УДК 539.3

© 2009 г. П. А. Белов, С. А. Лурье

КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ МИКРОГЕТЕРОГЕННЫХ СРЕД

Предлагается корректная модель сред с микроструктурой (по определению Миндлина), которая определяется наличием свободных деформаций и обобщает известные модели Миндлина, Коссера и Аэро–Кувшинского. Корректность формулировки модели определяется использованием "кинематического" вариационного принципа, основанного на последовательном формальном описании кинематики сред, формулировке кинематических связей для сред разной сложности и построении соответствующей потенциальной энергии деформации с использованием процедуры множителей Лагранжа. Устанавливается система определяющих соотношений и формулируется согласованная постановка краевой задачи. Показывается, что исследуемая модель среды не только отражает масштабные эффекты, аналогичные когезионным взаимодействиям, но также является основой для описания широкого спектра адгезионных взаимодействий. В связи с анализом физической стороны модели предлагается трактовка физических характеристик, ответственных за неклассические эффекты, дается описание спектра адгезионных механических параметров.

Исследуемая модель деформируемой среды по предложенной ранее [1] классификации сред с различными полями дефектов является моделью среды с сохраняющимися дислокациями. Прикладные варианты этой модели привели к объяснению ряда известных неклассических эффектов в механике материалов. Так, было показано, что они позволяют успешно моделировать эффект изменения механических свойств нанокомпозитов с изменением размера армирующих наночастиц при неизменном объемном содержании [2, 3], а также зависимость механических свойств тонких пленок от их толщины [4, 5]. Моделировались [6–9] масштабные эффекты в механике материалов, связанные с когезионными взаимодействиями, предложено описание несингулярных трещин с углом раствора равным нулю, что, по существу, дает формальное математическое обоснование гипотезы Г.И. Баренблатта о существовании когезионного поля. Учет масштабных эффектов позволил построить [2, 3, 7, 8] непротиворечивую теорию межфазного слоя, моделирующего локальные эффекты на границах контактирующих фаз. В рамках этой теории было получено математическое обоснование гипотезы эквивалентной матрицы, эквивалентных включений и т.д. Даны аналитические оценки геометрических и механических свойств межфазного слоя по классическим и неклассическим механическим характеристикам фаз.

В данной работе развивается общий вариант сред с сохраняющимися дислокациями (поток дислокаций через замкнутую поверхность любого объема равен нулю), который обобщает известные модели Миндлина [10, 11], Коссера [12], Тупина [13] и Аэро–Кувшинского [14]. Используется вариационная формулировка моделей на основе "кинематического" вариационного принципа, сформулированного ранее [15–17] и развитого в дальнейшем [6–9]. Показывается, что спектр внутренних взаимодействий полностью определяется системой кинематических связей, реализующихся в среде. Поэтому при формулировке модели на первом этапе исследуются кинематические соотношения модели среды, которые позволяют сформулировать кинематические связи в рамках принципа возможных перемещений. Отметим, например, что в классической теории упругости кинематика полностью определяется симметричными соотношениями Коши. В моментных моделях сред со стесненным кручением кинематика задается совокупностью соотношений Коши и выражений, определяющих производные от вектора поворотов (кривизны) через вектор перемещений [9, 11, 17] и пр. На втором этапе устанавливается список аргументов потенциальной энергии деформации (для обратимых процессов) и функционала Лагранжа[17]. Приводится общий вид определяющих уравнений, соответствующих общей форме потенциальной энергии, проводится их анализ, позволяющий ввести некоторые упрощения, связанные с учетом известных экспериментальных данных. В результате записывается вариационная формулировка краевой задачи. При этом формулируется весь спектр согласованных краевых условий.

1. Кинематическая модель. Запишем известные соотношения для компонент вектора перемещений R_i, получаемые формальным интегрированием несимметричных соотношений Коши $d_{ij} = R_{i,n}$:

$$R_i = R_i^0 + \int\limits_{M_0}^{M_x} d_{in}dx_n; \quad d_{in} = \gamma_{in} + \theta\delta_{in}/3 - \omega_k Э_{ink} \tag{1.1}$$

Здесь γ_{in} — компоненты тензора девиатора деформации, θ — объемная деформация, ω_k — компоненты вектора упругих поворотов (псевдовектора).

Квадратуры несимметричных соотношений Коши (1.1) можно рассматривать как соотношения, определяющие векторный потенциал с компонентами R_i для тензора дисторсии с компонентами d_{ij}.

Запишем условия интегрируемости соотношений Коши относительно вектора перемещений

$$d_{in,m}Э_{nmj} = 0 \tag{1.2}$$

Однородные уравнения (1.2) будем называть однородными уравнениями Папковича, так как именно он впервые оценил значение этих соотношений в иерархии кинематических связей механики сплошной среды. При выполнении равенств (1.2) вектор перемещений с компонентами R_i является векторным потенциалом для тензора дисторсии с компонентами d_{ij}^0:

$$d_{ij}^0 = R_{i,n} \tag{1.3}$$

Отметим, что дифференциальная форма $dR_i = d_{ij}^0 dx_j$ — полный дифференциал.

Рассмотрим теперь неоднородные уравнения Папковича

$$d_{in,m}Э_{nmj} = \Xi_{ij} \tag{1.4}$$

Величина Ξ_{ij} определяет несовместность перемещений. Отметим, здесь Ξ_{ij} — компоненты псевдотензора второго ранга, так как знак компонент меняется при замене правой тройки ортов на левую. В данном случае можно формально ввести вектор перемещений как разность смещений двух бесконечно близких точек с помощью соотношения $dD_i = d_{ij}dx_j$. Однако здесь линейная дифференциальная форма dD_i уже не будет полным дифференциалом, и записанное уравнение для перемещений D_i не интегрируемо. Будем говорить, что вектором с компонентами D_i определяется дефектное поле перемещений. Непрерывный тензор “несовместностей” перемещений с компонентами Ξ_{ij} является тензором плотности дислокаций [18] и подчиняется дифференциальному закону сохранения

$$\Xi_{ij,j} = 0$$

Решение неоднородных уравнений (1.4) можно представить в виде суммы решений однородных (верхний индекс 0) и частного решения неоднородных уравнений (1.4) (верхний индекс Ξ):

$$d_{ij} = d^{0}_{ij} + d^{\Xi}_{ij}$$

Решение однородных уравнений (1.2) можно записать через перемещения в форме несимметричных соотношений Коши $d^0_{ij} = R_{i,j}$. Несимметричный тензор с компонентами d^0_{ij} представим в виде разложения на тензор девиатор с компонентами γ^0_{ij}, шаровой тензор с компонентами $\theta^0\delta_{ij}$ и антисимметричный тензор с компонентами $\omega^0_k Э_{ijk}$. В свою очередь компоненты антисимметричного тензора запишем через компоненты ω^0_k псевдотензора поворотов

$$d^0_{ij} = \gamma^0_{ij} + \theta^0\delta_{ij}/3 - \omega^0_k Э_{ijk} \tag{1.5}$$

где

$$\gamma^0_{ij} = R_{i,j}/2 + R_{j,i}/2 - R_{k,k}\delta_{ij}/3, \quad \omega^0_k = -R_{i,j}Э_{ijk}/2, \quad \theta^0 = R_{k,k}$$

Для частного решения неоднородных уравнений (1.4) не существует непрерывного векторного потенциала, т.е. его невозможно представить в форме (1.3). Для него можно записать только следующее представление:

$$d^{\Xi}_{ij} = \gamma^{\Xi}_{ij} + \theta^{\Xi}\delta_{ij}/3 - \omega^{\Xi}_k Э_{ijk}$$

Очевидно, что наряду с d^{Ξ}_{ij} в качестве независимых «обобщенных перемещений» можно рассматривать величины γ^{Ξ}_{ij}, ω^{Ξ}_k и θ^{Ξ}.

Общее решение неоднородных уравнений (1.4) можно записать в симметрированном виде

$$d_{ij} = d^0_{ij} + d^{\Xi}_{ij} = \gamma_{ij} + \theta\delta_{ij}/3 - \omega_k Э_{ijk}$$

Здесь

$$\gamma_{ij} = \gamma^0_{ij} + \gamma^{\Xi}_{ij} = R_{i,j}/2 + R_{j,i}/2 - R_{k,k}\delta_{ij}/3 + \gamma^{\Xi}_{ij}$$

$$\omega_k = \omega^0_k + \omega^{\Xi}_k = -R_{i,j}Э_{ijk}/2 + \omega^{\Xi}_k, \quad \theta = \theta^0 + \theta^{\Xi} = R_{k,k}/3 + \theta^{\Xi}$$

Пользуясь терминологией кинематики сред Коссера, будем называть $\omega^0_k = -R_{i,j}Э_{ijk}/2$ стесненным вращением, а ω^{Ξ}_k – свободным вращением или спином. Аналогично будем называть γ^0_{ij} и θ^0 стесненными деформациями, а γ^{Ξ}_{ij} и θ^{Ξ} свободными деформациями. Соответственно, введем определения компонент тензоров свободной d^{Ξ}_{ij} и стесненной d^0_{ij} дисторсии.

Неоднородными соотношениями (1.4) и соотношениями Коши для стесненной дисторсии (1.5) описывается кинематика сред с дефектами типа дислокаций. Будем называть такие модели сред средами Папковича или дефектными средами первого ранга [1].

Кинематика таких сред имеет следующую структуру.

1^0. Дефектное поле перемещений D_i представляет собой суперпозицию двух полей — непрерывного поля $D_i^1 \equiv R_i$ (перемещений R_i) и поля разрывов перемещений D_i^2 (дислокаций) :

$$D_i = D_i^1 + D_i^2 = R_i + D_i^2$$

2^0. Поле разрывов перемещений D_i^2 (дислокаций) интегрально выражается через поля свободных деформаций и спинов по формулам, аналогичным формулам Чезаро:

$$D_i^2 = \int_{M_0}^{M_x} d_{ij}^{\Xi} dy_j$$

Однако, в отличие от формул Чезаро, здесь подынтегральное выражение не удовлетворяет условиям интегрируемости:

$$d_{ij,m}^{\Xi} Э_{nmj} = \Xi_{ij} \neq 0 \tag{1.6}$$

т.е. криволинейный интеграл зависит от траектории интегрирования, а значит - векторное поле D_i^2 не будет непрерывным. При этом можно определить три типа дислокаций $((D_i^2)_\gamma, (D_i^2)_\theta, (D_i^2)_\omega)$:

$$D_i^2 = \int_{M_0}^{M_x} d_{ij}^{\Xi} dy_j = \int_{M_0}^{M_x} \gamma_{ij}^{\Xi} dy_j + \frac{1}{3}\int_{M_0}^{M_x} \theta^{\Xi} dy_i + \left(-\int_{M_0}^{M_x} \omega_k^{\Xi} Э_{ijk} dy_j \right) = (D_i^2)_\gamma + (D_i^2)_\theta + (D_i^2)_\omega \tag{1.7}$$

3^0. Имеют место соотношения Коши, обобщенные на дефектные среды с дислокациями:

$$d_{ij} = D_{i,j} = D_{i,j}^1 + D_{i,j}^2 = R_{i,j} + d_{ij}^{\Xi}$$

4^0. Тензор "несовместности" перемещений с компонентами Ξ_{ij} является тензором дислокаций [18]:

$$\Xi_{ij} = d_{in,m}^{\Xi} Э_{nmj}$$

При этом можно определить три типа тензора дислокаций с компонентами, связанными соответственно с γ_{ij}^{Ξ}, ω_k^{Ξ} и θ^{Ξ}:

$$\Xi_{ij} = d_{in,m}^{\Xi} Э_{nmj} = \gamma_{in,m}^{\Xi} Э_{nmj} + \theta_m^{\Xi} Э_{imj}/3 - \omega_{k,m}^{\Xi} Э_{nki} Э_{nmj} = (\Xi_{ij})_\gamma + (\Xi_{ij})_\theta + (\Xi_{ij})_\omega \tag{1.8}$$

Величины $(\Xi_{ij})_\gamma$, $(\Xi_{ij})_\theta$ и $(\Xi_{ij})_\omega$ в разложении (1.8) являются источниками соответственно трех типов дислокаций: γ-, θ- и ω-дислокаций.

5^0. Имеет место дифференциальный закон сохранения дислокаций, вытекающий из определения тензора дислокаций, так как

$$\Xi_{ij,j} = 0$$

6^0. Интегральный аналог закона сохранения дислокаций, очевидно, имеет вид

$$\iiint \Xi_{ij,j} dV = \oint\!\!\oint \Xi_{ij} n_j dF = 0$$

Заметим, что в качестве меры поврежденности (дислокаций) можно выбрать поток тензора с компонентами Ξ_{ij} через плоскость, в которой лежит выбранный плоский контур:

$$\iint_F \Xi_{ij} n_j dF = n_j \iint_0 \Xi_{ij} dF$$

Здесь F — произвольная поверхность, натянутая на плоский контур.

Иначе говоря, поток тензора с компонентами Ξ_{ij} через любую поверхность, натянутую на плоский контур, один и тот же. Генерация новых дислокаций отсутствует. Именно поэтому здесь говорится о модели среды с сохраняющимися дислокациями.

Из приведенного анализа (см. также [1]) следует, что понятие дефекта сплошной среды является сложным и может быть определено с помощью комплекса тензорных объектов. Для дислокаций такой комплекс состоит из псевдотензора "несовместностей" с компонентами Ξ_{ij}, тензора свободной дисторсии второго ранга с компонентами d_{ij}^{Ξ} и вектора (тензора первого ранга) разрывных перемещений с компонентами D_i^2. Сюда же можно отнести соответствующий вектор Бюргерса, компоненты которого можно получить из равенства (1.7), совмещая начальную M_0 и конечную M_x точку плоской траектории интегрирования (n_n — компоненты постоянного вектора нормали к плоскости траектории интегрирования):

$$b_i = \int_{M_0}^{M_x} d_{ij}^{\Xi} dx_j \equiv \oint d_{ij}^{\Xi} dx_j = \oint d_{ij}^{\Xi} s_j ds = \oint d_{ij}^{\Xi} \upsilon_m n_n Э_{jmn} ds =$$
$$= \iint d_{ij,m}^{\Xi} n_n Э_{jmn} dF = \iint \Xi_{in} n_n dF = n_n \iint \Xi_{in} dF$$

где s_j — компоненты единичного вектора, касательного к плоскому контуру, n_n — компоненты вектора единичной нормали к плоскости траектории, а векторы с компонентами s_j, ν_m, n_n образуют тройку ортов, связанных с текущей точкой контура.

Кинематический анализ модели позволяет установить полный набор обобщенных "координат" и "скоростей", необходимых для формулировки функционала и соответствующего вариационного уравнения модели среды. В рассматриваемом случае среды Папковича с системой сохраняющихся дефектов-дислокаций обобщенными координатами будут непрерывные величины R_i, d_{ij}^{Ξ}, а в качестве "скоростей" кинематического состояния среды следует рассматривать соответствующие тензорные величины с компонентами d_{ij}^0, Ξ_{ij}.

Отметим также, что в результате проведенного кинематического анализа, по существу, предлагается новая естественная классификация дислокаций. Ранее [18] была предложена классификация дислокаций, основанная на инвариантном определении дислокаций скольжения

$$b_i \nu_i = \nu_i \oint d_{ij}^{\Xi} s_j ds, \quad b_i n_i = n_i \oint d_{ij}^{\Xi} s_j ds$$

и отрыва

$$b_i s_i = s_i \oint d_{ij}^{\Xi} s_j ds$$

как соответствующих проекций вектора Бюргерса. Отметим, что такая классификация не отражает энергетической независимости выделенных сортов дислокаций.

Здесь предлагается иная классификация, которая устраняет этот недостаток. Запишем выражение для вектора Бюргерса

$$b_i = \oint d_{ij}^{\Xi} s_j ds = \oint \gamma_{ij}^{\Xi} s_j ds + \frac{1}{3}\oint \theta^{\Xi} s_i ds - \oint \omega_k^{\Xi} Э_{ijk} s_j ds = (b_i)_\gamma + (b_i)_\theta + (b_i)_\omega$$

Следовательно, в соответствии с предлагаемой классификацией будем называть γ-дислокациями величины γ_{ij}^{Ξ}, θ-дислокациями величину θ^{Ξ} и ω-дислокациями величины ω_k^{Ξ}. В дальнейшем будет показано, что потенциальная энергия свободного формоизменения $\mu^{22}\gamma_{ij}^{\Xi}\gamma_{ij}^{\Xi}$, свободного изменения объёма $(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})\theta^{\Xi}\theta^{\Xi}/6$ и кручения $\chi^{22}\omega_k^{\Xi}\omega_k^{\Xi}$ не имеют перекрестных членов. Поэтому потенциальные энергии введенных сортов дислокаций аддитивны, они могут существовать изолированно и независимо от других сортов дислокаций.

2. Вариационная формулировка модели. Был сформулирован [15—17] "кинематический" вариационный метод построения моделей сред. В соответствии с этим методом определяются кинематические связи в среде, постулируется возможная работа внутренних сил как возможная работа реактивных силовых факторов на свойственных среде кинематических связях. Возможная работа внутренних сил представляется в виде линейной формы вариаций своих аргументов. Эта форма может быть проинтегрирована для консервативных сред. В результате определяется потенциальная энергия. Для линейных сред потенциальная энергия является квадратичной формой своих аргументов.

Для сред с сохраняющимися дислокациями такие кинематические связи представляют собой неоднородные уравнения Папковича для свободной дисторсии и однородные уравнения Папковича для стесненной дисторсии. Однородные уравнения Папковича для стесненной дисторсии могут быть проинтегрированы в общем виде. Их решением являются несимметричные соотношения Коши. Таким образом, в соответствии с "кинематическим" вариационным принципом возможную работу внутренних сил следует представить в виде

$$\overline{\delta U} = \iiint [\sigma_{ij}(d_{ij}^0 - R_{i,j}) + m_{ij}\delta(\Xi_{ij} - d_{in}^{\Xi} Э_{nmj})] dV \tag{2.1}$$

Здесь $\overline{\delta U}$ — возможная работа, в общем случае линейная форма вариаций своих аргументов (не обязательно интегрируемая, как это имеет место для сред с диссипацией, см. [19]), σ_{ij} и m_{ij} — компоненты тензоров множителей Лагранжа, которые имеют физический смысл реактивных силовых факторов, обеспечивающих выполнение соответствующих кинематических связей.

Представим $\overline{\delta U}$ (2.1) как линейную форму вариаций своих аргументов. Используя интегрирование по частям в слагаемых, содержащих производные, получим

$$\begin{aligned} \overline{\delta U} = &\iiint [\sigma_{ij}\delta d_{ij}^0 + \sigma_{ij,j}\delta R_i + m_{ij}\delta \Xi_{ij} + m_{ij,m} Э_{nmj} \delta d_{in}^{\Xi}] dV + \\ &+ \oiint [-\sigma_{ij} n_j \delta R_i - m_{ij} n_m Э_{nmj} \delta d_{in}^{\Xi}] dF \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ограничимся рассмотрением сред без диссипации энергии (модели сред с диссипацией рассматривались ранее [19]). Тогда существует такой потенциал U (потенциальная энергия), что возможная работа $\overline{\delta U}$ (2.2) будет вариацией этого потенциала:

$$\overline{\delta U} = \delta U; \quad U = \iiint U_V dV + \oiint U_F dF, \quad U_V = U_V(d_{ij}^0; d_{ij}^{\Xi}; \Xi_{ij}; R_i), \quad U_F = U_F(d_{ij}^{\Xi}; R_i)$$

В дальнейшем исключим из списков аргументов для плотностей потенциальной энергии вектор перемещений. Тогда рассматриваемая обобщенная модель среды с масштабными эффектами не будет противоречить в частном случае классической теории и известным экспериментальным данным. Этот вопрос далее будет обсуждаться дополнительно. В результате получаем

$$U = \iiint U_V dV + \oint\!\!\oint U_F dF; \quad U_V = U_V(d_{ij}^0; d_{ij}^{\Xi}; \Xi_{ij}), \quad U_F = U_F(d_{ij}^{\Xi}) \tag{2.3}$$

Учитывая список аргументов в равенстве (2.3) и вычисляя вариацию δU в объеме, с очевидностью получим

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = \partial U_V/\partial d_{ij}^0, \quad m_{ij} = \partial U_V/\partial \Xi_{ij}, \quad p_{in} = m_{ij,}Э_{nmj} = \partial U_V/\partial d_{ij}^{\Xi}, \\ M_{ij} = \partial U_F/d_{ij}^{\Xi} = A_{ijnm}d_{nm}^{\Xi}\end{gathered} \tag{2.4}$$

Формулы (2.4) следует трактовать как обобщенные формулы Грина для объемных и поверхностных силовых факторов. Эти соотношения позволяют записать вариацию лагранжиана

$$\begin{gathered}\delta L = \iiint[(\sigma_{ij,\,j} + X_i)\delta R_i^0 - (m_{in,\,m}^{\Xi}Э_{nmj} + p_{ij})\delta d_{ij}^{\Xi}]dV + \\ + \oint\!\!\oint[(Y_i - \sigma_{ij}n_j)\delta R_i^0 - (M_{in} + m_{ij}n_mЭ_{nmj})\delta d_{in}^{\Xi}]dF\end{gathered} \tag{2.5}$$

и найти соответствующие уравнения Эйлера.

3. Определяющие соотношения. Физическая трактовка обобщенных упругих постоянных. Рассмотрим вновь плотности потенциальной энергии в объеме и на поверхности. Ограничимся рассмотрением физически линейных сред. Тогда U_V определяется как квадратичная форма своих аргументов:

$$2U_V = 2U_V(d_{ij}^0; d_{ij}^{\Xi}; \Xi_{ij}; R_i) = C_{ijnm}^{11}d_{ij}^0 d_{nm}^0 + 2C_{ijnm}^{12}d_{ij}^0 d_{nm}^{\Xi} + C_{ijnm}^{22}d_{ij}^{\Xi}d_{nm}^{\Xi} + C_{ijnm}^{33}\Xi_{ij}\Xi_{nm} \tag{3.1}$$

При выводе этого равенства были введены следующие вполне обоснованные упрощения

1^0. В выражении для плотности потенциальной энергии (3.1) коэффициент при слагаемом $C_{ij}R_i R_j$ принят равным нулю. Иначе оператор уравнений равновесия имел бы вид уравнений Гельмгольца, что исключает существование однородных напряженно-деформированных состояний.

2^0. Приняты равными нулю также коэффициенты при всех остальных билинейных составляющих, включающих в качестве сомножителя вектор перемещений. В противном случае, в отсутствие слагаемого, содержащего квадратичную форму для вектора перемещений $C_{ij}R_i R_j$, объемная плотность потенциальной энергии не была бы положительно определенной.

Структура тензоров модулей упругости C_{ijnm}^{pq} в равенстве (3.1) определяется их разложением по изотропным тензорам четвертого ранга, построенным как произведение пары тензоров Кронекера со всеми возможными перестановками индексов:

$$C_{ijnm}^{pq} = C_1^{pq}\delta_{ij}\delta_{nm} + C_2^{pq}\delta_{in}\delta_{jm} + C_3^{pq}\delta_{im}\delta_{jn} \tag{3.2}$$

Чтобы дать физическую трактовку тензоров модулей в равенствах (3.1),(3.2), проанализируем соответствующие доли потенциальных энергий. Рассмотрим плотность объемной потенциальной энергии $C_{ijnm}^{11}d_{ij}^0 d_{nm}^0$, связанной с инвариантами тензора стесненной дисторсии с компонентами $d^0_{ij} = R_{i,j}$. Представим тензор кинематических переменных d^0_{ij} второго ранга в виде тензорного разложения на девиторную, шаровую и антисимметричную части:

$$d^0_{ij} = \gamma^0_{ij} + \theta^0\delta_{ij}/3 + \omega^0_{ij}; \quad \omega^0_{ij} = -\omega^0_k Э_{ijk} \tag{3.3}$$

Тогда получим равенство

$$\begin{aligned} &C^{11}_{ijnm}d^0_{ij}d^0_{nm} = [C^{11}_1\delta_{ij}\delta_{nm} + C^{11}_2\delta_{in}\delta_{jm} + C^{11}_3\delta_{im}\delta_{jn}]d^0_{ij}d^0_{nm} = \\ &= (C^{11}_2 + C^{11}_3)\gamma^0_{nm}\gamma^0_{nm} + (3C^{11}_1 + C^{11}_2 + C^{11}_3)\theta^0\theta^0/3 + (C^{11}_2 - C^{11}_3)\omega^0_{nm}\omega^0_{nm} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства определяет потенциальную энергию формоизменения

$$(C^{11}_2 + C^{11}_3)\ (R_{i,j/2} + R_{j,i/2} - R_{k,k}\delta_{ij}/3)(R_{i,j}/2 + R_{j,i}/2 - R_{k,k}\delta_{ij}/3)$$

Поэтому назовем соответствующий множитель модулем сдвига для стесненной дисторсии. Подобные преобразования справедливы и для остальных слагаемых в объемной плотности потенциальной энергии $2C^{12}_{ijnm}d^0_{ij}d^{\Xi}_{nm}$, $C^{22}_{ijnm}d^{\Xi}_{ij}d^{\Xi}_{nm}$, $C^{33}_{ijnm}\Xi_{ij}\Xi_{nm}$. В результате можно определить аналоги модуля сдвига μ^{pq} для девиаторов всех соответствующих кинематических факторов

$$(C^{pq}_2 + C^{pq}_3) = 2\mu^{pq} \tag{3.5}$$

Второе слагаемое в правой части равенства (3.4) определяет потенциальную энергию изменения объема

$$(3C^{11}_1 + C^{11}_2 + C^{11}_3)R_{k,k}R_{q,q}\delta_{ij}/3$$

Поэтому назовем соответствующий множитель модулем объемного сжатия для стесненной дисторсии. Аналогично вводятся модули объемного сжатия $2\mu^{pq} + 3\lambda^{pq}$ для шаровых тензоров всех остальных кинематических факторов

$$(3C^{pq}_1 + C^{pq}_2 + C^{pq}_3) = K^{pq} = 2\mu^{pq} + 3\lambda^{pq} \tag{3.6}$$

Третье слагаемое в правой части равенства (3.4) соответствует потенциальной энергии кручения

$$(C^{11}_2 - C^{11}_3)(R_{i,j}/2 - R_{j,i}/2)((R_{i,j}/2 - R_{j,i}/2)$$

Оно определяет несимметрию в тензоре напряжений и не имеет классических аналогов. Назовем соответствующий множитель третьим коэффициентом Ламе для стесненной дисторсии (d^0_{ij}). Соответственно, в общем случае аналоги третьего коэффициента Ламе χ^{pq} определяются формулами

$$(C^{pq}_2 - C^{pq}_3) = 2\chi^{pq} \tag{3.7}$$

Решая систему уравнений (3.5)–(3.7) относительно коэффициентов C^{pq}_j $(j = 1, 2, 3)$, получим при учете равенства (2.2)

$$C^{pq}_{ijnm} = \lambda^{pq}\delta_{ij}\delta_{nm} + (\mu^{pq} + \chi^{pq})\delta_{in}\delta_{jm} + (\mu^{pq} - \chi^{pq})\delta_{im}\delta_{jn}, \quad C^{pq}_{ijnm} = C^{qp}_{ijnm} \tag{3.8}$$

Окончательно, можно записать следующее выражение для плотности потенциальной энергии:

$$U_V = \mu^{11}(\gamma^0_{nm}\gamma^0_{nm}) + 2\mu^{12}(\gamma^0_{nm}\gamma^\Xi_{nm}) + \mu^{22}(\gamma^\Xi_{nm}\gamma^\Xi_{nm}) +$$
$$+[(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})\theta^0\theta^0 + 2(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})\theta^0\theta^\Xi + (2\mu^{11} + 3\lambda^{11})\theta^\Xi\theta^\Xi]/6 +$$
$$+\chi^{11}\omega^0_{nm}\omega^0_{nm} + 2\chi^{12}\omega^0_{nm}\omega^\Xi_{nm} + \chi^{22}\omega^\Xi_{nm}\omega^\Xi_{nm} + C^{33}_{ijnm}\Xi_{ij}\Xi_{nm}/2$$

Заметим, что часть плотности энергии деформации, связанная с тензором дислокации (с компонентами $C^{33}_{ijnm}\Xi_{ij}\Xi_{nm}$), определяет быстро меняющуюся локальную часть потенциальной энергии дислокаций. Остальная часть плотности энергии деформаций — медленно меняющаяся и определяется как сумма потенциальных энергий трех типов дислокаций: γ-, θ- и ω-дислокаций. Медленно меняющаяся часть энергии деформации (за исключением $C^{33}_{ijnm}\Xi_{ij}\Xi_{nm}$) не содержит перекрестных членов от указанных типов дислокаций и является аддитивной формой относительно компонент свободной дисторсии. Для приближенных оценок поврежденности сред, когда используются интегральные характеристики, вероятно, можно пренебречь локальной, быстро меняющейся частью энергии.

Отметим, что вопрос о материальной объективности несимметричной модели среды, плотность потенциальной энергии которой содержит слагаемое $\chi^{11}\omega^0_{nm}\,\omega^0_{nm}$ (см. также равенство (3.4)), неоднократно обсуждался и был подробно изложен в [7, 17].

В общем случае объемная плотность потенциальной энергии не содержит перекрестных членов, соответствующих свободному формоизменению (γ^Ξ_{nm}), изменению объема (θ^Ξ) и кручению ω^Ξ_k при малых величинах постоянных C^{33}_{ijnm}, соответствующих масштабным эффектам (их размерность отличается на квадрат длины от размерности модулей Юнга). Это обстоятельство использовалось в качестве обоснования корректности новой классификации различных типов дислокаций.

Обобщенные уравнения закона Гука (2.4) для объемных силовых факторов запишем в виде

$$\sigma_{ij} = C^{11}_{ijnm}R_{n,m} + C^{12}_{ijnm}d^\Xi_{nm}, \quad p_{ij} = C^{21}_{ijnm}R_{n,m} + C^{22}_{ijnm}d^\Xi_{nm}, \quad m_{ij} = C^{33}_{ijnm}\Xi_{nm} \tag{3.9}$$

Отметим, что обобщенные импульсы σ_{ij}, p_{ij}, m_{ij} в равенстве (3.8) зависят не только от обобщенных скоростей $R_{n,m}$, Ξ_{ij}, но и от обобщенных координат d^Ξ_{ij}. В связи с этим возможны разные трактовки “неклассических” составляющих в обобщенном законе Гука (3.9).

С одной стороны, можно переопределить тензор напряжений, исключив в правых частях равенств (3.9) слагаемые, содержащие свободные дисторсии d^Ξ_{ij}. В качестве компонент обобщенного тензора напряжения тогда может служить комбинация $C^{22}_{pqij}\sigma_{ij} - C^{12}_{pqij}p_{ij}$. Другая линейно независимая комбинация $C^{21}_{pqij}\sigma_{ij} - C^{11}_{pqij}p_{ij}$ будет тогда иметь физический смысл реакции обобщенного винклеровского основания на обобщенные перемещения d^Ξ_{ij}.

При иной трактовке определяющих соотношений следует признать, что наряду с тензором напряжений с компонентами σ_{ij} в таких средах имеются дополнительные силовые факторы — “дислокационные” напряжения p_{ij}. Этот вариант– более традиционный [11] и более предпочтительный. Приведем следующие соображения. Положим, что $C^{12}_{ijnm} = 0$. Как будет показано в дальнейшем, в этом случае общая краевая задача распадается на краевую задачу относительно перемещений R_i и краевую задачу относительно свободной дисторсии d^{Ξ}_{ij}. Тогда краевая задача относительно перемещений при дополнительном предположении $\chi^{11} = 0$ (теория упругости с симметричным тензором напряжений) совпадает с классической теорией упругости. Силовой фактор σ_{ij} приобретает смысл классических напряжений. Соответственно, силовой фактор p_{ij} приобретает смысл винклеровской реакции в уравнениях равновесия моментных напряжений. При $C^{12}_{ijnm} \neq 0$ происходит взаимное возмущение классического поля перемещений и чисто дислокационных состояний. Перекрестные члены в уравнениях закона Гука для σ_{ij} и p_{ij} и отражают указанные возмущения. Эти же соображения, очевидно, приводят к алгоритму решения общей краевой задачи методом последовательных приближений.

С поверхностной плотностью потенциальной энергии дело обстоит сложнее. Для гладкой поверхности всегда существует естественно выделенное направление – нормаль к поверхности. Уравнения закона Гука для внутренних силовых факторов на поверхности должны иметь трансверсально-изотропный характер, и в результате кинематические факторы, связанные с нормалью к поверхности и с касательной плоскостью, будут входить в эти уравнения закона Гука неравноправно.

Исследуем более подробно поверхностную плотность энергии деформации. Рассмотрим выражение для поверхностной части возможной работы. Первое слагаемое в нем полностью соответствует классическому представлению. Оно появляется в результате интегрирования по частям выражения $\iiint[\sigma_{ij}\delta(R_{i,j})]dV$ в равенстве (2.1). Второе слагаемое в выражении поверхностной части возможной работы (2.2), (2.3) – неклассическое, оно обязано своим появлением вариационно-кинематическому методу построения модели и связано с поверхностной энергией адгезии U_F. Рассмотрим это слагаемое более подробно. Имеем

$$\begin{aligned} -\oint\!\!\oint m_{ij} n_m Э_{nmj}\delta d^{\Xi}_{in} dF = -\oint\!\!\oint m_{ij} n_q Э_{pqj}\delta[d^{\Xi}_{nm}\eta_{in} + d^{\Xi}_{nm} n_i n_n]\eta_{np} dF - \\ -\oint\!\!\oint m_{ij} n_q Э_{pqj}\delta[d^{\Xi}_{nm}\eta_{in} + d^{\Xi}_{nm} n_i n_n] n_m n_p dF \end{aligned} \tag{3.10}$$

где $\eta_{in} = (\delta_{in} - n_i n_n)$ – компоненты “плоского” тензора Кронеккера.

Заметим, что $n_p n_q Э_{pqj} = 0$ как свертка симметричного тензора, компоненты которого $n_p n_q$ с антисимметричным псевдотензором, компоненты которого $Э_{pqj}$. Следовательно, работа моментных напряжений (3.10) на поверхности тела совершается не на всех девяти компонентах тензора свободной дисторсии d^{Ξ}_{in}, а только на шести из них, $d^{\Xi}_{im}\,\eta_{pm}$:

$$-\oint\!\!\oint m_{ij} n_m Э_{nmj}\delta d^{\Xi}_{in} dF = -\oint\!\!\oint m_{ij} n_q Э_{pqj}\delta d^{\Xi}_{im}\eta_{pm} dF \tag{3.11}$$

В общем случае плотность энергии деформации (потенциальная энергия адгезии) на поверхности тела имеет вид

$$U_F = [A_{ijnm} d^{\Xi}_{nm} d^{\Xi}_{ij}]/2 \tag{3.12}$$

Определяющие соотношения на поверхности тела задаются равенствами (2.4).

Заметим, что плотность потенциальной энергии не зависит от вектора перемещений. Иначе вариационная постановка приводила бы к систематическим поправкам в статических граничных условиях в классическом решении, что противоречит имеющимся экспериментальным данным.

Важно отметить, что соотношения (3.11) позволяют уточнить список аргументов плотности поверхностной потенциальной энергии (3.12). Этот уточненный список аргументов определяется теперь шестью "плоскими" компонентами тензора свободной дисторсии $d^{\Xi}_{im}\eta_{pm}$: $U_F = U_F(d^{\Xi}_{ik}\eta_{kj})$. В результате полная корректная запись вариации лагранжиана отличается от (2.5) заменой во втором интеграле δd^{Ξ}_{in} на $\delta d^{\Xi}_{ik}\eta_{kn}$.

Отсюда следует, что для исследуемой модели среды в каждой неособенной точке поверхности имеется девять граничных условий. Анализ разрешающих уравнений и краевой задачи в целом позволяет показать,

что суммарный порядок разрешающих уравнений относительно компонент вектора перемещений и потенциалов для компонент свободной дисторсии равен восемнадцати. Следовательно, математическая постановка для исследуемой модели является согласованной, ибо имеется девять граничных условий для краевой задачи восемнадцатого порядка.

Структура тензора модулей адгезии A_{ijnm} определяется его разложением по тензорам четвертого ранга, построенным как все возможные произведения пар «плоских» тензоров Кронекера и тензоров, образованных произведениями компонент векторов единичной нормали вида $n_i n_j$, при всех возможных перестановках индексов. Учтем, кроме того, что потенциальная энергия адгезии не должна зависеть от следующих компонент тензора свободной дисторсии: $d^{\Xi}_{ij} n_j$. Только в этом случае классические, естественные граничные условия на поверхности тела для напряжений остаются неизменными, что не вносит противоречий в частном случае при переходе к классической модели среды и находится в согласии с многочисленными экспериментальными данными. Можно убедиться, что в таком случае общая структура компонент тензора модулей адгезии имеет вид

$$A_{ijnm} = A_1\eta_{ij}\eta_{nm} + A_3 n_i n_n \eta_{jm} + (A_2 + A_4)\eta_{in}\eta_{jm} + (A_2 - A_4)\eta_{im}\eta_{jn}) \tag{3.13}$$

Здесь A_i – некоторые постоянные.

Рассмотрим плотность энергии деформации на поверхности и дадим физическую трактовку адгезионных составляющих энергии деформации, учитывая соотношения (3.11), (3.13). Поверхностная потенциальная энергия будет квадратичной функцией только от компонент свободной дисторсии вида $d^{\Xi}_{ik}\eta_{jk} = d^{\Xi}_{ik}(\delta_{jk} - n_j n_k)$, что важно при построении согласованной теории и будет обсуждаться в дальнейшем.

Представим свободную дисторсию в виде тензорного разложения на "плоский" девиатор с компонентами

$${}^2\gamma_{ij} = d^{\Xi}_{nm}\eta_{in}\eta_{jm}/2 + d^{\Xi}_{nm}\eta_{jn}\eta_{im}/2 - d^{\Xi}_{nm}\eta_{ij}\eta_{nm}/2$$

"плоский" шаровой тензор с компонентами

$${}^2\theta = d^{\Xi}_{nm}\eta_{nm}$$

"плоский" антисимметричный тензор с компонентами

$${}^2\omega_{ij} = d^{\Xi}_{nm}\eta_{in}\eta_{jm}/2 - d^{\Xi}_{nm}\eta_{jn}\eta_{im}/2$$

и "плоский" вектор углов поворота поверхности при ее изгибе с компонентами

$${}^2\alpha_i = d^{\Xi}_{nm} n_n \eta_{mi}$$

Левый верхний индекс 2 подчеркивает тот факт, что соответствующие компоненты тензора свободной дисторсии вычисляются на поверхности тела. В результате получим

$$d_{ik}^{\Xi}\eta_{jk} = {}^{2}\gamma_{ij} + {}^{2}\theta\eta_{ij}/2 + {}^{2}\omega_{ij} + {}^{2}\alpha_{j} n_{i} \tag{3.14}$$

Учитывая равенство (3.13), можно убедиться, что представленный в форме разложения (3.14) тензор свободной дисторсии на поверхности преобразует U_F к каноническому" виду:

$$2U_F = A_{ijnm} d_{ij}^{\Xi} d_{nm}^{\Xi} = (A_1 + A_2)({}^{2}\theta^{2}\theta) + 2A_2({}^{2}\gamma_{ij}{}^{2}\gamma_{ij}) + 2A_4({}^{2}\omega_{ij}{}^{2}\omega_{ij}) + A_3({}^{2}\alpha_k{}^{2}\alpha_k) \tag{3.15}$$

Сравнивая первые три слагаемых в правой части равенства (3.15) с соответствующими слагаемыми в выражении для объемной потенциальной энергии в плоской постановке, можно провести аналогию между коэффициентами Ламе и адгезионными модулями.

Введем следующие естественные определения адгезионных модулей:

A_2 – адгезионный аналог модуля сдвига: $A_2 = \mu^F$;

A_1 – адгезионный аналог второго коэффициента Ламе $A_1 = \lambda^F$;

A_4 – адгезионный аналог третьего коэффициента Ламе $A_4 = \chi^F$;

$A_3 = \delta^F$ – адгезионный аналог винклеровской жесткости “внутренней подложки" поверхности, создающей реактивный момент пропорционально свободным поворотам элементов срединной линии поверхности (приповерхностного слоя) в двух ортогональных направлениях.

Соответственно, первое слагаемое в выражении для потенциальной энергии (3.15) является энергией изменения “плоского объема” – поверхности; назовем эту энергию энергией поверхностного натяжения. Теория поверхностного натяжения достаточно хорошо известна вне рамок механики сплошной среды, как автономная эмпирическая теория. Таким образом, можно утверждать, что поверхностное натяжение – частный эффект развиваемой здесь теории.

Второе и третье слагаемые в выражении (3.15) определяют соответственно энергию формоизменения и энергию скручивания в плоскости, касательной к поверхности. С точки зрения идентификации адгезионных физических постоянных можно осуществить совместный учет энергий формоизменения и скручивания в рамках тестовых задач, моделирующих трение покоя двух полупространств с идеально гладкой поверхностью контакта. В качестве первой тестовой задачи, для которой реализуется только энергия формоизменения, может быть предложена задача выдергивания нановолокна из “поджатой” матрицы. В силу осевой симметрии этой задачи поверхность нановолокна не испытывает деформаций скручивания. Решение такой задачи устанавливает связь между коэффициентом трения покоя и адгезионным модулем. В качестве второй задачи может быть рассмотрена антиплоская задача контакта. Для этой задачи, по-видимому, наряду со скручиванием имеет место и формоизменение поверхности контакта. Решение подобных задач дает принципиальную возможность поставить соответствующие эксперименты и определить адгезионные модули $A_2 = \mu^F$ и $A_4 = \chi^F$.

Четвертое слагаемое определяет энергию изгиба поверхности, являясь энергией деформации “внутренних винклеровских пружинок”. Тестовой задачей здесь может быть задача о поведении среды под давлением с торцов, в зазоре между двумя полупространствами с идеально гладкой поверхностью. Использование неклассической адгезионной модели здесь позволяет моделировать два эффекта: эффект существования мениска поверхности среды и эффект, связанный с трактовкой различия между найденным по неклассической модели средним удлинением среды в зазоре и аналогичным результатом, полученным по классической модели.

4. Фундаментальная роль перекрестного тензора модулей. Рассмотрим снова определяющие соотношения (2.4),(3.9) . Положив в них $C^{12}_{ijnm} = 0$, получим

$$\sigma_{ij} = C^{11}_{ijnm} R_{n,m}, \quad p_{ij} = C^{22}_{ijnm} d^{\Xi}_{nm}, \quad m_{ij} = C^{33}_{ijpq} \Xi_{pq} \tag{4.1}$$

Видно, что в этом случае общая краевая задача распадается на две независимые краевые задачи. Учитывая соотношения (3.9), (4.1), получим отдельную задачу определения вектора перемещений

$$\iiint C^{11}_{ijnm}(R_{n,jm} + P^V_i)\delta R_i dV + \oiint (P^F_i - C^{11}_{ijnm} n_j R_{n,m})\delta R_i dF = 0 \tag{4.2}$$

Задача определения тензора свободной дисторсии также формулируется отдельно:

$$\iiint [C^{22}_{ijnm} d^{\Xi}_{nm} - (C^{33}_{inpq} Э_{nmj} Э_{srq}) d^{\Xi}_{ps,mr}]\delta d^{\Xi}_{ij} dV -$$

$$-\oiint [A_{ijnm} d^{\Xi}_{nm} - (C^{33}_{inpq} Э_{nmj} Э_{srq}) n_m d^{\Xi}_{ps,r}]\delta d^{\Xi}_{ij} dF = 0$$

Следовательно, краевая задача относительно компонент тензора свободной дисторсии в этом случае однородна. Это соответствует отсутствию дислокаций. В результате при $C^{12}_{ijnm} = 0$ модель сводится к модели неповрежденной среды. При этом неоднородная подсистема уравнений равновесия сил (при $\chi^{11} = 0$) и краевая задача (4.2) в целом совпадают с краевой задачей классической теории упругости. Приведенные рассуждения позволяют дать следующие естественные трактовки модулям упругости μ^{11}, $2\mu^{11} + \lambda^{11}$, χ^{11}:

μ^{11} — модуль сдвига среды, не поврежденной γ — дислокациями, $\mu^{11} = G$,

$2\mu^{11} + 3\lambda^{11} = K$ — модуль объемного сжатия не поврежденной θ — дислокациями среды, модуль Юнга тогда определяется формулой: $2\mu^{11} + \lambda^{11} = E$;

величину χ^{11} можно трактовать как “крутильный модуль” не поврежденной ω — дислокациями среды:$\chi^{11} = \chi$.

Рассмотрим далее уравнения, полученные из вариационного уравнения (2.5). Чтобы найти обобщенные уравнения равновесия в перемещениях, следует приравнять нулю множители при вариациях перемещений и при вариациях компонент тензора свободной дисторсии. Первую группу уравнений будем называть уравнениями равновесия сил. Вторую группу (тензорное уравнение второго ранга) назовем уравнениями равновесия моментов. Систему обобщенных уравнений равновесия можно записать в кинематических переменных R_i, d^{Ξ}_{ij} с помощью обобщенных уравнений закона Гука (3.9). Из этой системы уравнений выделяется подсистема уравнений, обобщающих уравнения равновесия Ламе классической теории упругости и записанных через вектор перемещений с компонентами R_i:

$$E_1 R_{k,ik} + P^V_i - l^2_E E_2 \Delta R_{k,ik} - l^2_E P^V_{k,ik} +$$

$$+G_1(\Delta R_i - R_{k,ik}) - l^2_G G_2(\Delta R_i - R_{k,ik}) - l^2_G(\Delta P^V_i - P^V_{k,ik}) = 0$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$E_1 = \frac{4}{3}\frac{\mu^{11}\mu^{22} - \mu^{12}\mu^{12}}{\mu^{22}} + \frac{1}{3}E_2, \quad E_2 = \frac{(2\mu^{11} + \lambda^{11})(2\mu^{22} + \lambda^{22}) - (2\mu^{12} + \lambda^{12})^2}{2\mu^{22} + \lambda^{22}}$$

$$G_1 = \frac{\mu^{11}\mu^{22} - \mu^{12}\mu^{12}}{\mu^{22}} + \frac{\chi^{11}\chi^{22} - \chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}}, \quad G_2 = \frac{(\mu^{11} + \chi^{11})(\mu^{22} + \chi^{22}) - (\mu^{12} + \chi^{12})^2}{\mu^{22} + \chi^{22}} \tag{4.3}$$

$$l^2_E = \frac{\chi^{33}(2\mu^{22} + \lambda^{22})}{\mu^{22}(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}, \quad l^2_G = \frac{(\mu^{33} + \chi^{33})(\mu^{22} + \chi^{22})}{4\mu^{22}\chi^{22}}$$

Величины E_1 и G_1, очевидно, можно трактовать как модули упругости поврежденной среды; параметры l_G^2, l_E^2 – масштабные характеристики среды, они имеют размерность квадрата длины.

Непосредственно из соотношений (4.3) следуют неравенства

$$\begin{aligned} &2\mu^{11}+\lambda^{11}-E_1=\frac{4\mu^{12}\mu^{12}}{3\mu^{22}}+\frac{(2\mu^{12}+3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{22}+3\lambda^{22})}>0 \\ &\mu^{11}+\chi^{11}-G_1=\frac{\mu^{12}\mu^{12}}{\mu^{22}}+\frac{\chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}}>0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Важные соотношения (4.3), (4.4) указывают на фундаментальную роль перекрестного тензора модулей. Более того, уравнения (4.3) устанавливают точную связь между модулями упругости неповрежденной среды: $(2\mu^{11}+\lambda^{11})$ и $(\mu^{11}+\chi^{11})$ и модулями упругости поврежденной среды: E_1 и G_1.

Из неравенств (4.4) следует, что модули поврежденной среды всегда меньше модулей упругости неповрежденной среды. Равенство имеет место только когда $\mu^{12}=0$, λ^{12}=0 ($C_{ijnm}^{12}=0$), и среда с сохраняющимися дислокациями вырождается в неповрежденную классическую среду (при χ^{11}=0).

Важно отметить, что размерность модулей $\mu^{33},\lambda^{33},\chi^{33}$отличается от размерности модулей $\mu^{11},\lambda^{11},\chi^{11}$, $\mu^{12},\lambda^{12},\chi^{12}$ и $\mu^{22},\lambda^{22},\chi^{22}$ на размерность квадрата длины. Таким образом, учет вклада инвариантов псевдотензора дислокаций с компонентами $C_{ijnm}^{33}\Xi_{nm}\Xi_{ij}$ в выражение потенциальной энергии с неизбежностью приводит к масштабным эффектам в объеме. Отметим также, что и размерность адгезионных модулей отличается от объемных модулей на размерность длины. Таким образом, учет адгезионной составляющей в выражении для потенциальной энергии приводит к моделированию масштабных эффектов на поверхности.

Представленная обобщенная модель механики сплошной среды в целом, является теоретической моделью, в которой поверхностное натяжение, трение покоя двух тел с идеально гладкой поверхностью контакта, мениск, смачиваемость и капиллярность моделируются как частные эффекты в рамках единого континуального описания. Все эти частные эффекты объединены одним характерным признаком – это масштабные эффекты в сплошных средах.

5. Заключение и выводы. На основе вариационно-кинематического подхода[2–4, 6–9, 17] дана полная и корректная модель сред с сохраняющимися дислокациями. Особое внимание уделено анализу кинематических соотношений, ибо при вариационном описании кинематика среды полностью определяет систему внутренних взаимодействий в объеме и на поверхности рассматриваемого тела. На основе проведенного кинематического анализа предложена новая классификация дислокаций, позволяющая выделить три типа дислокаций: γ - , θ - и ω-дислокации.

Эта классификация позволила предложить новую кинематическую трактовку дислокаций, которая отражает связь дислокаций с формоизменением γ, с изменением объема θ (пористость) и со скручиванием ω (вихри или спины). Предлагаемая классификация фактически позволяет прогнозировать частные случаи дислокаций, когда в среде доминируют лишь один или два типа дислокаций.

Так, например, в среде с распределенными дефектами доминирующими могут оказаться дислокации, порожденные только свободными поворотами ω_k^{Ξ}. Тогда, как частный случай общей модели, получаем "классический" вариант модели сред Коссера, где $\gamma_{ij}^{\Xi} = 0$ и $\theta^{\Xi} = 0$, а тензор свободной дисторсии определяется соотношением $d_{ij}^{\Xi} = -\omega_k^{\Xi}Э_{ijk}$.

Пористая среда также может быть рассмотрена как частный случай общей модели. В пористой среде доминируют дислокации, порожденные только свободным изменением объема θ^{Ξ}. Тогда для пористой среды с четырьмя степенями свободы R_i, θ^{Ξ} имеем

$$\omega_k^{\Xi} = 0, \quad \gamma_{ij}^{\Xi} = 0, \quad d_{ij}^{\Xi} = \theta^{\Xi}\delta_{ij}/3$$

Наконец, к частным моделям с одним доминирующим типом дислокаций относится среда с восемью степенями свободы R_i, γ_{ij}^{Ξ}. Здесь доминируют дислокации, порожденные только свободным изменением формы γ_{ij}^{Ξ}. Очевидно, что при этом $d_{ij}^{\Xi} = \gamma_{ij}^{\Xi}$.

Аналогичным образом можно прогнозировать наличие сред с двумя сортами дислокаций. Ранее [2–4, 7] была рассмотрена модель такой среды, где пренебрегалось дислокациями, порожденными свободным изменением формы γ_{ij}^{Ξ}. На ее основе построен континуальный вариант теории межфазных взаимодействий. Эта теория позволила смоделировать и объяснить известные масштабные эффекты в механике мелкодисперсных композитов, определяемые когезионными и адгезионными, локальными взаимодействиями. Предлагаемая в данной работе классификация позволяет рассмотреть и еще один частный случай сред, где можно пренебречь или величиной θ^{Ξ} (непористые среды), или величиной ω_k^{Ξ} (бесспиновые среды). Насколько известно авторам, такие среды еще не исследовались.

Предлагаемая классификация обоснованна и с физической точки зрения, так как отражает физический смысл разных типов дислокаций. Так, доказано, что указанные типы дислокаций: γ-, θ- и ω-дислокации дают соответствующие, взаимнонезависимые составляющие доли в основную, медленно меняющуюся часть плотности энергии деформации. Эти доли потенциальной энергии не имеют перекрестных членов. Таким образом, имеет место аддитивность в разложении медленно меняющейся части плотности энергии деформации относительно трех различных типов дислокаций. При этом наличие неклассической, нелокальной составляющей части потенциальной энергии, связанной с дефектами-дислокациями, весьма неожиданно для градиентной модели, какой является модель сред с системой распределенных дислокаций. Наконец, следует отметить, что кинематика рассмотренной модели и предлагаемая классификация находятся в полном соответствии с общими положениями геометрической теории дефектов, полученными ранее [1].

Использование в данной работе последовательного вариационного подхода и детальный анализ граничных условий дали возможность сформулировать непротиворечивую и согласованную краевую задачу для сред с сохраняющимися дислокациями с девятью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности. Следует напомнить, что при последовательной вариационной формулировке задачи всегда достигается согласованность математической постановки. Порядок задачи фактически определяется количеством независимых граничных условий. Отметим, что предлагаемая в работе теория является наиболее полной как теория сред с непрерывным полем сохраняющихся дислокаций, хотя формально она соответствует более частной модели по сравнению с теорией сред с микроструктурами Миндлина [11]. При этом в теории Миндлина [11] вообще не исследовалась структура поверхностной плотности потенциальной энергии, соответствующей адгезионным взаимодействиям, и не был дан анализ работы этих поверхностных взаимодействий.

Наконец, следует отметить, что в рамках предлагаемой модели учитывается спектр масштабных эффектов в объеме и на поверхности. Действительно, учет инвариантов псевдотензора дислокаций с компонентами $C^{33}_{ijnm}\Xi_{nm}\Xi_{ij}$ в выражении для потенциальной энергии с неизбежностью приводит к масштабным эффектам в объеме. С другой стороны, учет энергии адгезии в выражении потенциальной энергии приводит к моделированию масштабных эффектов на поверхности, так как размерность тензора с компонентами A_{ijnm} отличается от размерности модулей Юнга. По-видимому, представленную обобщенную модель механики сплошной среды можно рассматривать как первую корректную теоретическую модель, в которой различные частные масштабные эффекты (когезионные взаимодействия, поверхностное натяжение и пр.) в объеме и на поверхности моделируются в рамках единого континуального описания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белов П.А., Лурье С.А.* К общей теории дефектных сред // Физ. Мезомеханика. 2007. Т. 10. № 6. С. 49–61.
2. *Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N.* Nanomechanical модeling of the nanostructures and dispersed composites // Comp. Mater. Sci. 2003. V. 28. № 3–4. P. 529–539
3. *Lurie S., Belov P., Tuchkova N.* The application of the multiscale models for description of the dispersed composites // Comput. Mater. Sci. 2004. V. 36. № 2. P. 145–152.
4. *Белов П.А., Бодунов А.М., Лурье С.А., Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г.* О моделировании масштабных эффектов в тонких структурах // Механика композицонных материалов и конструкций. 2002. № 4. Т. 8. С. 585–598.
5. *Бодунов А.М., Криволуцкая И.И., Белов П.А., Лурье С.А.* Масштабные эффекты в тонких пленках // Конструкции из композиционных материалов, 2002. № 2. С. 33–40.
6. *Белов П.А., Лурье С.А.* Модели деформирования твердых тел и их аналоги в теории поля // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 3. С. 157–166.
7. *Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А., Яновский Ю.Г.* О некоторых классах моделей тонких структур // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 110–118.
8. *Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N.* Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // J. Mater. Sci. 2006. V. 41. № 20. P. 6693–6707.
9. *Lurie S, Belov P, Volkov-Bogorodsky D.* Multiscale modeling in the mechanics of materials: cohesion, interfacial interactions, inclusions and defects // Analysis and Simulation of Multifield Problems. Berlin. Springer, 2003. V. 12. P. 101–110.
10. *Mindlin R.D., Tiersten H.F.* Effects of couple-stresses in linear elasticity // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1962. V. 11. № 5. P. 415–448.
11. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1964. V. 16. № 1. P. 51–78.
12. *Cosserat E., Cosserat F.* Theore des Corps Deformables. Paris: Hermann, 1909. 226 p.
13. *Toupin R.A.* Theorie of elasticity with couple-stress // Arch. Ration. Mech. And Analysis. 1964. V. 17. № 2. P. 85–112.
14. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // Физика твердого тела. 1960. Т. 2. № 7. С. 399–1409.
15. *Лурье С.А., Белов П.А., Орлов А.П.* Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые обобщения // Механика композиционных материалов и конструкций. 1996. Т. 2. № 2. С. 84–104.
16. *Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А.* Об обобщенных разложениях в прикладных задачах теории упругости и их приложения к задачам механики композитных конструкцияй // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. № 1. С. 62–79.
17. *Лурье С.А., Белов П.А.* Математические модели механики сплошной среды и физических полей. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2000. 150 с.
18. *De Wit R.* The continual theory of the stationary dislocations // *Solid State Physics*, N. Y.; L.: Acad. Press, 1960. V. 10. P. 249–292.
19. *Белов П.А., Горшков А.Г., Лурье С.А.* Вариационная модель неголономных 4-D сред // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 266–276.

Москва
e-mail: lurie@ccas.ru

Поступила в редакцию
21.IV.2008