа внутренних сил преобразуется в линейную вариационную форму. Определяется список аргументов.

4. Выписываются условия интегрируемости линейной вариационной формы (существования потенциальной энергии).
5. В предположении физической линейности из условий интегрируемости линейной вариационной формы строятся физические соотношения.
6. По сформулированным физическим соотношениям строится потенциальная энергия. По потенциальной энергии строится лагранжиан, вычисляется его вариация.

В результате дается полная математическая формулировка моделей, т.е. определяется вариационное уравнение, включающее уравнения равновесия и весь спектр граничных условий. В указанном алгоритме особое место занимают кинематические модели изучаемых сред.

1.1. Кинематические модели сред.

Получены следующие результаты [1,5,6]:

- построена система кинематических связей как последовательная система условий существования вектора перемещений, вектора поворотов и вектора градиентов объемной деформации;
 - получены выражения для вектора перемещения, в котором криволинейный интеграл записывается только через компоненты тензора-девиатора деформации. Эти формулы являются обобщением формулы Чезаро;
 - получены новые соотношения совместности третьего порядка, записанные через компоненты тензора девиатора деформаций;
 - предложена классификация кинематических состояний, которая может являться и классификацией моделей сред.
- Система кинематических связей среды в целом включает следующие соотношения:

1. Расширенные соотношения Коши для компонентов тензора дисторсии - кинематические связи между двенадцатью зависимыми степенями свободы γ_{ij} , θ , ω_k и R_i , которыми наделен произвольно выбранный бесконечно малый параллелепипед:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} - \omega_k \mathcal{E}_{ijk} \quad (1)$$

Здесь, как обычно по повторяющимся индексам осуществляется свертка, γ_{ij} - компоненты тензора девиатора деформаций, θ - объемная деформация, ω_k - вектор поворотов или упругих вращений, \mathcal{E}_{ijk} - компоненты тензора Леви-Чивиты.

2. Условия интегрируемости соотношений (1) (условия интегрируемости перемещений), называемые соотношениями Папковича

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \gamma_{ji}}{\partial x_\alpha} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} \mathcal{E}_{\alpha ij} \quad (2)$$

3. Условия интегрируемости соотношений (2) (условия интегрируемости вектора поворотов)

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_m} (\gamma_{\beta\mu} + \frac{1}{3} \theta \delta_{\beta\mu}) \mathcal{E}_{\alpha\beta i} \mathcal{E}_{m\mu j} = 0. \quad (3)$$

Соотношения (3), обеспечивающие непрерывность упругих поворотов, являются уравнениями совместности Сен-Венана. Предложенная форма записи уравнений

неразрывности позволяет разрешить последние относительно производных от объемной деформации в явной форме, выразив их через компоненты тензора-девиатора деформаций:

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \delta_{ij} + \gamma_{m\mu} \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta\mu j} \right). \quad (4)$$

Систему уравнений (4) можно проинтегрировать в квадратурах:

$$\theta = \theta^0 + \theta_i^0 (x_i - x_i^0) + 3 \int_{M_0}^{M_1} (x_i - y_i) \frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \delta_{ij} + \gamma_{m\mu} \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta\mu j} \right) dy_j.$$

Необходимыми и достаточными условиями (для односвязных сред) интегрируемости системы (4) являются, новые уравнения совместности третьего порядка, записанные относительно только компонент тензора-девиатора деформаций:

$$\frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \left(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\eta} + \gamma_{m\mu} \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta\mu\eta} \right) \mathcal{E}_{\rho\eta} = 0.$$

Эта система уравнений совместности представляет собой тензорное уравнение второго ранга, ненулевые компоненты которого составляют тензор-девиатор.

Получено новое выражение для вектора перемещения, в котором криволинейный интеграл записывается только через компоненты тензора-девиатора деформации γ_{ij} и, следовательно, описывает перемещения, вызванные лишь деформациями изменения формы. Обозначая этот интеграл через r_i запишем:

$$R_i = R_i^0 + \omega_\alpha^0 (x_\beta - x_\beta^0) \mathcal{E}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3} \theta^0 (x_i - x_i^0) + \frac{1}{3} \theta_j^0 P_{ij}(x^0) + r_i$$

$$r_i = \int_{M_0}^{M_1} [\gamma_{ij} + (y_i - x_i) \frac{\partial \gamma_{jm}}{\partial y_n} \mathcal{E}_{\alpha mn} \mathcal{E}_{\alpha ni}] dy_j +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{M_0}^{M_1} P_{ij}(y) \left[-\frac{\partial^2 \gamma_{jk}}{\partial y_m \partial y_n} + \frac{\partial^2 \gamma_{jm}}{\partial y_k \partial y_n} + \frac{\partial^2 \gamma_{kn}}{\partial y_j \partial y_m} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu m}}{\partial y_\mu \partial y_m} \delta_{jk} \right] dy_k$$

Здесь $P_{ij}(a) = (x_i - a_i)(x_j - a_j) - \frac{1}{2} \delta_{ij} (x_k - a_k)(x_k - a_k)$.

Таким образом, с точностью до полинома второго порядка, вектор перемещений определяется деформациями изменения формы. Нетрудно убедиться, что компоненты тензора дисторсии с точностью до линейных полиномов также определяются лишь деформациями изменения формы:

$$\theta = \theta^0 + \theta_i^0 (x_i - x_i^0) + \frac{\partial r_k}{\partial x_k},$$

$$\omega_i = \omega_i^0 + \frac{1}{3} \theta_\alpha^0 (x_\beta - x_\beta^0) \mathcal{E}_{\alpha\beta i} - \frac{1}{2} \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} \gamma_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial r_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial r_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{\partial r_k}{\partial x_i} \delta_{jk}$$

Записанные кинематические равенства в дальнейшем будут являться базой для построения уточненных моделей сред.

1.1.1. Классификация кинематических состояний по гладкости.

Показано [11,12], что из анализа кинематических соотношений следует общее представление вектора перемещений в форме разложения на

потенциальную и вихревую составляющие. Поле перемещений для исследуемой среды, вообще говоря, находится как решение начально-краевой задачи уравнений движения среды. Уравнениями движения определяется конкретный вид потенциальной и вихревой составляющих. Операторы уравнений движения в перемещениях (точнее вид соответствующих характеристических уравнений) определяет изменяемость соответствующих полей перемещений, характер multiscale эффектов. Предполагается, что в достаточно общем случае разрешающие операторы для потенциальной и вихревой составляющих могут быть представлены как произведения операторов Лапласа и Гельмгольца. На этой основе предложена классификация кинематических моделей по крайевым эффектам и multiscale эффектам [12]. Краевые эффекты определяются оператором Лапласа, а multiscale эффекты определяются дополнительными параметрами в операторах Гельмгольца. С оператором Гельмгольца в разрешающих уравнениях связана возможность описания масштабных эффектов в различных моделях сред (моментные модели сред (Cosserat E., Cosserat F., 1909), полевые теории дефектов (Kadich, Edelen, 1983)) и, следовательно, разложения исходного состояния (краевых эффектов и multiscale эффектов) по базовой системе кинематических потенциальной и вихревой состояний.

Дано определение моделей сред с различными классами масштабных эффектов, которые позволили ввести естественную классификацию моделей сред с масштабными эффектами. Показано [12], что достаточно широкий круг моделей с модулями упругости разной размерности подпадают под эту классификацию. Предложена общая кинематическая структура уравнений моделей сплошной среды, допускающих описание масштабных эффектов различного типа, которым отвечает различная экспоненциальная изменяемость, соответствующая различной природе взаимодействий. В следующем разделе предлагается еще один вариант классификации, в основе которой лежит возможность описания кинематики сред с различной степенью "несовместностей", т.е. нарушением условий интегрируемости.

1.1.2. Классификация кинематических состояний по «разрывам».

Рассмотрим снова соотношения Коши для тензора дисторсии (1) и получим «обобщенную формулу Чезаро», определяющую поле перемещений, с учетом существования непрерывно распределенных полей "несовместностей" различного типа (полей различного типа непрерывно распределенных дефектов). Положим, что для рассматриваемого здесь случая не выполняются условия интегрируемости перемещений (иначе говоря, соотношения Папковича являются неоднородными). Тогда можно записать следующие выражения для тензора поворотов:

$$\omega_i = \omega_i^* + \int_{M_0}^{M_i} \left[\frac{\partial \gamma_{jm}}{\partial y_n} \mathcal{E}_{nmi} - \frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial y_n} \mathcal{E}_{nii} + \left(\mathcal{E}_{ji} - \frac{1}{2} \mathcal{E}_{pp} \delta_{ij} \right) \right] dy_j \quad (5)$$

Тензором \mathcal{E}_{ji} в (5) определяется неоднородность соотношений Папковича

$$\left(\gamma_{in} + \frac{1}{3} \theta \delta_{in} - \omega_k \mathcal{E}_{ink} \right)_{,m} \mathcal{E}_{nmj} = \mathcal{E}_{ij}$$

Непрерывный тензор "несовместностей" \mathcal{E}_{ij} перемещений является тензором плотности дислокаций (Wit, 1960) и подчиняется дифференциальному закону

сохранения: $\frac{\partial \Xi_{ij}^{\varepsilon}}{\partial x_j} = 0$. Решение неоднородных уравнений Папковича (9)

представляется в виде суммы решения однородного уравнения Папковича d_{ij}^0 и частного решения неоднородных уравнений Папковича d_{ij}^{ε} : $d_{ij}^{\varepsilon} = d_{ij}^0 + d_{ij}^{\varepsilon}$. Очевидно, что наряду с d_{ij}^{ε} можно рассмотреть как независимые «обобщенные

перемещения» следующие величины: $\gamma_{ij}^{\varepsilon}$, ω_k^{ε} , θ^{ε} ($d_{ij}^{\varepsilon} = \gamma_{in}^{\varepsilon} + \frac{1}{3}\theta^{\varepsilon}\delta_{in} - \omega_k^{\varepsilon}\varepsilon_{ink}$).

Эти «обобщенные перемещения», связаны со своей «обобщенной деформацией» - тензором "несовместностей" Ξ_{ij}^{ε} (аналог соотношений Коши):

$$(\gamma_{in}^{\varepsilon} + \frac{1}{3}\theta^{\varepsilon}\delta_{in} - \omega_k^{\varepsilon}\varepsilon_{ink})_{,m}\varepsilon_{nmj} = \Xi_{ij}^{\varepsilon} \quad (6)$$

Пользуясь терминологией среды Коссера, $\omega_k^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial r_i^0}{\partial x_j}\varepsilon_{ijk}$ называют стесненным

вращением, а ω_k^{ε} - свободным вращением или спином. Аналогично, будем называть γ_{ij}^0 , и θ^0 - стесненными деформациями, а $\gamma_{ij}^{\varepsilon}$, и θ^{ε} - свободными деформациями. Этот анализ можно продолжить, записав условиями интегрируемости соотношений (5), которыми являются следующие «обобщенные соотношения Сен-Венана». Более подробный анализ кинематических соотношений приведен в работе [10] с позиции теории полей дефектов в средах. С точки зрения общей классификации моделей сред с непрерывными полями дефектов [10] модели сред с кинематикой, определяемой совокупностью соотношений (1), (6) соответствуют классу моделей сред с сохраняющимися дислокациями. Анализ кинематических моделей таких сред необходим для построения корректных моделей, учитывающих когезионные взаимодействия и связанные с ними масштабные эффекты.

1.2. Математическая модель среды Папковича-Коссера.

В работах [4-8,13-15] приводится последовательное построение некоторых моделей сред, учитывающих масштабные эффекты. Здесь ограничимся рассмотрением модели среды с сохраняющимися дислокациями, кинематика которой определяется соотношениями (1), (6). В соответствии с принципом возможных перемещений запишем выражение для вариации работы внутренних усилий на указанных кинематических связях. Вводя связи с помощью тензора множителей Лагранжа σ_{ij} , m_{ij} получим:

$$\delta U = \iiint \left\{ \sigma_{ij}\delta(\gamma_{ij}^0 + \frac{1}{3}\theta^0\delta_{ij} - \omega_k^0\varepsilon_{ijk} - \frac{\partial R_i^0}{\partial x_j}) + m_{ij}\delta[\Xi_{ij}^{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x_m}(\gamma_{in}^{\varepsilon} + \frac{1}{3}\theta^{\varepsilon}\delta_{in} - \omega_k^{\varepsilon}\varepsilon_{ink})\varepsilon_{nmj}] \right\} dV$$

Физический смысл множителей Лагранжа σ_{ij} очевиден. Этим тензором описывается спектр взаимодействий, соответствующих введенным кинематическим связям (1). Соответственно, m_{ij} имеет смысл тензора моментных напряжений, который отвечает кинематическим связям (6).

Далее используем разложение тензора несовместностей Ξ_{ij} на девиатор, шаровой и антисимметричный тензоры:

$$\Xi_{ij} = \xi_{ij} + \frac{1}{3}\xi\delta_{ij} - \xi_k\mathcal{E}_{ijk},$$

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}(\Xi_{ij} + \Xi_{ji}) - \frac{1}{3}\Xi_{pp}\delta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{in}^{\Xi}}{\partial x_m}\mathcal{E}_{nmj} + \frac{\partial\gamma_{jn}^{\Xi}}{\partial x_m}\mathcal{E}_{nmi}\right) + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial\omega_i^{\Xi}}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_j^{\Xi}}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial\omega_k^{\Xi}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)$$

$$\xi = \Xi_{ij}\delta_{ij} = -2\frac{\partial\omega_k^{\Xi}}{\partial x_k}, \quad \xi_k = -\frac{1}{2}\Xi_{ij}\mathcal{E}_{ijk} = -\frac{\partial\gamma_{kj}^{\Xi}}{\partial x_i} + \frac{1}{3}\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_n^{\Xi}}{\partial x_m}\mathcal{E}_{nmk}$$

Введем также разложения векторных и тензорных величин на составляющие по нормали n_k и по касательной к поверхности исследуемого тела:

$$\omega_k^{\Xi} = \hat{\omega}_k^{\Xi} + \omega^{\Xi}n_k, \quad \gamma_{ij}^{\Xi} = \hat{\gamma}_{ij}^{\Xi} + \hat{\gamma}_j^{\Xi}n_i + \hat{\gamma}_i^{\Xi}n_j + \gamma^{\Xi}n_in_j, \quad R_k^0 = \hat{R}_k^0 + R^0n_k$$

и

$$d_{ij}^{\Xi} = \gamma_{ij}^{\Xi} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij} - \omega_k^{\Xi}\mathcal{E}_{ijk} =$$

$$= (\hat{\gamma}_{ij}^{\Xi} + \hat{\gamma}_j^{\Xi}n_i + \hat{\gamma}_i^{\Xi}n_j + \gamma^{\Xi}n_in_j) + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij} - (\hat{\omega}_k^{\Xi} + \omega^{\Xi}n_k)\mathcal{E}_{ijk}$$

где соответственно:

$$\hat{\gamma}_{pq}^{\Xi} = \gamma_{pq}^{\Xi}(\delta_{iq} - n_in_q)(\delta_{np} - n_n n_p), \quad \hat{\omega}_k^{\Xi} = \omega_k^{\Xi}(\delta_{kq} - n_k n_q), \quad \hat{R}_k^0 = R_k^0(\delta_{kq} - n_k n_q),$$

$$\hat{\gamma}_n^{\Xi} = \gamma_{pq}^{\Xi}n_q(\delta_{np} - n_n n_p), \quad \omega^{\Xi} = \omega_q^{\Xi}n_q, \quad R^0 = R_q^0 n_q, \quad \gamma^{\Xi} = \gamma_{pq}^{\Xi}n_p n_q.$$

Наконец, рассмотрим выражение для вариационной формы δU . Проводя интегрирование по частям и используя введенные обозначения, можно установить списки аргументов объемной U_V и поверхностной U_F плотностей потенциальной энергии [14,15]. В результате, считая, что вариационная линейная форма интегрируема (существует потенциальная энергия), можно получить:

$$U_V = U_V(\gamma_{ij}^0; \gamma_{ij}^{\Xi}; \xi_{ij}; R_k^0; \omega_k^0; \omega_k^{\Xi}; \xi_k; \theta^0; \theta^{\Xi}; \xi)$$

$$U_F = U_F(\hat{\gamma}_{ij}^{\Xi}; \hat{\gamma}_k^{\Xi}; \hat{\omega}_k^{\Xi}; \hat{R}_k^0; \omega^{\Xi}; \theta^{\Xi}; R^0)$$

Предполагая физическую линейность формулируемой модели, лагранжиан рассматриваемой модели можно записать в виде квадратичной формы своих аргументов с учетом их тензорной размерности. Постоянные в этой квадратичной форме являются физическими постоянными модели и дают общий вид определяющих уравнений. В результате можно записать обобщенные уравнения закона Гука (определяющие соотношения) для общей модели среды Папковича-Коссера внутри области:

для напряжений - $\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial (\partial R_i^0 / \partial x_j)}$,

для тензора моментных напряжений - $m_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \Xi_{ij}}$

для обобщенных когезионных сил - $\sigma_k = \frac{\partial U_V}{\partial R_k^0}$

для тензора взаимодействий в среде Коссера, «дислокационных напряжений» -

$$p_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial d_{ij}^{\Xi}}$$

и, соответственно, обобщенные уравнения закона Гука для модели среды Папковича-Коссера на поверхности области:

$$\bar{\tau}_{ij}^{\Xi} = \frac{\partial U_F}{\partial \bar{\gamma}_{ij}^{\Xi}}, \quad \bar{\tau}_k^{\Xi} = \frac{\partial U_F}{\partial \bar{\gamma}_k^{\Xi}}, \quad \bar{m}_k = \frac{\partial U_F}{\partial \bar{\omega}_k^{\Xi}}, \quad f_k = \frac{\partial U_F}{\partial R_k^0}, \quad m^{\Xi} = \frac{\partial U_F}{\partial \omega^{\Xi}}, \quad \sigma^{\Xi} = \frac{\partial U_F}{\partial \theta^{\Xi}}, \quad f = \frac{\partial U_F}{\partial R^0}$$

Определяющие соотношения позволяют найти конкретный вид лагранжиана и записать вариационную форму краевой задачи (уравнения Эйлера и краевые условия):

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint [(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \sigma_i + X_i) \delta R_i^0 - (\frac{\partial m_m^{\Xi}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} + p_{ij}) \delta d_{ij}^{\Xi}] dV + \\ & + \iint [(Y_i - \sigma_{ij} n_j - f_i) \delta R_i^0 + (Y_i n_i - \sigma_{ij} n_i n_j - f) \delta R^0 + \\ & + (m_m n_m \mathcal{E}_{nmj} - \bar{\tau}_{ij}^{\Xi}) \delta \bar{\gamma}_{ij}^{\Xi} + (m_m n_m \mathcal{E}_{nmk} - \bar{\tau}_k^{\Xi}) \delta \bar{\gamma}_k^{\Xi} - (m_m n_m \mathcal{E}_{ijk} + \bar{m}_k) \delta \bar{\omega}_k^{\Xi} + \\ & - (m_m n_m n_k \mathcal{E}_{ijk} \mathcal{E}_{nmj} + m^{\Xi}) \delta \omega^{\Xi} + (\frac{1}{3} m_m \delta_{ij} n_m \mathcal{E}_{nmj} - \sigma^{\Xi}) \delta \theta^{\Xi}] dF = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, с учетом определяющих соотношений сформулирована математическая постановка задачи для среды Папковича-Коссера, в которой реализуются неоднородные соотношения Папковича (6). Соответствующая краевая задача дается соотношениями (7).

1.3. Математическая модель межфазного слоя.

Для моделирования межфазного слоя привлекается частный вариант модели, учитывающий масштабный эффект. Он основан на использовании математической модели (7) и последовательности упрощающих гипотез. Смысл этих гипотез сводится к следующему:

1. Считается равным нулю модуль, связанный со скалярным произведением вектора перемещений для энергии деформации $CR_k^0 R_k^0$ и все другие модули, являющиеся множителями при произведениях, содержащих в свертках компоненты вектора перемещений. Эта гипотеза имеет четкое физическое обоснование. Без ее введения модель будет противоречить таким экспериментальным данным как закон Паскаля: $\theta = Const$, растяжение стержня и пр.

2. Считается, что тензор свободной дисторсии является линейной комбинацией компонент стесненной дисторсии. Эта гипотеза имеет следующую аналогию - она представляет обобщение условия пропорциональности тензора свободной дисторсии тензору полных напряжений: $d_{ij}^{\Xi} = a \sigma_{ij} = a C_{ijmm} \frac{\partial R_m}{\partial x_m}$.

3. Считается, что энергия деформации, связанная с вихревой составляющей тензора градиента деформаций мала по сравнению с вкладом компонент соответствующих симметричных тензоров.

4. Предполагается, что имеет место «парность» «классических» касательных напряжений.

5. Считается, что перекрестные слагаемые в потенциальной энергии отсутствуют, т.е. соответствующая квадратичная форма имеет канонический вид.

В результате построен частный вариант модели сплошных сред с сохраняющимися дислокациями [14-18], который учитывает масштабные эффекты внутри тела, а также соответствующие поверхностные явления. Сформулирована общая математическая постановка соответствующей краевой задачи. Она полностью определена следующим функционалом Лагранжа и вытекающим из него вариационным уравнением Эйлера и естественными граничными условиями.

В пределах этой постановки сформулированы уравнения закона Гука. Напряжения определены классическими уравнениями:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial (\partial R_i^a / \partial x_j)} = 2\mu\gamma_{ij} + \left(\frac{2\mu}{3} + \lambda\right)\theta\delta_{ij}$$

Моментные напряжения

$$m_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \Xi_{ij}} = 8\frac{\mu^2}{C}\xi_{ij} + \frac{(2\mu + \lambda)^2}{C}\theta_k\Xi_{ijk}$$

На любой площадке с нормалью n_i вектор сил может быть определен следующим образом:

$$T_i = \left\{2\mu\gamma_{ij} + \left(\frac{2\mu}{3} + \lambda\right)\theta\delta_{ij} + l_0^2 \left[2\mu\Delta\omega_n\Xi_{ijn} - \frac{(2\mu + \lambda)^2}{\mu}\Delta\theta\delta_{ij}\right]\right\}n_j + \\ + l_0^2(\delta_{ij} - n_i n_j)\frac{\partial}{\partial x_q} \left[-2\mu\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_p} + \frac{\partial\omega_p}{\partial x_k}\right)n_p\Xi_{ijk} + \frac{(2\mu + \lambda)^2}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}n_k\delta_{ij}\right], \\ l_0^2 = \frac{\mu}{C}$$

Соответственно вектор моментов имеет вид:

$$M_i = l_0^2 \left[-2\mu(n_m n_j \Xi_{ijn} + n_n n_j \Xi_{jnm})\frac{\partial\omega_n}{\partial x_m} + \frac{(2\mu + \lambda)^2}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x_k}n_k n_i\right], l_0^2 = \frac{\mu}{C}$$

По вектору T_i возможно установить эффективные нормальные напряжения в направлении нормали n_p , и эффективный касательные напряжения в соответствующем касательном направлении. Нормальная компонента вычисляется следующим образом: $\tilde{\sigma}_{ij} = T_i n_j$, две касательные компоненты равны:

$$\tilde{\sigma}_{ij} n_j = T_k (\delta_{ik} - n_i n_k), \quad n_j (\delta_{ij} - n_i n_j) = 0$$

Математическая постановка краевой задачи может быть записана в виде:

$$\iiint (L_{ij} \left[-\frac{l_0^2}{\mu} L_{ij}(\dots) + \delta_{jk}(\dots) \right] R_k + P_i^v) \delta R_i dV + \\ + \iint (M_i - D_{ij} \dot{R}_j) \delta \frac{\partial R_i}{\partial x_q} n_q dF + (P_i^f - T_i) \delta R_i dF = 0 \quad (8)$$

где $D_{ij} \dot{R}_i \dot{R}_j = A n_i n_j \dot{R}_i \dot{R}_j + B (\delta_{ij} - n_i n_j) \dot{R}_i \dot{R}_j$, A, B - постоянные; Δ - оператор Лапласа, P_i^v - вектор плотности внешних нагрузок по объему тела, P_i^f - вектор плотности поверхностных внешних нагрузок, n_i - компоненты вектора нормали к граничной поверхности F , и $L_{ij}(\dots)$ - оператор классической теории упругости:

$$L_{ij}(\dots) = \mu \Delta(\dots) \delta_{ij} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Нетрудно видеть, что величина $D_{ij} \dot{R}_i \dot{R}_j = A n_i n_j \dot{R}_i \dot{R}_j + B (\delta_{ij} - n_i n_j) \dot{R}_i \dot{R}_j$ определяет плотность поверхностной энергии деформации. Этим слагаемым в энергии деформации моделируются адгезионные эффекты на границах фаз. Заметим, что с этой частью энергией деформации связана поправка в неклассические краевые условия. Эффекты адгезии описываются с помощью новых физических постоянных A , B , отвечающих соответственно за нормальную и сдвиговую адгезию. Классические статические краевые условия остаются при этом неизменными. Уравнения (8) указывают и на специальную структуру решения в модели сред с масштабным эффектом, ибо решение задачи, очевидно, распадается на решение, соответствующее уравнению классической теории упругости с оператором $L_{ij}(\dots)$ и решение для модели когезионного поля с оператором

$$-\frac{l_0^2}{\mu} L_{ij}(\dots) + \delta_{jk}(\dots). \text{ Краевая задача в общем случае остается связанной.}$$

Подчеркнем, что когезионные взаимодействия связаны с новым физическим параметром модели C . В работах [5,15] показано, что этот параметр связан с параметрами механики разрушения. Поэтому мы считаем, что этот параметр отвечает за когезионные взаимодействия. Приблизительные оценки этой величины получены из решения задач механики разрушения на примере задачи о трещине нормального отрыва [15]. Тем не менее, как показано в работах [15,16,18] параметры, связанные с моделированием масштабных эффектов когезионного поля могут быть найдены в результате решения задачи идентификации таких макропараметров как эффективные механические характеристики композитов.

Поверхностные эффекты определены коэффициентами A , и B в уравнении (8). Проблема идентификации этих параметров более трудная. В любом случае поверхностные эффекты должны описать местные эффекты, которые сконцентрированы около границ области.

2. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ.

Предложенная модель межфазного слоя использовалась для получения приближенных оценок свойств неоднородных материалов, основанных на последовательных и строгих теоретических положениях. Здесь мы остановимся лишь на некоторых примерах. Потребность моделирования неоднородных сред с неклассическим спектром свойств диктуется имеющимся набором экспериментальных данных. Например, известен эффект зависимости жесткости композитов, усиленных микро- и нано-частицами, от диаметра частиц при постоянной относительной концентрации частиц. Методы определения эффективных характеристик, основанных на использовании классических моделей, по существу не позволяют принимать во внимание подобные эффекты.

Для получения качественных оценок предлагается использовать одномерную постановку задачи, позволяющую получить аналитическое решение проблемы в пределах неклассической модели. Такая постановка допустима при изучении основных особенностей деформации сред с гораздо более полным комплексом свойств по сравнению с классическими средами. Одномерная

постановка задачи дает понимание физического смысла масштабных эффектов и возможность оценки диапазона изменения жесткостных параметров композиционного материала, в котором эффекты масштаба можно трактовать в форме механических эффектов, необычных с точки зрения классического описания. Для описания свойств межфазного слоя были осуществлены следующие шаги. Рассматривается двухфазный композит. Длина первой фазы определяется интервалом $x_0 \leq x < x_1$, физические параметры первой фазы определены модулем Юнга E_M и когезионным модулем C_M . Длина второй фазы определяется интервалом $x_1 < x \leq x_2$, физические и когезионным модулем C_D . Составной фрагмент нагружен постоянной растягивающей нагрузкой на границах $x = x_0$ и $x = x_2$. Уравнения равновесия решаются для каждого фрагмента отдельно. Определяется точное общее решение для составного фрагмента. Рассчитывается потенциальная энергия составного фрагмента. Потенциальная энергия композита сравнивается с потенциальной энергией однородного материала для оценки средних свойств составного фрагмента. В результате определяются приведенные характеристики межфазного слоя и эквивалентный модуль упругости для представительного фрагмента. Модуль Юнга эквивалентного однородного фрагмента равен:

$$E_0 = (x_2 - x_0) \left\{ \frac{(x_1 - x_0)(1 - s^M)}{E^M} + \frac{(x_2 - x_1)(1 - s^D)}{E^D} + \frac{[s^M(x_1 - x_0) + s^D(x_2 - x_1)]}{E_f} \right\}^{-1}$$

Здесь длина межфазного слоя в матрице: $x_M = s^M(x_1 - x_0)$, длина межфазного слоя во включении $x_D = s^D(x_2 - x_1)$; $s^M = \frac{tha_M(x_1 - x_0)}{a_M(x_1 - x_0)}$, $s^D = \frac{tha_D(x_2 - x_1)}{a_D(x_2 - x_1)}$, $a_M = \sqrt{\frac{C_M}{E^M}}$, $a_D = \sqrt{\frac{C_D}{E^D}}$, E_f - модуль Юнга межфазного слоя, для модуля Юнга

межфазного слоя имеет место соотношение:

$$E_f = \left[\frac{E^D}{s^M(x_1 - x_0)} + \frac{E^M}{s^D(x_2 - x_1)} \right] / \left[\frac{1}{s^M(x_1 - x_0)} + \frac{1}{s^D(x_2 - x_1)} \right]$$

Могут быть получены следующие качественные оценки эффективных свойств в зависимости от соотношений длины межфазного слоя и диаметров фаз:

1. Размеры фаз значительно превышают характерные длины когезионных взаимодействий $a_M(x_1 - x_0) \gg 1$ и $a_D(x_2 - x_1) \gg 1$. В этом случае справедлива формула осреднения по Рейссу:

$$E_0 = \frac{1}{\left\{ \frac{(1-f)}{E^M} + \frac{f}{E^D} \right\}}$$

2. Размер включения меньше соответствующей характерной длины когезионных взаимодействий $a_D(x_2 - x_1) \ll 1$, концентрация включений мала $a_M(x_1 - x_0) \gg 1$. Получаем вариант неклассической модели (с эффективным модулем включений) с маленькой концентрацией включений.

$$E_0 = \frac{1}{\left\{ \frac{(1-f)}{E^M} + \frac{f}{E_f} \right\}}$$

3. Высокая концентрация $a_M(x_1 - x_0) \ll 1$ больших включений $a_D(x_2 - x_1) \gg 1$. Имеем вариант неклассической модели (с эффективным модулем матрицы), но с классической схемой осреднения по Рейссу.

$$E_0 = \frac{1}{\left\{ \frac{f}{E^D} + \frac{(1-f)}{E_f} \right\}}$$

4. Высокая концентрация $a_M(x_1 - x_0) \ll 1$ маленьких включений и $a_D(x_2 - x_1) \ll 1$. Модуль Юнга эквивалентной гомогенной среды определяется модулем Юнга межфазного слоя.

$$E_0 = E_f$$

Последние оценки справедливы, например, для керамик.

Отметим, что приведенные выше результаты, полученные для чисто когезионного слоя, обобщены и на случай модели, учитывающей адгезионные взаимодействия. При этом новые физические параметры, определяющие свойства поверхности, фигурируют в лагранжиане только при вариации нормальной производной от смещений. Таким образом, учет идеальных адгезионных взаимодействий влияет только на неклассические граничные условия и не затрагивает классические граничные условия. Другими словами, принцип локальности неклассической части решения имеет место. Учет адгезионной пары, определяемой параметром $(A^M - A^D)$, приводит к следующему выражению для оценки эффективного модуля межфазного слоя

$$E_f = \frac{(E_M x_M + E_D x_D + A^M - A^D)}{(x_M + x_D)} = \frac{(E_M x_M + E_D x_D)}{(x_M + x_D)} \left[1 + \frac{(A^M - A^D)}{(E_M x_M + E_D x_D)} \right]$$

Для оценки свойств периодической структуры рассмотрена модельная задача для составного стержня, который состоит из $N+1$ фрагмента матрицы (с характеристиками E_M, C_M) и N фрагментов армирующего материала (с характеристиками E_D, C_D). Стержень находится в условиях одноосного растяжения. Получена следующая простая оценка

$$E_0 = \frac{E^M}{\left[1 - \frac{(E^D - E^M)}{E^D} \left(f + 2N \frac{x_f}{(l_M + l_D)} \right) \right]}$$

где l_D - объемное содержание включений, l_M - объем второй фазы (матрицы), f - относительный объем первой фазы ($f = \frac{l_D}{(l_M + l_D)}$), x_f - эффективная характеристика длины межфазного слоя:

$$x_f = \frac{(E_D - E_M) x_M x_D}{(E_M x_M + E_D x_D)} \left[1 + \frac{E_M E_D (x_M + x_D)^2}{x_M x_D (E_D - E_M)^2} \frac{(A^M - A^D)}{(E_M x_M + E_D x_D)} \right]$$

Использование приведенных соотношений для описания известных экспериментальных данных показало, что теоретические результаты, полученные в рамках общей модели, находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными во всем диапазоне объемных содержаний включений и для всего диапазона размеров включений [14,18]. Развитая теория позволяет дать

некоторую новую интерпретацию межфазного слоя. Обычно принято считать, что межфазный слой имеет установленные геометрические размеры и физические свойства. Развита теория дает другую интерпретацию межфазного слоя. Она позволяет определить межфазный слой как область композита, где механические свойства отличаются от свойств матрицы или включения. Механические свойства межфазного слоя - переменные и изменяются непрерывно по экспоненциальному закону от свойств включения до свойств матрицы.

Отметим некоторые качественные особенности результатов, полученных на основе предложенного варианта теории межфазного слоя. Вообще говоря, проблема определения эффективных параметров композита, составленного из изотропной матрицы и малого количества включений, решалась в работах Mura T., Tucker C.L., Liang E.; Odegard G.M., Gates T.S., Milwaukee Wu, 2002; Mori T., Tanaka K. и др. Для того, чтобы учесть конечную концентрацию включений, как правило, используются такие методы как: метод Mori-Tanaka (метод эквивалентных включений, Mori T., Tanaka K., 1973), самосогласованный метод эквивалентной матрицы, Wakashima K., Otsuka M., Umekawa S., 1974; Budiansky B., 1965) и метод, основанный на анализе периодических структур (Bensoussan A., Papanicolaou G., 1978; Nemat-Nasser S., Iwakuma T., Hejazi M., 1982; Nunan K.C., Keller J.V., 1984). Публикации, посвященные изучению эффективных характеристик композитов, могут быть традиционно подразделены на три группы: метод эффективных включений, метод эффективной матрицы, и метод, основанный на гипотезе трех фаз (Riccardi A., Montheillet F., 1999). Важно отметить, что модель межфазного слоя, предложенная в этой работе, включает все три упомянутых метода. Такой вывод можно сделать на основе рассмотрения модельной одномерной постановки задачи для структуры с двумя фазами. Используя теорию межфазного слоя, можно получить соотношение, которое является последовательным неклассическим обобщением формулы Рейсса. Рассмотрим соотношение для обобщенной жесткости и перепишем его следующим образом:

$$\frac{l}{E_0} = \frac{(I_M - 2Nx_f)}{E^M} + \frac{(I_D + 2Nx_f)}{E^D}$$

$$x_M = a_M^{-1} th(a_M I_M / N), \quad x_D = a_D^{-1} th(a_D I_D / N), \quad l = I_D + I_M,$$

$$x_f = x_D x_M (E^D - E^M)(E^D x_D + E^M x_M)^{-1}$$

$$E_f = (E^D x_D + E^M x_M)(x_D + x_M)^{-1}$$

Модель эффективной матрицы, модель эффективного включения и модель трех фаз может быть получена как следствие этой формулы. В соответствии с моделью эффективной матрицы мы получаем следующую величину эффективной жесткости: $\frac{l}{E_0} = \frac{I_M}{E^M} + \frac{I_D}{E^D}$. Здесь, эффективный модуль матрицы E^M может

быть рассчитан по формуле $\frac{1}{E^M} = \frac{1}{E^M} - \left(\frac{1}{E^M} - \frac{1}{E^D}\right) \frac{2x_f}{I_M / N}$. В соответствии с моделью эффективного включения модуль композита может быть определен как $\frac{l}{E_0} = \frac{I_M}{E^M} + \frac{I_D}{E^D}$, а эффективный модуль включения E^D может быть определен

как $\frac{1}{E_*^D} = \frac{1}{E^D} - \left(\frac{1}{E^M} - \frac{1}{E^D}\right) \frac{2x_f}{l_D/N}$. В соответствии с моделью трех фаз модуль

композита может быть определен как $\frac{l}{E_0} = \frac{l_M^*}{E^M} + \frac{l_D^*}{E^D} + \frac{l_f}{E_f}$, где свойства фаз определены модулями E^M , E^D , и E_f , соответственно, и длины фаз $l_M^* = l_M - 2Nx_M$, $l_D^* = l_D - 2Nx_D$ и $l_f = 2N(x_M + x_D)$. Таким образом, использование модели межфазного слоя позволяет обосновать гипотезы, обсужденные выше.

Модель межфазного слоя позволяет предсказывать свойства наполненных композитов и для случая малой концентрации и для случая большой концентрации, для произвольных отношений между фазами, для широкого диапазона размеров включений (неклассическое поведение). Все результаты могут быть получены в рамках общего подхода без дополнительных гипотез. Используя эту теорию, мы можем определять параметры межфазного слоя, его длины, и модули упругости. Причем, параметры межфазного слоя полностью определены классическими и неклассическими свойствами фаз.

3. НЕКОТОРЫЕ ВЫВОДЫ.

Сформулированы теоретические основы межфазного слоя. Построен наиболее простой вариант теории. С ее помощью удалось объяснить многие известные неклассические эффекты механики сплошной среды, связанные с масштабными эффектами. В рамках проведенных исследований получены следующие результаты:

В механике разрушения:

- показано, что моделируются полные несингулярные напряжения в вершине трещины с углом раствора трещины не 180, а 0 градусов (неклассический эффект);
- на модельной задаче дано теоретическое обоснование известной гипотезы Баренблатта о существовании когезионного поля - теория когезионных взаимодействий;
- установлена связь длины зоны когезионных взаимодействий (новая физическая постоянная) с параметрами механики разрушения: величиной критического раскрытия трещины; с теоретическим пределом прочности; с удельной энергией разрушения.

В теории тонких пленок:

- моделируется эффект увеличения жесткости пленки с уменьшением ее толщины (неклассический эффект);
- моделируется расслоение многослойной пленки вне зоны действия индентора при прокатке (неклассический эффект);
- моделируется "осыпание" тонких пленок при резке (неклассический эффект).

В теории мелкодисперсных композитов:

- моделируются эффекты усиления мелкодисперсных композитов с уменьшением радиуса армирующих частиц при постоянном объемном содержании включений (неклассический эффект);
- дано обоснование известных гипотез: эффективной матрицы, эффективного включения, эффективного континуума;

- дано теоретическое обоснование гипотезы существования межфазного слоя и предложен вариант теории межфазного слоя.

В заключение отметим, что дальнейшее развитие предлагаемого подхода к моделированию новых материалов с учетом масштабных эффектов связано с построением эффективных численно-аналитических методов на основе предложенной теории, развитием методов идентификации параметров. Дополнительные исследования требуют поверхностные эффекты, что также связано с моделированием и подробным анализом адгезионных свойств, разработкой методов определения соответствующих характеристик материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье С.А., Белов П.А., Орлов А.П. Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые обобщения. Механика композиционных материалов и конструкций, 1996, т.2, №2, с.84-104.
2. Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А. Об обобщенных разложениях в прикладной теории упругости и их приложения к конструкциям из композитов. Механика композиционных материалов и конструкций, 1997, №3, с.62-79.
3. Lurie S.A., Belov P.A., Orlov A.P. Continuum mechanics models with generalized kinematics and fracture mechanics application. 16th Canadian Congress of Applied Mechanics, Quebec, Canada, 1997, pp.93-94.
4. Белов П.А., Лурье С.А. Модели деформирования твердых тел и их аналоги в теории поля. МТГ, Изв. РАН, 1998, №3, с.157-166.
5. Образцов И.Ф., Лурье С.А., Яновский Ю.Г., Белов П.А. О некоторых классах моделей тонких структур. Изв. Вузов, Северо-Кавказский регион, Естественные науки (к 80-летию академика И.И. Воровича), Ростов-на-Дону, 2000, №3 с.110-118.
6. Лурье С.А., Белов П.А. Математические модели механики сплошной среды и физических полей. М., Из-во ВЦ РАН, 2000, 151с.
7. Лурье С.А., Белов П.А., Кривошуккая И.И. Об одной модели когезионных взаимодействий в сплошных средах. Конструкции из композиционных материалов, №2, 2000, М., ВИМИ, Журнал посвящен 80-летию академика И.Ф.Образцова.
8. Белов П.А., Лурье С.А. Модели сплошных сред с неинтегрируемым полем тензора деформаций. Сборник аннотаций докладов 8-го Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике. Пермь, 2001, с.98.
9. Lurie S., Belov P. About New classification of the defects in the solid mechanics (some applications). 13 Int. Workshop Computational Mechanics of Materials, Book of Abstracts, Magdeburg, Germany, Sept. 2003, pp.42-43.
10. Белов П.А., Лурье С.А. Общая теория дефектов сплошных сред. Механика композиционных материалов и конструкций, 2003, т.9, №4, с.210-222.
11. Lurie S., Belov P. Multiscale modeling in continuum mechanics of solids. Application in fracture mechanics and mechanics of composites. VII Int. Conf. Computer-Aided Design of Advanced Materials and Technologies, Book of Abstracts, August, Tomsk, 2003, pp.200-201.
12. Бабешко А.В., Лурье С.А., Белов П.А., Яновский Ю.Г. Масштабные эффекты в моделях сплошных сред. Механика композиционных материалов и конструкций, 2002, т.8, №1, с.71-82.

13. Belov P., Tuchkova N., Lurie S. Multiscale modeling of the reinforcement effects of the nanocomposites. 13 Int. Workshop Computational Mechanics of Materials, Book of Abstracts, Germany, Magdeburg, Sept. 2003, pp.69-70.
14. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Nanomechanical Modeling of the Nanostructures and Dispersed Composites, Int. J. Comp. Mater. Scs., 2003, 28(3-4), pp.529-539.
15. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D. Multiscale Modeling in the Mechanics of Materials: Cohesion, Interfacial Interactions, Inclusions and Defects. In book: Analysis and Simulation of Multifield Problems, Springer, 2003, pp.101-110.
16. Lurie S.A., Belov P.A., Zubov V., Tuchkova N.P. Modeling of the interphase layer in the mechanics of composite materials. Identification of the model parameters. Euromech Colloquium 458, Advanced Methods in the Validation and Identification of nonlinear Constitutive Equations in the Solid Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Abstracts, pp.72-74.
17. Lurie S.A., Belov P.A. Mathematical model of the interfacial layer in the mechanics of materials. 6th International Congress on Mathematical Modeling, Nizhni Novgorod, September 2004.
18. Lurie S., Belov P., Tuchkova N. The Application of the multiscale models for description of the dispersed composites. Int. J. Computational Materials Science, A., 2004, 36(2), pp.145-152.
19. Лурье С.А., Белов П.А., Бодунов А.М., Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г. О моделировании масштабных эффектов в тонких структурах. Механика композиционных материалов и конструкций, 2002, т.8, №4, с.585-598.
20. Лурье С.А., Бодунов А.М., Белов П.А., Криволицкая И.И. Масштабные эффекты в тонких пленках. Механика композитных конструкций, ВИМИ, 2002, №2, с.33-40.
21. Лурье С.А., Белов П.А. Вариационная модель диссипативных сред. Механика композиционных материалов и конструкций, 2001, т.7, №2, с.266-276.
22. Лурье С.А., Белов П.А., Яновский Ю.Г. О моделировании теплопереноса в динамически деформируемых средах. Механика композиционных материалов и конструкций, 2000, т.6, №3, с.436-444.
23. Яновский Ю.Г., Никитина Е.А., Теплухин А.В., Басистов Ю.А., Филиппенков П.А., Карнет Ю.Н. Новые компьютерные технологии для моделирования структуры и микромеханических свойств гетерогенных вязкоупругих полимерных сред. Физическая мезомеханика, 2003, т.6, №4, с.129-142.
24. Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г., Згаевский В.Э. Механические свойства межфазных слоев полимерных матричных композитов при больших упругих деформациях. ДАН, 2003, т.389, №5, с.621-623. (Doklady Physics, vol.48, N4, pp.191-193).

Поступила в редакцию 11 ноября 2004 года