ТЕОРИЯ СРЕД С СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ: СРЕДЫ КОССЕРА И АЭРО-КУВШИНСКОГО, ПОРИСТЫЕ СРЕДЫ, СРЕДЫ С «ДВОЙНИКОВАНИЕМ».

Белов П.А., Лурье С.А.

Институт прикладной механики РАН (Москва)

РЕЗЮМЕ

Дается последовательное изложение теории сред сохраняющимися дефектами как варианта теории сред с микроструктурой (по определению Миндлина) и приводится достаточно полное описание актуальных с прикладной точки зрения частных вариантов теории: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием». Корректность формулировки моделей определяется использованием "кинематического" вариационного принципа, основанного на формальном описании кинематики сред, формулировке кинематических связей для сред различной сложности и построении соответствующей потенциальной энергии деформации с использованием процедуры множителей Лагранжа. Устанавливается система определяющих соотношений и формулируется согласованная постановка краевой задачи. Показывается, что рассматриваемые модели сред не только моделируют масштабные эффекты, аналогичные когезионным взаимодействиям, но также являются основой для описания широкого спектра адгезионных взаимодействий. В данной работе значительное внимание уделяется анализу физической стороны моделей изучаемых сред. Предлагается трактовка всех физических характеристик, ответственных за неклассические эффекты, дается описание спектра адгезионных механических параметров. Дается обобщение гипотезе Аэро-Кувшинского о пропорциональности свободной и стесненной дисторсии.

ВВЕДЕНИЕ.

Значительные достижения в создании новых материалов с микро- и нано-структурами и соответствующих технологий обязаны успехам в экспериментальном и теоретическом изучении атомных структур, свойств и поведения дефектов типа дислокаций и дисклинаций. Известно, что во многих случаях дефекты формируются уже на стадии изготовления многих новых материалов. К таким материалам можно отнести: нано- и некристаллические материалы, аморфные кристаллические соединения, нанокомпозиты, квазикристаллические, наноквазикристаллические и некоторые другие [1-3].

Построение моделей дефектных сплошных сред является важным при моделировании масштабных эффектов в упругости и пластичности [4-9]. Было показано, что градиентная теория достаточно эффективна для анализа среды на нано- и микро- уровнях.

Кинематика дефектов составляет основу в развитии феноменологических моделей теории дефектов. Во-первых, кинематика дефектов (непротиворечивость) составляет наиболее важный элемент в применении вариационных методов для описания градиентных моделей высокого порядка [6-8]. Действительно, знание кинематики дефектов позволяет установить список аргументов для корректной формулировки соответствующего лагранжиана. Во-вторых, кинематический анализ позволяет установить связи между различного типа дефектами и проанализировать причины и условия их развития и исчезновения [9-13].

Интенсивное развитие технологий производства наноматериалов и наноустройств требует формулировки соответствующей теории в механике сплошных сред для прогнозирования свойств новых материалов с микро- и нано-структурой и для выбора оптимальных технологических параметров. Вариант такой теории был сформулирован в работах [14-21]. Эта прикладная теория по предложенной в работе [22] классификации дефектов является частным случаем теории сред с сохраняющимися дислокациями [22]. С ее помощью, на основе тех или иных упрощающих гипотез удалось объяснить многие из известных неклассических эффектов механики сплошных сред, связанных с масштабными эффектами. Так в [20,21] показано, что они успешно моделируют эффект изменения механических свойств нанокомпозитов с изменением размера армирующих наночастиц при неизменном объемном содержании, а в [16-21,23-24] моделируются свойства тонких пленок, масштабные эффекты в механике материалов, связанные с когезионными взаимодействиями, дается описание (в рамках упрощенной модельной постановки) несингулярных трещин, что, по существу, определяет формальное математическое обоснование гипотезы Баренблатта о существовании когезионного поля. Учет масштабных эффектов позволил построить непротиворечивую теорию межфазного слоя, моделирующую локальные эффекты на границах контактирующих фаз. В рамках этой теории получили математическое обоснование гипотезы эквивалентной матрицы, эквивалентных включений и т.д. Получены аналитические оценки геометрических и механических свойств межфазного слоя по механическим характеристикам фаз. С определенной степенью осторожности можно утверждать, что сформулированы основы феноменологической наномеханики, являющейся обобщением классической механики сплошных сред. Тем не менее, возможности теории сред с сохраняющимися дислокациями на наш взгляд гораздо шире, и не исчерпываются полученными результатами.

Исследование сформулированной теории ведется по трем основным направлениям:

1. Формулировка и решение тестовых задач для случаев, реализуемых в эксперименте, с целью идентификации неклассических параметров среды, фигурирующих в определяющих уравнениях теории.
2. Формулировка и решение задач, прогнозирующих/предсказывающих неизвестные неклассические эффекты для постановки и проведения соответствующих экспериментов.
3. Изучение частных моделей, вытекающих из общей теории, и их идентификация с известными моделями, существующими автономно.

Настоящая работа находится в русле исследований третьего направления и посвящена исследованию моделей пористых сред, моделей Миндлина [10,11], Коссера [24] и Аэро-Кувшинского [26]. Исследуются корректные частные модели сред с микроструктурой (по определению Миндлина), устанавливается система определяющих соотношений и формулируется согласованная постановка краевой задачи. Показывается, что рассматриваемые модели сред не только моделируют масштабные эффекты, аналогичные когезионным взаимодействиям, но также являются основой для описания широкого спектра адгезионных взаимодействий. Значительное внимание уделяется анализу физической стороны модели. В первой части статьи развивается общий вариант сред с сохраняющимися дислокациями.

Затем и дается полное математическое описание частных моделей, имеющих важное прикладное значение. Последовательно излагаются частные варианты теорий сред с сохраняющимися дислокациями: для классической среды Коссера, среды Аэро-Кувшинского, пористой среды и для среды с «двойникованием».

1. ТЕОРИЯ СРЕД С СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ.

Для построения моделей сред используется вариант «кинематического» вариационного принципа, в соответствии с которым по заданным кинематическим связям находится вид функционала энергии для исследуемой среды и устанавливаются силовые взаимодействия, соответствующие введенным кинематическим связям. Модель среды полностью задается разнообразием вводимых кинематических связей. Поэтому особое место при изложении теории сред с микроструктурой уделяется анализу кинематических соотношений.

1.1 Кинематическая модель.

Запишем известные соотношения для вектора перемещений R_i, получаемые формальным интегрированием несимметричных соотношений Коши:

$$R_i = R_i^0 + \int\limits_{M_0}^{M_x} (\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k \text{Э}_{ijk}) dx_j \tag{1.1}$$

Здесь γ_{in} - тензор девиатор деформации, θ -объемная деформация, ω_k - вектор упругих поворотов (псевдовектор).

Описание кинематических моделей неклассических сред начнем с анализа однородных уравнений Папковича, которые являются условиями существования криволинейного интеграла в определении вектора перемещений (1.1.):

$$\frac{\partial(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in} - \omega_k \text{Э}_{ink})}{\partial x_m} \text{Э}_{nmj} = 0 \tag{1.2}$$

Однородные уравнения Папковича (1.2.) можно трактовать как критерий существования векторного потенциала (1.1) R_i. Следовательно, при выполнении (1.2) вектор перемещений R_i является векторным потенциалом для тензора дисторсии d_{ij}^0:

$$d_{ij}^0 = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k \text{Э}_{ijk} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \tag{1.3}$$

В этом случае дифференциальная форма $dR_i = d_{ij}^0 dx_j$ является полным дифференциалом.

Рассмотрим теперь неоднородные уравнения Папковича:

$$\frac{\partial(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in} - \omega_k \text{Э}_{ink})}{\partial x_m} \text{Э}_{nmj} = \Xi_{ij} \tag{1.4}$$

Величина Ξ_{ij} является псевдотензором-источником дислокаций [13] второго ранга, его знак меняется при замене правой тройки ортов на левую. Этот псевдотензор подчиняется дифференциальному закону сохранения, который легко следует из (1.4):

$$\frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_j} = 0\,. \tag{1.5}$$

Как и в случае с однородными уравнениями Папковича можно формально ввести вектор дефектных перемещений D_i как разность смещений двух бесконечно близких точек с помощью соотношения $dD_i = d_{ij}dx_j$. Однако здесь линейная дифференциальная форма dD_i уже не является полным дифференциалом и записанное уравнение для дефектных перемещений D_i не интегрируемо. Будем говорить, что вектором D_i определяется дефектное поле перемещений, в котором наряду с непрерывной частью имеет место и разрывная часть (дислокации). Решение неоднородных уравнений Папковича (1.4) можно представить в виде суммы решения однородного уравнения Папковича d_{ij}^0 и частного решения неоднородных уравнений Папковича d_{ij}^{Ξ}: $d_{ij} = d_{ij}^0 + d_{ij}^{\Xi}$. Решение однородного уравнения Папковича в силу уравнения (1.2) можно записать через перемещения в форме несимметричных соотношений Коши: $d_{ij}^0 = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$. Несимметричный тензор d_{ij}^0 представим в виде разложения на тензор девиатор γ_{ij}^0, шаровой тензор $\theta^0\delta_{ij}$ и антисимметричный тензор $-\omega_k^0 Э_{ijk}$. В свою очередь антисимметричный тензор запишем через псевдовектор поворотов ω_k^0: $d_{ij}^0 = \gamma_{ij}^0 + \frac{1}{3}\theta^0\delta_{ij} - \omega^0{}_k Э_{ijk}$, где

$$\gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\,, \qquad \theta^0 = \frac{\partial R_k}{\partial x_k}\,, \qquad \omega_k^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{nmk}\,.$$

Для частного решения неоднородного уравнения Папковича (1.4) не существует непрерывного векторного потенциала, т.е. его невозможно представить в форме (1.3). Для него можно записать только следующее симметрированное представление:

$$d_{ij}^{\Xi} = \gamma_{in}^{\Xi} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{in} - \omega_k^{\Xi}Э_{ink}$$

Очевидно, что наряду с d_{ij}^{Ξ} в качестве независимых «обобщенных перемещений» можно рассматривать величины γ_{ij}^{Ξ}, ω_k^{Ξ} и θ^{Ξ}. Общее решение неоднородного уравнения Папковича (1.4) можно записать в симметрированном виде:

$$d_{ij} = d_{ij}^0 + d_{ij}^{\Xi} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k Э_{ijk}$$

здесь: $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^0 + \gamma_{ij}^{\Xi} = \frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \gamma_{ij}^{\Xi}$,

$$\omega_k = \omega_k^0 + \omega_k^{\Xi} = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}Э_{ijk} + \omega_k^{\Xi}\,, \qquad \theta = \theta^0 + \theta^{\Xi} = \frac{\partial R_k}{\partial x_k} + \theta^{\Xi}$$

Пользуясь терминологией кинематики сред Коссера, будем называть $\omega_k^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}Э_{ijk}$ стесненным вращением, а ω_k^{Ξ} - свободным вращением или спином. Аналогично будем называть γ_{ij}^0 и θ^0 - стесненными деформациями, а γ_{ij}^{Ξ}, и θ^{Ξ} - свободным деформациями. Соответственно, введем определения тензоров свободной d_{ij}^{Ξ} и стесненной d_{ij}^0 дисторсии.

Обобщенными соотношениями Папковича (1.4) и соотношениями Коши для стеснённой дисторсии (1.3) описывается кинематика сред с сохраняющимися дислокациями.

Кинематика таких сред имеет следующую структуру:

1. Дефектное поле перемещений D_i представляет собой суперпозицию двух полей – непрерывного поля $D_i^1 \equiv R_i$ (перемещений R_i) и поля разрывов перемещений D_i^2 (дислокаций): $D_i = D_i^1 + D_i^2 = R_i + D_i^2$;

2. Поле разрывов перемещений D_i^2 (дислокаций) интегрально выражается через поля свободных деформаций и спинов по формулам, аналогичным формулам Чезаро:

$$D_i^2 = \int_{M_0}^{M_x} (\gamma_{ij}^{\Xi} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij} - \omega_k^{\Xi} Э_{ijk}) dy_j$$

однако, в отличие от формул Чезаро, здесь подынтегральное выражение не удовлетворяет условиям интегрируемости,

$$\frac{\partial(\gamma_{in}^{\Xi} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{in} - \omega_k^{\Xi} Э_{ink})}{\partial x_m} Э_{nmj} = \Xi_{ij} \neq 0 \tag{1.6}$$

т.е. криволинейный интеграл зависит от траектории интегрирования, а значит - векторное поле D_i^2 не является непрерывным. При этом можно определить три типа дислокаций $(D_i^2)_\gamma, (D_i^2)_\theta$ и $(D_i^2)_\omega$:

$$\begin{gathered} D_i^2 = \int_{M_0}^{M_x} (\gamma_{ij}^{\Xi} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij} - \omega_k^{\Xi} Э_{ijk}) dy_j = (\int_{M_0}^{M_x} \gamma_{ij}^{\Xi} dy_j) + (\frac{1}{3}\int_{M_0}^{M_x} \theta^{\Xi} dy_i) + (-\int_{M_0}^{M_x} \omega_k^{\Xi} Э_{ijk} dy_j) = \\ = (D_i^2)_\gamma + (D_i^2)_\theta + (D_i^2)_\omega \end{gathered} \tag{1.7}$$

Назовем $(D_i^2)_\gamma = (\int_{M_0}^{M_x} \gamma_{ij}^{\Xi} dy_j)$ - γ-дислокациями, $(D_i^2)_\theta = (\frac{1}{3}\int_{M_0}^{M_x} \theta^{\Xi} dy_i)$ - θ-дислокациями и $(D_i^2)_\omega = (-\int_{M_0}^{M_x} \omega_k^{\Xi} Э_{ijk} dy_j)$ - ω-дислокациями. Имеют место соотношения Коши, обобщенные на дефектные среды с дислокациями: $d_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial x_j} = \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial D_i^2}{\partial x_j} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + d_{ij}^{\Xi}$. Тензор «несовместности» перемещений Ξ_{ij} является тензором дислокаций [13]:

$$\Xi_{ij} = \frac{\partial d_{in}^{\Xi}}{\partial x_m} Э_{nmj} = \frac{\partial(\gamma_{in}^{\Xi} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{in} - \omega_k^{\Xi} Э_{ink})}{\partial x_m} Э_{nmj}$$

При этом можно определить три сорта тензора дислокаций, связанных соответственно с γ_{ij}^{Ξ}, ω_k^{Ξ} и θ^{Ξ}:

$$\begin{gathered} \Xi_{ij} = \frac{\partial(\gamma_{in}^{\Xi} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{in} - \omega_k^{\Xi} Э_{ink})}{\partial x_m} Э_{nmj} = \frac{\partial \gamma_{in}^{\Xi}}{\partial x_m} Э_{nmj} + \frac{1}{3}\frac{\partial \theta^{\Xi}}{\partial x_m} Э_{imj} - \frac{\partial \omega_k^{\Xi}}{\partial x_m} Э_{nki} Э_{nmj} = \\ = (\Xi_{ij})_\gamma + (\Xi_{ij})_\theta + (\Xi_{ij})_\omega \end{gathered} \tag{1.8}$$

Величины $(\Xi_{ij})_\gamma$, $(\Xi_{ij})_\theta$ и $(\Xi_{ij})_\omega$ в разложении (1.8) являются источниками соответственно трех типов дислокаций: γ-дислокаций, θ-дислокаций и ω-дислокаций, определение которых было дано выше формулами (1.7).

3. Имеет место дифференциальный закон сохранения дислокаций, вытекающий из определения тензора дислокаций: $\frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_j} = 0$. Источники $(\Xi_{ij})_\gamma$, $(\Xi_{ij})_\theta$ и $(\Xi_{ij})_\omega$ введенных типов дислокаций по отдельности также удовлетворяют закону сохранения.

4. Интегральный аналог закона сохранения дислокаций, очевидно, имеет следующий вид:

$$\iiint \frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_j} dV = \oiint \Xi_{ij} n_j dF = 0 .$$

Заметим, что в качестве меры поврежденности (дислокаций) можно выбрать поток тензора Ξ_{ij} через плоскость, в которой лежит выбранный плоский контур. Действительно, пусть замкнутая поверхность состоит из произвольной поверхности, натянутой на плоский контур и плоскости, содержащей этот плоский контур. Тогда из интегрального закона сохранения следует: $\iint\limits_F \Xi_{ij} n_j dF = -n_j \iint\limits_0 \Xi_{ij} dF$, здесь F - произвольная поверхность, натянутая на плоский контур. Иначе говоря, поток тензора Ξ_{ij} через любую поверхность, натянутую на плоский контур, один и тот же.

Из приведенного анализа (см. также [22]) следует, что понятие дефекта сплошной среды является сложным и может быть определено с помощью комплекса тензорных объектов. Для дислокаций таким комплексом объектов являются: псевдотензор-источник дислокаций Ξ_{ij}; тензор свободной дисторсии второго ранга d_{ij}^{Ξ}; вектор (тензор первого ранга) разрывных перемещений D_i^2. Сюда же можно отнести соответствующий вектор Бюргерса, который можно получить из (1.7) совмещая начальную M_0 и конечную M_x точку плоской траектории интегрирования (n_n - постоянный вектор нормали к плоскости траектории интегрирования):

$$b_i = \int\limits_{M_0}^{M_x} d_{ij}^{\Xi} dx_j \equiv \oint d_{ij}^{\Xi} dx_j = \oint d_{ij}^{\Xi} s_j ds = \oint d_{ij}^{\Xi} (v_m n_n Э_{jmn}) ds =$$

$$= \iint \frac{\partial d_{ij}^{\Xi} n_n Э_{jmn}}{\partial x_m} dF = n_n \iint \frac{\partial d_{ij}^{\Xi}}{\partial x_m} Э_{jmn} dF = n_n \iint \Xi_{in} dF$$

где s_j - единичный вектор, касательный к плоскому контуру, n_n- вектор единичной нормали к плоскости траектории, а векторы s_j, v_m, n_n образуют тройку ортов, связанных с текущей точкой контура.

Кинематический анализ модели позволяет установить полный набор обобщенных "координат" и «скоростей», необходимых для формулировки функционала и соответствующего вариационного уравнения модели среды. В рассматриваемом случае, для среды с полем сохраняющихся дислокаций, обобщенными координатами являются непрерывные величины R_i, d_{ij}^{Ξ}, а в качестве «скоростей» кинематического состояния среды следует рассматривать соответствующие тензорные величины d_{ij}^0, Ξ_{ij}. По существу, предлагается новая естественная классификация дислокаций. В работе [13] была предложена классификация дислокаций, основанная на инвариантном определении дислокаций скольжения $b_i v_i = v_i \oint d_{ij}^{\Xi} s_j ds$, $b_i n_i = n_i \oint d_{ij}^{\Xi} s_j ds$ и отрыва $b_i s_i = s_i \oint d_{ij}^{\Xi} s_j ds$, как соответствующих проекций вектора Бюргерса. Отметим, что такая классификация не отражает энергетической независимости выделенных сортов дислокаций.

Мы предлагаем иную классификацию, отраженную формулой (1.7), которая устраняет этот недостаток. В дальнейшем будет показано, что потенциальная энергия свободного формоизменения $\mu^{22}\gamma_{ij}^{\Xi}\gamma_{ij}^{\Xi}$, изменения объёма $\frac{(2\mu^{22}+3\lambda^{22})}{6}\theta^{\Xi}\theta^{\Xi}$ и кручения $\chi^{22}\omega_k^{\Xi}\omega_k^{\Xi}$ не имеют перекрестных членов. Поэтому потенциальные энергии введенных сортов дислокаций аддитивны, они могут существовать изолированно и независимо от других сортов дислокаций.

1.2 Вариационная формулировка модели.

В работах [16-21] сформулирован "кинематический" вариационный принцип построения моделей сред. В соответствии с ним определяются кинематические связи в среде, постулируется возможная работа внутренних сил как возможная работа реактивных силовых факторов на свойственных среде кинематических связях. Возможная работа внутренних сил представляется в виде линейной формы вариаций своих аргументов. Эта форма может быть проинтегрирована для консервативных сред. В результате определяется потенциальная энергия. Для линейных сред потенциальная энергия является квадратичной формой своих аргументов.

Для сред с сохраняющимися дислокациями такими кинематическими связями являются неоднородные уравнения Папковича для свободной дисторсии и однородные уравнения Папковича для стесненной дисторсии. Однородные уравнения Папковича для стесненной дисторсии могут быть проинтегрированы в общем виде. Их решением являются несимметричные соотношения Коши. Таким образом, в соответствии с "кинематическим" вариационным принципом возможную работу внутренних сил следует представить в виде:

$$\overline{\delta U} = \iiint [\sigma_{ij}\delta(d_{ij}^0 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) + m_{ij}\delta(\Xi_{ij} - \frac{\partial d_{in}^{\Xi}}{\partial x_m}\mathcal{Э}_{nmj})]dV\ . \qquad (1.9)$$

Здесь $\overline{\delta U}$ - возможная работа, в общем случае - линейная форма вариаций своих аргументов; σ_{ij} и m_{ij} - тензоры множителей Лагранжа, которые имеют физический смысл реактивных силовых факторов, обеспечивающих выполнение соответствующих кинематических связей.

Представим $\overline{\delta U}$ в (1.9) как линейную форму вариаций своих аргументов. Используя интегрирование по частям в слагаемых, содержащих производные, получим:

$$\overline{\delta U} = \iiint [\sigma_{ij}\delta d_{ij}^0 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta R_i + m_{ij}\delta \Xi_{ij} + \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m}Э_{nmj}\delta d_{in}^{\Xi}]dV + \tag{1.10}$$
$$+ \oiint [-\sigma_{ij}n_j\delta R_i - m_{ij}n_m Э_{nmj}\delta d_{in}^{\Xi}]dF$$

Тогда существует такой потенциал U (потенциальная энергия), что возможная работа $\overline{\delta U}$ в (1.10) является вариацией этого потенциала: $\overline{\delta U} = \delta U$,

$$U = \iiint U_V dV + \oiint U_F dF\ ,\ U_V = U_V(d_{ij}^0; d_{ij}^{\Xi}; \Xi_{ij}; R_i),\ \ U_F = U_F(d_{ij}^{\Xi}; R_i)\,.$$

В дальнейшем исключим из списков аргументов для плотностей потенциальной энергии вектор перемещений. Тогда рассматриваемая обобщенная модель среды с масштабными эффектами не будет противоречить в частном случае классической теории и известным экспериментальным данным. Этот вопрос далее будет обсуждаться дополнительно.

В результате получаем:

$$U = \iiint U_V dV + \oiint U_F dF\ ,\ U_V = U_V(d_{ij}^0; d_{ij}^{\Xi}; \Xi_{ij}),\ \ U_F = U_F(d_{ij}^{\Xi}) \tag{1.11}$$

Учитывая список аргументов в (1.11) и вычисляя вариацию δU в объёме и на поверхности с очевидностью получим:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial d_{ij}^0},\quad m_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \Xi_{ij}},\quad p_{in} = \frac{\partial U_V}{\partial d_{ij}^{\Xi}},\qquad M_{ij} = \frac{\partial U_F}{\partial d_{ij}^{\Xi}} \tag{1.12}$$

Формулы (1.12) следует трактовать как обобщенные формулы Грина для объемных и поверхностных силовых факторов. Эти соотношения позволяют записать лагранжиан и найти соответствующие уравнения Эйлера:

$$\delta L = \iiint [(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i^V)\delta R_i - (\frac{\partial m_{in}^{\Xi}}{\partial x_m}Э_{nmj} + p_{ij})\delta d_{ij}^{\Xi}]dV + \tag{1.13}$$
$$+ \oiint [(P_i^F - \sigma_{ij}n_j)\delta R_i - (M_{in} + m_{ij}n_m Э_{nmj})\delta d_{in}^{\Xi}]dF = 0$$

1.3. Определяющие соотношения.

Рассмотрим вновь плотности потенциальной энергии в объеме и на поверхности. Ограничимся рассмотрением физически линейных сред. Тогда U_V определяется как квадратичная форма своих аргументов:

$$2U_V = 2U_V(d_{ij}^0; d_{ij}^{\Xi}; \Xi_{ij}; R_i) = \tag{1.14}$$
$$= C_{ijnm}^{11}d_{ij}^0 d_{nm}^0 - 2C_{ijnm}^{12}d_{ij}^0 d_{nm}^{\Xi} + C_{ijnm}^{22}d_{ij}^{\Xi}d_{nm}^{\Xi} + C_{ijnm}^{33}\Xi_{ij}\Xi_{nm}$$

При получении (1.14) были введены следующие вполне обоснованные упрощения:

1. Коэффициент при слагаемом $R_i\,R_i$ принят равным нулю в (1.14). Иначе оператор уравнений равновесия имел бы вид уравнений Гельмгольца, что исключает существование однородных напряженно-деформированных состояний.
2. Приняты также равными нулю коэффициенты при всех остальных билинейных составляющих, включающих вектор перемещений. В противном случае, в отсутствие слагаемого, квадратичного относительно перемещений, объёмная плотность потенциальной энергии не была бы положительно определенной.

Структура тензоров модулей упругости C_{ijnm}^{pq} в (1.14) определяется их разложением по изотропным тензорам четвертого ранга, построенным как произведение пары тензоров Кронекера со всеми возможными перестановками индексов:

$$C_{ijnm}^{pq} = C_1^{pq}\delta_{ij}\delta_{nm} + C_2^{pq}\delta_{in}\delta_{jm} + C_3^{pq}\delta_{im}\delta_{jn} \quad (p, q = 1{,}2) \tag{1.15}$$

Окончательно, можем записать следующее выражение для объёмной плотности потенциальной энергии U_V:

$$\begin{aligned}
2U_V &= 2[\mu^{11}(\gamma_{nm}^0\gamma_{nm}^0) - 2\mu^{12}(\gamma_{nm}^0\gamma_{nm}^\Xi) + \mu^{22}(\gamma_{nm}^\Xi\gamma_{nm}^\Xi)] + \\
&+ \frac{1}{3}[(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})\theta^0\theta^0 - 2(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})\theta^0\theta^\Xi + (2\mu^{11} + 3\lambda^{11})\theta^\Xi\theta^\Xi] + \\
&+ 2[\chi^{11}\omega_{nm}^0\ \omega_{nm}^0 - 2\chi^{12}\omega_{nm}^0\ \omega_{nm}^\Xi + \chi^{22}\omega_{nm}^\Xi\omega_{nm}^\Xi] + \\
&+ C_{ijnm}^{33}\left(\frac{\partial d_{ia}^\Xi}{\partial x_b}Э_{abj}\right)\left(\frac{\partial d_{nc}^\Xi}{\partial x_d}Э_{cdm}\right)
\end{aligned}$$

Заметим, что часть объёмной плотности потенциальной энергии, связанная с псевдотензором-источником дислокаций

$$C_{ijnm}^{33}\Xi_{ij}\Xi_{nm} = C_{ijnm}^{33}\left(\frac{\partial d_{ia}^\Xi}{\partial x_b}Э_{abj}\right)\left(\frac{\partial d_{nc}^\Xi}{\partial x_d}Э_{cdm}\right) = (C_{ijnm}^{33}Э_{abj}Э_{cdm})\frac{\partial d_{ia}^\Xi}{\partial x_b}\frac{\partial d_{nc}^\Xi}{\partial x_d} = \overline{C}_{inabcd}^{33}\ \frac{\partial d_{ia}^\Xi}{\partial x_b}\frac{\partial d_{nc}^\Xi}{\partial x_d}$$

определяет быстроменяющуюся, локальную часть потенциальной энергии дислокаций. Остальная часть объёмной плотности потенциальной энергии является медленно меняющейся и определяется как сумма потенциальных энергий трех типов дислокаций: γ - дислокаций, θ - дислокаций и ω -дислокаций. Следовательно, медленно меняющаяся часть энергии деформации не содержит перекрестных членов от указанных типов дислокаций и является аддитивной формой относительно компонент свободной дисторсии. Отметим, что для оценок поврежденности сред применяются интегральные характеристики. Поэтому в этих задачах, для приближенных оценок, вероятно, можно пренебречь локальной, быстро изменяемой частью энергии. При этом действительно имеет место аддитивность в разложении плотности потенциальной энергии относительно компонент свободной дисторсии. Это обстоятельство использовалось в качестве обоснования предложенной формулами (1.7) новой классификации типов дислокаций.

Обобщенные уравнения закона Гука (1.12) для объёмных силовых факторов запишем в виде:

$$\sigma_{ij} = C_{ijnm}^{11}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} - C_{ijnm}^{12}d_{nm}^\Xi, \quad p_{ij} = -C_{ijnm}^{21}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C_{ijnm}^{22}d_{nm}^\Xi, \quad m_{ij} = C_{ijnm}^{33}\Xi_{nm} \tag{1.16}$$

Отметим, что обобщенные импульсы σ_{ij}, p_{ij}, m_{ij} в (1.16) зависят не только от обобщенных скоростей $\dfrac{\partial R_n}{\partial x_m}$, Ξ_{ij}, но и от обобщенных координат d_{ij}^Ξ.

Из (1.16) следует, что наряду с тензором напряжений σ_{ij} в таких средах имеют место дополнительные силовые факторы - "дислокационные" напряжения p_{ij} [10]. Положим, что $C_{ijnm}^{12} = 0$. В этом случае общая краевая задача распадается на краевую задачу относительно перемещений R_i и краевую задачу относительно свободной дисторсии d_{ij}^Ξ. При этом краевая задача относительно перемещений при дополнительном предположении $\chi^{11} = 0$ (теория упругости с симметричным тензором напряжений) совпадает с классической теорией упругости. Тогда силовой фактор σ_{ij} приобретает смысл классических напряжений. Соответственно, силовой фактор p_{ij} приобретает смысл винклеровской реакции в уравнениях равновесия моментных напряжений. При $C^{12}_{ijnm} \neq 0$ происходит взаимное возмущение классического поля перемещений и чисто дислокационных состояний. Перекрестные члены в уравнениях закона Гука для σ_{ij} и p_{ij} и отражают эти возмущения. Эти же соображения дают алгоритм решения общей краевой задачи методом последовательных приближений.

Заметим, что для гладкой поверхности всегда существует естественно выделенное направление - нормаль к поверхности. Уравнения закона Гука для внутренних силовых факторов на поверхности должны иметь трансверсально-изотропный характер и, в результате, кинематические факторы, связанные с нормалью к поверхности и с касательной плоскостью, будут входить в эти уравнения закона Гука неравноправно. Исследуем более подробно поверхностную плотность потенциальной энергии. Для этого сначала рассмотрим выражение для поверхностной части возможной работы. Первое слагаемое в нем полностью соответствует классическому представлению. Оно появляется в результате интегрирования по частям выражения $\iiint [\sigma_{ij}\delta(\frac{\partial R_i}{\partial x_j})]dV$ в равенстве (1.10). Второе слагаемое в выражении поверхностной части возможной работы является неклассическим, обязано своим появлением «кинематическому» вариационному принципу построения модели и связано с поверхностной энергией адгезии U_F. Рассмотрим это слагаемое более подробно:

$$\oiint m_{ij}n_m Э_{nmj}\delta d^{\Xi}_{in}dF = \oiint m_{ij}n_m Э_{nmj}\delta d^{\Xi}_{ik}(\delta_{kn} - n_k n_n)dF + \oiint m_{ij}n_m Э_{nmj}\delta d^{\Xi}_{ik}n_k n_n dF \quad (1.17)$$

Заметим, что $n_n n_m Э_{nmj} = 0$ как свертка симметричного тензора $n_n n_m$ с антисимметричным псевдотензором $Э_{nmj}$. Следовательно, работа моментных напряжений (1.17) на поверхности тела совершается не на всех девяти компонентах тензора свободной дисторсии d^{Ξ}_{in}, а только на шести из них $d^{\Xi}_{ik}(\delta_{kn} - n_k n_n)$:

$$\oiint m_{ij}n_m Э_{nmj}\delta d^{\Xi}_{in}dF = \oiint m_{ij}n_m Э_{nmj}\delta d^{\Xi}_{ik}(\delta_{kn} - n_k n_n)dF \quad (1.18)$$

На основании (1.18) поверхностная плотность потенциальной энергии имеет вид:

$$U_F = \frac{1}{2}A_{ijnm}d^{\Xi}_{np}(\delta_{pm} - n_p n_m)d^{\Xi}_{iq}(\delta_{qj} - n_q n_j) \quad (1.19)$$

Обобщенные уравнения закона Гука на поверхности даются соотношениями (1.12). Заметим, что так же как и объёмная, поверхностная плотность потенциальной энергии не зависит от вектора перемещений. Иначе это приводит к систематическим поправкам в статические граничные условия классического решения. Это противоречит имеющимся экспериментальным данным.

Важно отметить, что лемма (1.18) позволяет уточнить список аргументов поверхностной плотности потенциальной энергии в (1.19). Этот уточненный список аргументов определяется теперь шестью «плоскими» компонентами тензора свободной дисторсии $d^{\Xi}_{im}(\delta_{pm} - n_p n_m)$: $U_F = U_F(d^{\Xi}_{ik}(\delta_{kj} - n_k n_j))$. Можно, однако, сохранить первоначальный вид уравнений закона Гука на поверхности тела и выражение для плотности поверхностной потенциальной энергии:

$$U_F=\frac{1}{2}A_{ijnm}d^{\Xi}_{np}(\delta_{pm}-n_pn_m)d^{\Xi}_{iq}(\delta_{qj}-n_qn_j)=$$
$$=\frac{1}{2}A_{ijnm}(\delta_{pm}-n_pn_m)(\delta_{qj}-n_qn_j)d^{\Xi}_{np}d^{\Xi}_{iq}=\frac{1}{2}A^*_{ijnm}d^{\Xi}_{nm}d^{\Xi}_{ij}$$

В этом случае следует иметь в виду, что тогда тензор адгезионных модулей A^*_{ijnm} должен удовлетворять условиям:

$$A^*_{iqnp}=A_{ijnm}(\delta_{pm}-n_pn_m)(\delta_{qj}-n_qn_j),$$
$$A^*_{iqnp}n_p=A_{ijnm}(\delta_{pm}n_p-n_pn_pn_m)(\delta_{qj}-n_qn_j)\equiv 0 \qquad (1.20)$$
$$A^*_{iqnm}n_q=A_{ijnm}(\delta_{pm}-n_pn_m)(\delta_{qj}n_q-n_qn_qn_j)\equiv 0$$

Структура тензора модулей адгезии A^*_{ijnm} (в дальнейшем мы не будем ставить звездочку) определяется его разложением по тензорам четвертого ранга, построенным как все возможные произведения пар "плоских" тензоров Кронекера вида $(\delta_{ij}-n_in_j)$ и тензоров, образованных произведением векторов единичной нормали вида n_in_j, со всеми возможными перестановками индексов. Учтем, кроме того, условие (1.20). Можно убедиться, что в таком случае общая структура тензора модулей адгезии имеет вид

$$\begin{aligned}A_{ijnm}=[&\lambda^F(\delta_{ij}-n_in_j)(\delta_{nm}-n_nn_m)+\delta^F n_in_n(\delta_{jm}-n_jn_m)+\\+&(\mu^F+\chi^F)(\delta_{in}-n_in_n)(\delta_{jm}-n_jn_m)+(\mu^F-\chi^F)(\delta_{im}-n_in_m)(\delta_{jn}-n_jn_n)],\end{aligned} \qquad (1.21)$$

здесь μ^F,λ^F,χ^F и δ^F - адгезионные модули.

Рассмотрим поверхностную плотность потенциальной энергии и дадим физическую трактовку адгезионным составляющим, учитывая соотношения (1.19) и (1.21). Представим свободную дисторсию в виде тензорного разложения на "плоский" девиатор:

$$\begin{aligned}{}^2\gamma_{ij}=&\frac{1}{2}d^{\Xi}_{nm}(\delta_{in}-n_in_n)(\delta_{jm}-n_jn_m)+\frac{1}{2}d^{\Xi}_{nm}(\delta_{jn}-n_jn_n)(\delta_{im}-n_in_m)-\\-&\frac{1}{2}d^{\Xi}_{nm}(\delta_{ij}-n_in_j)(\delta_{nm}-n_nn_m)\end{aligned},$$

"плоский" шаровой тензор: $\qquad {}^2\theta=d^{\Xi}_{nm}(\delta_{nm}-n_nn_m)$

"плоский" антисимметричный тензор:

$${}^2\omega_{ij}=\frac{1}{2}d^{\Xi}_{nm}(\delta_{in}-n_in_n)(\delta_{jm}-n_jn_m)-\frac{1}{2}d^{\Xi}_{nm}(\delta_{jn}-n_jn_n)(\delta_{im}-n_in_m)$$

и "плоский" вектор углов поворота поверхности при ее изгибе:

$${}^2\alpha_i=d^{\Xi}_{nm}n_n(\delta_{mi}-n_mn_i)$$

Здесь верхний индекс "2" подчеркивает тот факт, что соответствующие компоненты тензора свободной дисторсии вычисляются на поверхности тела. В результате получим:

$$d^{\Xi}_{ik}(\delta_{jk}-n_jn_k)={}^2\gamma_{ij}+\frac{1}{2}{}^2\theta(\delta_{ij}-n_in_j)+{}^2\omega_{ij}+{}^2\alpha_jn_i \qquad (1.22)$$

Учитывая (1.21), можно убедиться, что представленный в форме разложения (1.22) тензор свободной дисторсии на поверхности, преобразует потенциальную энергию адгезии к "каноническому" виду:

$$2U_F=A_{ijnm}d^{\Xi}_{ij}d^{\Xi}_{nm}=(\mu^F+\lambda^F)({}^2\theta\,{}^2\theta)+2\mu^F({}^2\gamma_{ij}\,{}^2\gamma_{ij})+2\chi^F({}^2\omega_{ij}\,{}^2\omega_{ij})+\delta^F({}^2\alpha_k\,{}^2\alpha_k) \qquad (1.23)$$

Каноничность потенциальной энергии (1.23) дает основание утверждать о существовании четырех энергетически независимых типов адгезионных взаимодействий (отсутствие перекрестных членов). Каждое взаимодействие характеризуется своим адгезионным модулем.

Таким образом, дана полная и корректная модель сред с сохраняющимися дислокациями. Сформулирована потенциальная энергия (1.11) состоящая из объёмной (1.14) и поверхностной (1.23) частей и соответствующий лагранжиан:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \{C^{11}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - 2C^{12}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}d^{\Xi}_{ij} + C^{22}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm}d^{\Xi}_{ij} + C^{33}_{ijnm}\Xi_{nm}\Xi_{ij}\}dV - \\ -\frac{1}{2}\oiint A_{ijnm}d^{\Xi}_{nm}d^{\Xi}_{ij}dF \tag{1.24}$$

На основе проведенного кинематического анализа предложена иная классификация дислокаций, позволяющая выделить три типа дислокаций: γ-дислокации, θ-дислокации, ω-дислокации. Эта классификация, дает новую как физическую, так и кинематическую трактовку дислокаций, так как отражает связь дислокаций с формоизменением - γ, с изменением объема θ (пористость) и со скручиванием ω (спины). Предложенная классификация, фактически позволяет прогнозировать частные случаи сред с сохраняющимися дислокациями, когда в среде доминируют лишь один или два типа дислокаций. В таких частных моделях удается сократить количество степеней свободы, что существенно облегчает исследование отдельных свойств сред с сохраняющимися дислокациями. Напомним, что каждой точке среды с сохраняющимися дислокациями приписывается двенадцать степеней свободы: три компоненты перемещений R_i, три компоненты вращений ω^{Ξ}_k и шесть компонент деформиции $\varepsilon^{\Xi}_{ij} = \gamma^{\Xi}_{ij} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij}$.

Частный случай 1. Доминирующими являются дислокации, порожденные только свободными поворотами ω^{Ξ}_k. Это - «классический» вариант модели сред Коссера с шестью степенями свободы R_i и ω^{Ξ}_k. В такой среде $\gamma^{\Xi}_{ij} = 0$ и $\theta^{\Xi} = 0$. Тензор свободной дисторсии определяется соотношением $d^{\Xi}_{ij} = -\omega^{\Xi}_k Э_{ijk}$.

Частный случай 2. Доминирующими являются дислокации, порожденные только свободным изменением объёма θ^{Ξ}. Это - модель пористой среды с четырьмя степенями свободы R_i, θ^{Ξ}. В такой среде $\omega^{\Xi}_k = 0$ и $\gamma^{\Xi}_{ij} = 0$. Тензор свободной дисторсии определяется соотношением $d^{\Xi}_{ij} = \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij}$.

Частный случай 3. Доминирующими являются дислокации, порожденные только свободным изменением формы γ^{Ξ}_{ij}. Это - модель среды с двойникованием с восемью степенями свободы R_i, γ^{Ξ}_{ij}. В такой среде $\omega^{\Xi}_k = 0$ и $\theta^{\Xi} = 0$. Очевидно, что при этом $d^{\Xi}_{ij} = \gamma^{\Xi}_{ij}$.

К исследованию этих частных моделей мы и переходим. Далее при формулировке частных моделей предполагается последовательно отметить следующие моменты: указать соответствующие кинематические соотношения; записать систему определяющих уравнений моделей; представить Лагранжиан и дать полную вариационную формулировку моделей; получить систему разрешающих уравнений, записать их относительно вектора перемещений и компонент тензора свободной дисторсии; для каждой из рассматриваемых моделей записать разложение полного решения на «классическое» состояние и «когезионное», локальное состояние, которое предлагается рассматривать как поправки к классическому решению, определяемые учетом масштабных эффектов в рамках этих моделей.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ СРЕДА КОССЕРА (ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ СРЕД С СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ).

Рассмотрим частный случай ССД, когда тензор свободной дисторсии $d_{ij}^{\Xi} = \gamma_{ij}^{\Xi} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij} - \omega_k^{\Xi}Э_{ijk}$ определяется только свободными поворотами, а свободные деформации равны нулю $\gamma_{ij}^{\Xi} = 0$, $\theta^{\Xi} = 0$. В этом случае имеем среду с шестью независимыми степенями свободы - тремя компонентами вектора перемещений R_i и тремя компонентами псевдовектора свободных поворотов ω_k^{Ξ}. Каждая точка такого континуума ведет себя как абсолютно жесткое тело: может смещаться и поворачиваться, в отличие от точек классической среды Коши, которые могут только смещаться. Такая кинематика является характерной для классических сред Коссера. Построим такой частный случай теории сред с сохраняющимися дислокациями и сравним соответствующие краевые задачи. Тензор свободной дисторсии здесь определяется соотношением:

$$d_{ij}^{\Xi} = (-\omega_k^{\Xi}Э_{ijk}) \tag{2.1}$$

Псевдотензор дислокаций Ξ_{ij} записывается следующим образом:

$$\Xi_{ij} = -\frac{\partial\omega_k^{\Xi}}{\partial x_m}Э_{ink}Э_{nmj} = -\frac{\partial\omega_k^{\Xi}}{\partial x_m}(\delta_{km}\delta_{ij} - \delta_{kj}\delta_{im}) = (\frac{\partial\omega_j^{\Xi}}{\partial x_i} - \frac{\partial\omega_k^{\Xi}}{\partial x_k}\delta_{ij})$$

Лагранжиан теории сред Коссера записывается как частный случай лагранжиана (1.24):

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [C_{ijnm}^{11}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - 2(C_{ijnm}^{12}Э_{ijk})\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\omega_k^{\Xi} + (C_{ijnm}^{22}Э_{ijp}Э_{nmq})\omega_p^{\Xi}\omega_q^{\Xi} +$$
$$+ (C_{ijnm}^{33} - C_{qqnm}^{33}\delta_{ij} - C_{ijpp}^{33}\delta_{nm} + C_{ppqq}^{33}\delta_{ij}\delta_{nm})\frac{\partial\omega_i^{\Xi}}{\partial x_j}\frac{\partial\omega_n^{\Xi}}{\partial x_m}]dV - \tag{2.2}$$
$$-\frac{1}{2}\iiint (A_{ijnm}Э_{ijp}Э_{nmq})\omega_p^{\Xi}\omega_q^{\Xi}dV$$

Учтем, что имеют место следующие свертки модулей упругости

$$\begin{gathered} C_{ijnm}^{pq}Э_{ijk} = 2\chi^{pq}Э_{nmk} \\ C_{ijnm}^{pq}Э_{ijp}Э_{nmq} = 4\chi^{pq}\delta_{pq} \\ (C_{ijnm}^{33} - C_{qqnm}^{33}\delta_{ij} - C_{ijpp}^{33}\delta_{nm} + C_{ppqq}^{33}\delta_{ij}\delta_{nm}) = [(2\mu^{pq} + 4\lambda^{pq})\delta_{ij}\delta_{nm} + (\mu^{pq} + \chi^{pq})\delta_{in}\delta_{jm} + (\mu^{pq} - \chi^{pq})\delta_{im}\delta_{jn}] \\ (A_{ijnm}Э_{ijp}Э_{nmq}) = [\delta^F(\delta_{pq} - n_p n_q) + 4\chi^F n_p n_q] \end{gathered} \tag{2.3}$$

Тогда с учетом формул (1.15), (2.3) Лагранжиан сред Коссера (2.2) приобретает следующий окончательный вид

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \{[\frac{1}{3}(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})\delta_{ij}\delta_{nm} + 2\mu^{11}(\frac{1}{2}\delta_{in}\delta_{jm} + \frac{1}{2}\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{nm})]\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} +$$
$$+ 4\chi^{11}\omega_k^0\omega_k^0 + 8\chi^{12}\omega_k^0\omega_k^\Xi + 4\chi^{22}\omega_k^\Xi\omega_k^\Xi +$$
$$+[(2\mu^{33} + 4\lambda^{33})\delta_{ij}\delta_{nm} + (\mu^{33} + \chi^{33})\delta_{in}\delta_{jm} + (\mu^{33} - \chi^{33})\delta_{im}\delta_{jn}]\frac{\partial \omega_i^\Xi}{\partial x_j}\frac{\partial \omega_n^\Xi}{\partial x_m}\}dV - \tag{2.4}$$
$$-\frac{1}{2}\oiint [\delta^F(\delta_{pq} - n_p n_q) + 4\chi^F n_p n_q]\omega_p^\Xi\omega_q^\Xi dV$$

Общий вид Лагранжиана (и потенциальной энергии) позволяет записать уравнения закона Гука для сред Коссера, :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \frac{\partial R_i}{\partial x_j}} =$$
$$= \frac{1}{3}(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + 2\mu^{11}(\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij}) + 2\chi^{11}(\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}) - 2\chi^{12}\omega_k^\Xi Э_{ijk}$$
$$p_i = \frac{\partial U_V}{\partial \omega_i^\Xi} = -2\chi^{12}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{nmi} + 4\chi^{22}\omega_i^\Xi \tag{2.5}$$
$$m_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \frac{\partial \omega_i^\Xi}{\partial x_j}} = (2\mu^{33} + 4\lambda^{33})\frac{\partial \omega_k^\Xi}{\partial x_k}\delta_{ij} + (\mu^{33} + \chi^{33})\frac{\partial \omega_i^\Xi}{\partial x_j} + (\mu^{33} - \chi^{33})\frac{\partial \omega_j^\Xi}{\partial x_i}$$
$$M_i = \frac{\partial U_F}{\partial \omega_i^\Xi} = \delta^F \omega_j^\Xi(\delta_{ij} - n_i n_j) + 4\chi^F(\omega_j^\Xi n_j)n_i$$

В результате вариационное уравнение теории сред Коссера приобретает вид:

$$\delta L = \iiint [(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i^V)\delta R_i + (\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_j} - p_i)\delta\omega_i^\Xi]dV +$$
$$+\oiint (P_i^F - \sigma_{ij}n_j)\delta R_i dF - \oiint (m_{ij}n_j + M_i)\delta\omega_i^\Xi dF = 0 \tag{2.6}$$

Уравнения равновесия сил и уравнения равновесия моментов легко переписываются в кинематических переменных:

$$(\mu^{11} + \chi^{11})(\Delta R_i - \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j}) + (2\mu^{11} + \lambda^{11})\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} + 2\chi^{12}\frac{\partial \omega_n^\Xi}{\partial x_m}Э_{nmi} + P_i^V = 0 \tag{2.7}$$
$$(\mu^{33} + \chi^{33})(\Delta\omega_i^\Xi - \frac{\partial^2 \omega_k^\Xi}{\partial x_i \partial x_k}) + 4(\mu^{33} + \lambda^{33})\frac{\partial^2 \omega_k^\Xi}{\partial x_i \partial x_k} - 4\chi^{22}\omega_i^\Xi + 2\chi^{12}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{nmi} = 0 \tag{2.8}$$

2.2.1. Прямое интегрирование системы уравнений теории сред Коссера.

Возьмем ротор от уравнений равновесия сил (2.7):

$$2\chi^{12}(\Delta\omega_i^\Xi - \frac{\partial^2 \omega_k^\Xi}{\partial x_i \partial x_k}) = (\mu^{11} + \chi^{11})\Delta\frac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{nmi} + \frac{\partial P_n^V}{\partial x_m}Э_{nmi} \tag{2.9}$$

Из уравнений равновесия моментов (2.8) исключим $(\Delta\omega_i^\Xi - \frac{\partial^2 \omega_k^\Xi}{\partial x_i \partial x_k})$ с помощью (2.9) и получим общее решение уравнений теории сред Коссера для спинов:

$$\omega_i^{\Xi} = \frac{(\mu^{33}+\lambda^{33})}{\chi^{22}}\frac{\partial^2\omega_k^{\Xi}}{\partial x_i \partial x_k} +$$
$$+\frac{\chi^{12}}{2\chi^{22}}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{nmi} + \frac{(\mu^{33}+\chi^{33})}{8\chi^{12}\chi^{22}}(\mu^{11}+\chi^{11})\Delta\frac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{nmi} + \frac{(\mu^{33}+\chi^{33})}{8\chi^{12}\chi^{22}}\frac{\partial P_n^V}{\partial x_m}Э_{nmi} \tag{2.10}$$

Взяв дивергенцию уравнений равновесия моментов (2.8), получим сразу уравнение на дивергенцию спинов:

$$(\mu^{33}+\lambda^{33})\Delta\frac{\partial\omega_k^{\Xi}}{\partial x_k} - \chi^{22}\frac{\partial\omega_k^{\Xi}}{\partial x_k} = 0 \tag{2.11}$$

Вычислим ротор спинов из (2.10)

$$2\chi^{12}\frac{\partial\omega_p^{\Xi}}{\partial x_q}Э_{pqi} = -\frac{\chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}}(\Delta R_i - \frac{\partial^2 R_k}{\partial x_i \partial x_k}) - \frac{(\mu^{33}+\chi^{33})(\mu^{11}+\chi^{11})}{4\chi^{22}}\Delta(\Delta R_i - \frac{\partial^2 R_k}{\partial x_i \partial x_k}) -$$
$$-\frac{(\mu^{33}+\chi^{33})}{4\chi^{22}}(\Delta P_i^V - \frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k})$$

Исключая ротор спинов из уравнений равновесия сил (2.7), получим:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i^V =$$
$$= (2\mu^{11}+\lambda^{11})\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} + (\mu^{11} + \frac{\chi^{11}\chi^{22}-\chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}})(\Delta R_i - \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j}) + P_i^V - \tag{2.12}$$
$$-\frac{(\mu^{33}+\chi^{33})(\mu^{11}+\chi^{11})}{4\chi^{22}}\Delta(\Delta R_i - \frac{\partial^2 R_k}{\partial x_i \partial x_k}) - \frac{(\mu^{33}+\chi^{33})}{4\chi^{22}}(\Delta P_i^V - \frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k}) = 0$$

Отсюда следует, что система уравнений теории сред Коссера сводится к однородному уравнению Гельмгольца (2.11) относительно дивергенции спинов и системе уравнений четвертого порядка специального вида (2.12) относительно вектора перемещений. Алгебраическое уравнение относительно спинов (2.10) можно тогда трактовать как разложение спинов на сумму операторов от фундаментальных решений уравнений (2.11) и (2.12). Специальный вид уравнений равновесия сил в перемещениях (2.12) определяется тем, что потенциальная часть вектора перемещений в средах Коссера остается классической.

$$(2\mu^{11}+\lambda^{11})\Delta\frac{\partial R_k}{\partial x_k} + \frac{\partial P_k^V}{\partial x_k} = 0 \tag{2.13}$$

Обратим внимание на тот факт, что модуль Юнга $E_0 = (2\mu^{11}+\lambda^{11})$ в средах Коссера не поврежден θ- и γ-дислокациями и является супермодулем. Это следствие того определения сред Коссера, которое дано в настоящей работе – среды Коссера есть частный случай сред с сохраняющимися дислокациями, в которых доминирует только один тип дислокаций - ω-дислокации, а θ- и γ-дислокации равны нулю.

В то же время вихревая часть удовлетворяет уравнениям не второго, а четвертого порядка

$$(\mu^{11}+\frac{\chi^{11}\chi^{22}-\chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}})\Delta(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}-\frac{\partial R_j}{\partial x_i})-\frac{(\mu^{33}+\chi^{33})(\mu^{11}+\chi^{11})}{4\chi^{22}}\Delta\Delta(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}-\frac{\partial R_j}{\partial x_i})+$$

$$+(\frac{\partial P_i^V}{\partial x_j}-\frac{\partial P_j^V}{\partial x_i})-\frac{(\mu^{33}+\chi^{33})}{4\chi^{22}}\Delta(\frac{\partial P_i^V}{\partial x_j}-\frac{\partial P_j^V}{\partial x_i})=0$$

Здесь ситуация иная. Даже полагая моментный модуль нулю: $l_\omega^2=\frac{(\mu^{33}+\chi^{33})}{4\chi^{22}}=0$, мы получим эффект поврежденности – вместо идеального модуля $G_0=(\mu^{11}+\chi^{11})$ мы получим поврежденный ω-дислокациями модуль $G_\omega=(\mu^{11}+\chi^{11}-\frac{\chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}})$.

2.2.2. Физическая трактовка фундаментальных решений теории сред Коссера.

Под фундаментальными решениями мы понимаем систему линейно-независимых функций, удовлетворяющих системе однородных разрешающих уравнений. Эта система функций достаточна для решения соответствующей смешанной краевой задачи. Введем оператор «классического» равновесия:

$$L_{ij}(...)=E_0\frac{\partial^2(...)}{\partial x_i\partial x_j}+G_\omega[\Delta(...)\delta_{ij}-\frac{\partial^2(...)}{\partial x_i\partial x_j}]$$

Здесь кавычки поставлены для того, чтобы подчеркнуть факт наличия глобального эффекта в теории сред с сохраняющимися дислокациями – поврежденность модуля G_0 и замены его модулем G_ω.

Прямой проверкой докажем лемму коммутативности:

$$[\Delta(...)\delta_{ik}-\frac{\partial^2(...)}{\partial x_i\partial x_k}]L_{kj}R_j=G_\omega\Delta(\Delta R_i-\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i\partial x_j})=L_{ik}[\Delta(...)\delta_{kj}-\frac{\partial^2(...)}{\partial x_k\partial x_j}]R_j \qquad (2.14)$$

Тогда разрешающие уравнения (2.12) можно представить в виде произведения операторов:

$$\{(...)\delta_{ik}-l_\omega^2\frac{G_0}{G_\omega}[\Delta(...)\delta_{ik}-\frac{\partial^2(...)}{\partial x_i\partial x_k}]\}(L_{kj}R_j+P_k^V)+l_\omega^2\frac{(G_0-G_\omega)}{G_\omega}(\Delta P_i^V-\frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i\partial x_k})=0 \qquad (2.15)$$

Дадим определение вектору когезионных перемещений u_k:

$$u_k=-l_\omega^2\frac{1}{G_\omega}(L_{kj}R_j+P_k^V) \qquad (2.16)$$

Тогда из уравнений равновесия сил, записанных в форме (2.15) следуют уравнения, определяющие равновесие соответствующих когезионных сил:

$$G_0(\Delta u_i-\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\partial x_k})-\frac{G_\omega}{l_\omega^2}u_i+l_\omega^2\frac{(G_0-G_\omega)}{G_\omega}(\Delta P_i^V-\frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i\partial x_k})=0 \qquad (2.17)$$

Из (2.17) следует, что в средах Коссера вектор когезионных перемещений является чисто вихревым вектором:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \qquad (2.18)$$

Используя (2.18) при исследовании (2.16) мы не придем к противоречию, так как получим (2.13). Перепишем определение когезионных перемещений (2.16) в следующем виде:

$$L_{kj}R_j + (P_k^V + \frac{G_\omega}{l_\omega^2}u_k) = 0 \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что если на когезионные перемещения возможно сформулировать собственную краевую задачу, общее решение теории сред Коссера для перемещений сводится к решению системы уравнений «классической» теории упругости с эффективной объемной силой, имеющей вихревую составляющую. Определим частное решение R_i^*:

$$E_0\frac{\partial^2 R_j^*}{\partial x_i \partial x_j} + G_\omega(\Delta R_i^* - \frac{\partial^2 R_j^*}{\partial x_i \partial x_j}) + l_\omega^2\frac{(G_0+G_\omega)}{G_\omega}(\Delta P_i^V - \frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k}) = 0 \tag{2.20}$$

Раскроем в (2.19) оператор «классического» равновесия и проведем некоторые группировки с учетом (2.17), (2.18) и (2.20):

$$E_0\frac{\partial^2(R_j + \frac{G_0}{G_\omega}u_j - R_j^*)}{\partial x_i \partial x_j} + G_\omega[\Delta(R_i + \frac{G_0}{G_\omega}u_i - R_i^*) - \frac{\partial^2(R_j + \frac{G_0}{G_\omega}u_j - R_j^*)}{\partial x_i \partial x_j}] + P_i^V = 0$$

Из этого представления следует определение "классических" перемещений:

$$U_i = (R_j + \frac{G_0}{G_\omega}u_j - R_j^*) \tag{2.21}$$

Действительно, "классические" перемещения удовлетворяют "классическим" уравнениям равновесия, вытекающим из (2.15) с учетом (2.16), (2.17), (2.20) и (2.21):

$$L_{ik}U_k + P_i^V = 0 \tag{2.22}$$

Таким образом, построено общее решение системы уравнений равновесия в теории сред Коссера:

$$R_i = U_i - \frac{G_0}{G_\omega}u_i + R_i^* \tag{2.23}$$

Общее решение системы уравнений равновесия моментов в теории сред Коссера можно переписать в терминах классических U_i и когезионных u_i перемещений:

$$\begin{aligned}\omega_i^\Xi = 4l_\omega^2\frac{\partial^2\omega_k^\Xi}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\chi^{12}}{2\chi^{22}}\frac{\partial U_n}{\partial x_m}Э_{nmi} - \frac{G_0}{2\chi^{12}}\frac{G_0}{G_\omega}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}Э_{nmi} + \\ + \frac{\chi^{12}}{2\chi^{22}}\frac{\partial R_n^*}{\partial x_m}Э_{nmi} - l_\omega^2\frac{\chi^{12}}{2\chi^{22}G_\omega}\frac{\partial P_n^V}{\partial x_m}Э_{nmi}\end{aligned} \tag{2.24}$$

Таким образом, построение общего решения теории сред Коссера сведено к определению шести фундаментальных решений: классических перемещений U_i, имеющих три независимые компоненты, когезионных перемещений u_i, имеющих две независимые компоненты, и псевдоскаляра $\frac{\partial\omega_k^\Xi}{\partial x_k}$. Соответственно, связанная краевая задача (2.4) дает шесть граничных условий в каждой неособенной точке поверхности тела.

2.3. Теория сред Аэро-Кувшинского как частный случай среды Коссера.

Псевдоскаляр $\dfrac{\partial \omega_k^{\Xi}}{\partial x_k}$, как фундаментальное решение теории сред Коссера, определен как общее решение однородного уравнения Гельмгольца (2.11).

$$4l_\omega^2 \Delta \frac{\partial \omega_k^{\Xi}}{\partial x_k} - \frac{\partial \omega_k^{\Xi}}{\partial x_k} = 0$$

Если формально искать медленно меняющуюся часть решения этого уравнения, пренебрегая лапласианом от функции по сравнению с самой функцией, то получим:

$$\frac{\partial \omega_k^{\Xi}}{\partial x_k} = 4l_\omega^2 \Delta \frac{\partial \omega_k^{\Xi}}{\partial x_k} \approx 0 \qquad (2.25)$$

Это означает, что при построении медленно меняющейся части решения можно пренебрегать фундаментальным решением, определяющим чисто дислокационное кинематическое состояние. Общее решение для спинов тогда будет полностью определяться полем перемещений, как это следует из (2.10):

$$\begin{aligned} &\omega_i^{\Xi} = \frac{\chi^{12}}{\chi^{22}}\omega_i^0 + l_\omega^2 \frac{(\mu^{11}+\chi^{11})}{\chi^{12}} \Delta\omega_i^0 - l_\omega^2 \frac{1}{2\chi^{12}} \frac{\partial P_n^V}{\partial x_m} Э_{nmi} \\ &\omega_i^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} Э_{nmi} \end{aligned} \qquad (2.26)$$

Приближенное решение (2.26) в теории сред Коссера можно трактовать как гипотезу о существовании кинематической связи между спинами и вихрями перемещений. Эта гипотеза позволяет сформулировать корректную вариационную формулировку соответствующей краевой задачи.

Модель Аэро-Кувшинского в свою очередь является более «жестким» частным случаем модели Коссера, чем предложенный выше формулой (2.26). Частным случаем (2.26) является гипотеза пропорциональности спинов стесненным поворотам. Именно такая гипотеза приводит к модели Аэро-Кувшинского:

$$\omega_k^{\Xi} = -\frac{\chi^{12}}{\chi^{22}} \frac{\partial R_p}{\partial x_q} Э_{pqk} \qquad (2.27)$$

При такой «жесткой» гипотезе спины агебраически могут быть исключены из лагранжиана сред Коссера. Таким образом, в модели Аэро-Кувшинского основными неизвестными могут быть выбраны только перемещения и относительно них может быть сформулирован Лагранжиан. При этом, обратим на это внимание, плотность дислокаций в модели Аэро-Кувшинского отлична от нуля. Ненулевые спины ω_k^{Ξ} связаны гипотезой (2.27) с перемещениями. Они определяют соответствующий не нулевой псевдотензор-источник дислокаций в теории Аэро-Кувшинского:

$$\Xi_{ij} = \left(\frac{\partial \omega_j^{\Xi}}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_k^{\Xi}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) = \frac{\chi^{12}}{\chi^{22}} \frac{\partial^2 R_p}{\partial x_i \partial x_q} Э_{pqj} \neq 0$$

Получим вариационное уравнение модели Аэро-Кувшинского из вариационного уравнения модели Коссера (2.3) с учетом дополнительно введенной кинематической связи (2.27):

$$\delta L = \iiint [(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i^V)\delta R_i + (\frac{\partial m_{in}^\Xi}{\partial x_m} Э_{nmj} Э_{ijq} + p_{ij} Э_{ijq})\delta \omega_q^\Xi]dV +$$

$$+ \oiint [(P_i^F - \sigma_{ij} n_j)\delta R_i + (M_{in} Э_{ikq} (\delta_{kn} - n_k n_n) + m_{ij} n_m Э_{nmj} Э_{ikq} (\delta_{kn} - n_k n_n))\delta \omega_q^\Xi]dF =$$

$$= \iiint [(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i^V)\delta R_i + \mu_k^V \delta \frac{\partial R_i}{\partial x_j} Э_{ijk}]dV + \oiint [(P_i^F - \sigma_{ij} n_j)\delta R_i + \mu_k^F \delta \frac{\partial R_i}{\partial x_j} Э_{ijk}]dF =$$

$$= \iiint (-\frac{\partial \mu_k^V}{\partial x_j} Э_{ijk} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i^V)\delta R_i \, dV +$$

$$+ \oiint [(P_i^F - \sigma_{ij} n_j + \mu_k^V n_j Э_{ijk})\delta R_i + \mu_k^F \delta \frac{\partial R_i}{\partial x_q} ((\delta_{qj} - n_q n_j) + n_q n_j) Э_{ijk}]dF =$$

$$= \iiint (-\frac{\partial \mu_k^V}{\partial x_j} Э_{ijk} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i^V)\delta R_i \, dV +$$

$$+ \oiint [(P_i^F - \sigma_{ij} n_j + \mu_k^V n_j Э_{ijk} - \frac{\partial \mu_k^F}{\partial x_q} (\delta_{qj} - n_q n_j) Э_{ijk})\delta R_i + (\mu_k^F n_j Э_{ijk})\delta \frac{\partial R_i}{\partial x_q} n_q]dF = 0$$

Здесь для краткости введены обозначения:

$$\mu_k^V = -\frac{\chi^{12}}{\chi^{22}} (\frac{\partial m_{in}^\Xi}{\partial x_m} Э_{nmj} + p_{ij}) Э_{ijk}$$

$$\mu_k^F = -\frac{\chi^{12}}{\chi^{22}} (M_{in} + m_{ij} n_m Э_{nmj}) Э_{ipk} (\delta_{pn} - n_p n_n)$$

Таким образом, как следствие упрощающих гипотез из модели среды с сохраняющимися дислокациями получена как модель сред Коссера, так и модель сред Аэро-Кувшинского. Заметим, что характерной чертой модели сред Аэро-Кувшинского является то, что в каждой неособенной точке поверхности вариационное уравнение дает не шесть (как в модели Коссера), а пять граничных условий.

$$(\mu_k^F n_j Э_{ijk})\delta (\frac{\partial R_i^0}{\partial x_q} n_q) = (\mu_k^F n_j Э_{ijk})\delta (\frac{\partial R_p^0 \delta_{pi}}{\partial x_q} n_q) = (\mu_k^F n_j Э_{ijk})\delta (\frac{\partial R_p^0 (\delta_{pi} - n_p n_i + n_p n_i)}{\partial x_q} n_q) =$$

$$= (\mu_k^F n_j Э_{ijk})\delta (\frac{\partial R_p^0 (\delta_{pi} - n_p n_i)}{\partial x_q} n_q) + (\mu_k^F n_j Э_{ijk})\delta \frac{\partial (R_p^0 n_p) n_i}{\partial x_q} n_q$$

В этом легко убедиться, обратив внимание на тождественно равную нулю свертку $n_i n_j Э_{ijk} \equiv 0$. Таким образом, вариационное уравнение сред Аэро-Кувшинского приобретает следующий окончательный вид:

$$\delta L = \iiint (-\frac{\partial \mu_k^V}{\partial x_j} Э_{ijk} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P_i^V)\delta R_i^0 dV +$$

$$+ \oiint [(P_i^F - \sigma_{ij} n_j + \mu_k^V n_j Э_{ijk} - \frac{\partial \mu_k^F}{\partial x_q} (\delta_{qj} - n_q n_j) Э_{ijk})\delta R_i^0 + \tag{2.28}$$

$$+ (\mu_k^F n_j Э_{ijk})\delta (\frac{\partial R_p^0 (\delta_{pi} - n_p n_i)}{\partial x_q} n_q)]dF = 0$$

Мы специально рассмотрели здесь подробно модель Аэро-Кувшинского как прикладную модель в рамках теории сред Коссера по следующим причинам:

1. Модель Аэро-Кувшинского сформулирована только в перемещениях, что удобно и наглядно.
2. Основные свойства среды описывается уравнениями в перемещениях, однако краевая задача является более простой.
3. «Жесткая» гипотеза Аэро-Кувшинского о пропорциональности спинов и вихрей позволяет перенести эту гипотезу на общий случай сред с сохраняющимися дислокациями и сформулировать обобщенную гипотезу Аэро-Кувшинского в следующем виде:

$$d_{ij}^{\Xi} = a\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + b\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + c\frac{\partial R_j}{\partial x_i} \qquad (2.29)$$

Гипотеза Аэро-Кувшинского в виде (2.29) даст возможность сформулировать прикладную теорию ССД в перемещениях с шестью граничными условиями в каждой неособенной точке поверхности тела. Последние два слагаемых содержат формулу (2.27) как частный случай.

3. ТЕОРИЯ ПОРИСТЫХ СРЕД.

Рассмотрим следующий частный случай общей теории, в котором доминируют только θ -дислокации. Сформулируем упрощающие гипотезы: девиатор свободной дисторсии равен нулю; спины равны нулю.

$$\gamma_{ij}^{\Xi} = 0\,,\ \omega_k^{\Xi} = 0 \qquad (3.1)$$

Свободная дисторсия принимает вид:

$$d_{ij}^{\Xi} = \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij} \qquad (3.2)$$

Следовательно, псевдотензор-источник дислокаций записывается следующим образом:

$$\Xi_{ij} = \frac{\partial d_{in}^{\Xi}}{\partial x_m}Э_{nmj} = (-\frac{1}{3}\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial x_k}Э_{ijk}) \qquad (3.3)$$

Соответственно, Лагранжиан принимает вид:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint\{C_{ijnm}^{11}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - 2C_{ijnm}^{12}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}(\frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij}) + C_{ijnm}^{22}(\frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{nm})(\frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij}) +$$

$$+ C_{ijnm}^{33}(-\frac{1}{3}\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial x_p}Э_{nmp})(-\frac{1}{3}\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial x_q}Э_{ijq})\}dV - \frac{1}{2}\oiint A_{ijnm}(\frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{nm})(\frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij})dF$$

Вычислим свертки тензоров модулей, появившиеся в Лагранжиане после упрощающих гипотез, считая что $\chi^{11} = 0$.

$$(A_{ijnm}\delta_{ij}\delta_{nm}) = 4(\mu^F + \lambda^F),\quad (C_{ijnm}^{12}\delta_{ij}) = (2\mu^{12} + 3\lambda^{12})\delta_{nm},$$

$$(C_{ijnm}^{22}\delta_{ij}\delta_{nm}) = 3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22}),\quad (C_{ijnm}^{33}Э_{ijp}Э_{nmq}) = 4\chi^{33}\delta_{pq}$$

Подставим свертки и получим окончательную формулировку функционала для пористых сред:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \{2\mu^{11}\gamma^0_{ij}\gamma^0_{ij} +$$
$$+\frac{1}{3}(2\mu^{11}+3\lambda^{11})\theta^0\theta^0 - \frac{2}{3}(2\mu^{12}+3\lambda^{12})\theta^0\theta^{\Xi} + \frac{1}{3}(2\mu^{22}+3\lambda^{22})\theta^{\Xi}\theta^{\Xi} +$$
$$+\frac{4}{9}\chi^{33}\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial x_k}\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial x_k}\}dV - \tag{3.4}$$
$$-\frac{1}{2}\oiint \{\frac{4}{9}(\mu^F+\lambda^F)\theta^{\Xi}\theta^{\Xi}\}dF$$

В соответствии с (3.4) уравнения закона Гука теории пористых сред принимают вид:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial(\frac{\partial R_i}{\partial x_j})} = 2\mu^{11}\gamma_{ij} + \frac{1}{3}(2\mu^{11}+3\lambda^{11})\theta^0\delta_{ij} - \frac{1}{3}(2\mu^{12}+3\lambda^{12})\theta^{\Xi}\delta_{ij}$$

$$p_{kk} = \frac{\partial U_V}{\partial\theta^{\Xi}} = -\frac{1}{3}(2\mu^{12}+3\lambda^{12})\theta^0 + \frac{1}{3}(2\mu^{22}+3\lambda^{22})\theta^{\Xi}$$

$$m_k = \frac{\partial U_V}{\partial(\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial x_k})} = \frac{4}{9}\chi^{33}\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial x_k}$$

Отметим, что и здесь, как и в теории Коссера, определяются и дислокационные напряжения и моменты (несмотря на то, что эта среда с симметричным тензором напряжений Коши). Вектор моментов в данном случае совпадает по направлению с градиентом пористости и является важной характеристикой при изучении эволюции трещин в пористой среде.

Запишем основное вариационное равенство теории пористых сред:

$$\delta L = \iiint \{[\mu^{11}\Delta R_i + (\mu^{11}+\lambda^{11})\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{1}{3}(2\mu^{12}+3\lambda^{12})\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial x_i} + P_i^V]\delta R_i +$$
$$+\frac{1}{3}[\frac{4}{3}\chi^{33}\Delta\theta^{\Xi} - (2\mu^{22}+3\lambda^{22})\theta^{\Xi} + (2\mu^{12}+3\lambda^{12})\theta^0]\delta\theta^{\Xi}\}dV + \tag{3.5}$$
$$+\oiint \{P_i^F - [\mu^{11}\dot{R}_i + \mu^{11}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}n_j + \lambda^{11}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}n_i - \frac{1}{3}(2\mu^{12}+3\lambda^{12})\theta^{\Xi}n_i]\}\delta R_i dF -$$
$$-\frac{4}{9}\oiint \{\chi^{33}\dot{\theta}^{\Xi} + (\mu^F+\lambda^F)\theta^{\Xi}\}\delta\theta^{\Xi}dF = 0$$

Вариационное уравнение (3.5) дает полное описание краевой задачи теории пористых сред: имеется четыре разрешающих уравнения относительно четырех искомых функций R_i и θ^{Ξ} и четыре граничных условия в каждой неособенной точке поверхности.

3.1. Идентификация модулей теории.

В отсутствие пор (т.е. $(2\mu^{12}+3\lambda^{12})=0$) вектор перемещений является решением классической теории упругости, а модули μ^{11} и λ^{11} - являются классическими параметрами Ламе идеальной, не поврежденной θ-дислокациями, среды.

$$\mu^{11} = G \tag{3.6}$$

$$2\mu^{11} + \lambda^{11} = E \tag{3.7}$$

При $(2\mu^{12} + 3\lambda^{12}) \neq 0$, краевая задача не распадается, θ-дислокации (поры) не нулевые. Будем искать приближенное решение в виде:

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{1}{3}\theta^R x_i \\ \theta^R &= Const\_1 \\ \theta^\Xi &= Const\_2 \end{aligned} \tag{3.8}$$

при $P_i^V = 0$ и $P_i^F = \Delta P n_i$, где ΔP - приращение постоянной величины внешней нагрузки, нормальной к поверхности тела. Решая по Ритцу, получим:

$$\begin{aligned} &\{-[\frac{1}{3}(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})V + \frac{4}{9}(\mu^F + \lambda^F)F]\theta^\Xi + \frac{1}{3}(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})\theta^R V\}\delta\theta^\Xi + \\ &+ \{3\Delta P - (2\mu^{11} + 3\lambda^{11})\theta^R + (2\mu^{12} + 3\lambda^{12})\theta^\Xi]\}V\delta\theta^R = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь учтено, что

$$V = \frac{1}{3}\iiint \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\delta_{ij} dV = \frac{1}{3}\oiint x_i n_j \delta_{ij} dF = \frac{1}{3}\oiint x_i n_i dF$$

$$\oiint x_i n_i dF = 3V$$

Решением (3.9) являются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \theta^R &= \frac{3\Delta P}{(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})} \frac{[(2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) + \dfrac{4(\mu^F + \lambda^F)F}{3V}]}{[(2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) + \dfrac{4(\mu^F + \lambda^F)F}{3V} - \dfrac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})}]} \\ \theta^\Xi &= \frac{3\Delta P}{(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})} \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})}{[(2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) + \dfrac{4(\mu^F + \lambda^F)F}{3V} - \dfrac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})}]} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Дадим определение полного изменения объема:

$$\Delta V = \iiint (d_{ij}^0 + d_{ij}^\Xi)\delta_{ij} dV = \iiint \frac{\partial R_i}{\partial x_i} dV + \iiint \theta^\Xi dV \tag{3.11}$$

Здесь $\dfrac{\partial R_i}{\partial x_i}$ можно трактовать как локальное изменение объёма за счет растяжения ($\iiint \dfrac{\partial R_i}{\partial x_i} dV = \oiint R_i n_i dF$) неповрежденного материала, а θ^Ξ как локальное изменение объёма за счет обратимого «раскрытия» пор.

С учетом решения (3.10), (3.11) приобретает вид:

$$\frac{3\Delta P}{(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})} \frac{\{1 + \dfrac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})}{[(2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) + \dfrac{4(\mu^F + \lambda^F)F}{3V}]}\}}{\{1 - \dfrac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})[(2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) + \dfrac{4(\mu^F + \lambda^F)F}{3V}]}\}} = \frac{\Delta V}{V} \tag{3.12}$$

С учетом (3.12), решение (3.10) можно переписать в виде:

$$\theta^R = \frac{[(2\mu^{22}+3\lambda^{22})+\dfrac{4(\mu^F+\lambda^F)F}{3V}]}{[(2\mu^{12}+3\lambda^{12})+(2\mu^{22}+3\lambda^{22})+\dfrac{4(\mu^F+\lambda^F)F}{3V}]}\frac{\Delta V}{V} = (1-f_\theta)\frac{\Delta V}{V}$$
$$\theta^\Xi = \frac{(2\mu^{12}+3\lambda^{12})}{[(2\mu^{12}+3\lambda^{12})+(2\mu^{22}+3\lambda^{22})+\dfrac{4(\mu^F+\lambda^F)F}{3V}]}\frac{\Delta V}{V} = f_\theta\frac{\Delta V}{V} \quad (3.13)$$

Решение в виде (3.13) дает основание трактовать поврежденную сохраняющимися θ-дислокациями среду как мелкодисперсный композит, в котором роль матрицы играет идеальная среда с относительной объёмной долей $(1-f_\theta)$, а роль включений - θ-дислокации с относительной объёмной долей f_θ. Таким образом, оно дает возможность трактовать комбинацию неклассических модулей f_θ

$$f_\theta = \frac{(2\mu^{12}+3\lambda^{12})}{[(2\mu^{12}+3\lambda^{12})+(2\mu^{22}+3\lambda^{22})+\dfrac{4(\mu^F+\lambda^F)F}{3V}]} \quad (3.14)$$

как относительную объёмную долю θ-дислокаций.

Соответственно, (3.12) дает возможность трактовать комбинацию неклассических модулей K_θ как эффективный модуль объёмного сжатия такого композита.

$$K_\theta = \frac{1}{3}(2\mu^{11}+3\lambda^{11})\frac{\{(2\mu^{22}+3\lambda^{22})+\dfrac{4(\mu^F+\lambda^F)F}{3V}-\dfrac{(2\mu^{12}+3\lambda^{12})^2}{(2\mu^{11}+3\lambda^{11})}\}}{\{(2\mu^{22}+3\lambda^{22})+\dfrac{4(\mu^F+\lambda^F)F}{3V}+(2\mu^{12}+3\lambda^{12})\}} \quad (3.15)$$

Из (3.15) видно, что поврежденный сохраняющимися θ-дислокациями модуль объёмного сжатия K_θ всегда меньше идеального модуля объёмного сжатия $K = (\frac{2\mu^{11}}{3}+\lambda^{11})$.

Таким образом, установлены четыре связи (3.6), (3.7), (3.14) и (3.15) между формальными параметрами среды и экпериметально измеримыми параметрами G, E, f_θ и K_θ.

Следует обратить внимание на то, что в соответствии с предложенными интерпретациями член $\frac{1}{2}\iiint \frac{1}{3}(2\mu^{11}+3\lambda^{11})\theta^0\theta^0 dV$ в лагранжиане пористых сред приобретает смысл потенциальной энергии изменения объёма неповрежденной части материала среды, член $\frac{1}{2}\iiint \frac{1}{3}(2\mu^{22}+3\lambda^{22})\theta^\Xi\theta^\Xi dV$ - потенциальной энергии образования нового объёма в поврежденной среде за счет обратимого «раскрытия» пор, а член $\iiint \frac{1}{3}(2\mu^{12}+3\lambda^{12})\theta^0\theta^\Xi dV$ - потенциальной энергии взаимодействия пор с неповрежденной частью материала среды. Соответственно, неклассический модуль $(2\mu^{22}+3\lambda^{22})$ приобретает смысл энергии образования единицы объёма за счет обратимого «раскрытия» пор, а неклассический модуль $(2\mu^{12}+3\lambda^{12})$ приобретает смысл энергии образования единицы объёма за счет единичного изменения объёма неповрежденной части материала среды.

Аналогичные рассуждения и интерпретации можно провести и для поверхности тела. По аналогии с (3.6) дадим определение полного изменения поверхности тела:

$$\Delta F = \oiint (d_{ij}^0 + d_{ij}^\Xi)(\delta_{ij} - n_i n_j) dF = \oiint \frac{\partial R_i}{\partial x_j}(\delta_{ij} - n_i n_j) dF + \oiint \frac{2}{3}\theta^\Xi dF \qquad (3.16)$$

Первое слагаемое (3.16) дает определение локального изменения площади за счет растяжения $\frac{\Delta F_{elastic}}{F}$:

$$\frac{\Delta F_{elastic}}{F} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}(\delta_{ij} - n_i n_j) \qquad (3.17)$$

Второе слагаемое (3.16) дает определение изменения площади за счет образования новой поверхности, связанного с обратимым раскрытием пор на поверхности $\frac{\Delta F_{pores}}{F}$:

$$\frac{\Delta F_{pores}}{F} = \frac{2}{3}\theta^\Xi \qquad (3.18)$$

Из (3.10) и (3.16) следует:

$$\oiint \frac{\partial R_i}{\partial x_j}(\delta_{ij} - n_i n_j) dF = \frac{2}{3}\frac{\Delta P}{K_\theta} f_\theta F$$

$$\oiint \frac{2}{3}\theta^\Xi dF = \frac{2}{3}\frac{\Delta P}{K_\theta}(1 - f_\theta) F \qquad (3.19)$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{2}{3}\frac{\Delta P}{K_\theta} = \frac{2}{3}\frac{\Delta V}{V}$$

Из (3.13), (3.19) следует, что и распределение изменения объёма и распределение изменения поверхности относительно растяжения и обратимого образования новой геометрии в пористых средах осуществляется в одной и той же пропорции. Коэффициент пропорциональности $k = \frac{f_\theta}{1 - f_\theta}$ полностью определяется относительной объёмной долей θ-дислокаций.

Рассмотрим нормальную составляющую «классических» статических граничных условий:

$$P_i^F n_i = (2\mu^{11} + \lambda^{11})\dot{R}_i n_i + \lambda^{11}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}(\delta_{ij} - n_i n_j) - \frac{1}{3}(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})\theta^\Xi \qquad (3.20)$$

Дадим определение гидростатического давления:

$$3p = (2\mu^{11} + 3\lambda^{11})\frac{\partial R_k}{\partial x_k} - (2\mu^{12} + 3\lambda^{12})\theta^\Xi \qquad (3.21)$$

Отсюда:

$$\dot{R}_i n_i = \frac{1}{(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})} p - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}(\delta_{ij} - n_i n_j) + \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})}{(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})}\theta^\Xi \qquad (3.22)$$

Граничное условие (3.20) с учетом (3.21) и (3.22) дает:

$$P_i^F n_i = \frac{3(2\mu^{11} + \lambda^{11})}{(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})} p - 2\mu^{11}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}(\delta_{ij} - n_i n_j) + 2\mu^{11}\frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})}{(2\mu^{11} + 3\lambda^{11})}\frac{2}{3}\theta^\Xi$$

Запишем последнее равенство относительно давления и учтем определения (3.17) и (3.18):

$$p=\frac{(2\mu^{11}+3\lambda^{11})}{3(2\mu^{11}+\lambda^{11})}\Delta P+2\mu^{11}\frac{(2\mu^{11}+3\lambda^{11})}{3(2\mu^{11}+\lambda^{11})}\frac{\Delta F_{elastic}}{F}-2\mu^{11}\frac{(2\mu^{12}+3\lambda^{12})}{3(2\mu^{11}+\lambda^{11})}\frac{\Delta F_{pores}}{F} \quad (3.23)$$

Таким образом, помимо классического поверхностного натяжения, ТПС описывает и процесс обратимого образования новой поверхности за счет раскрытия пор на поверхности. Изменение общей площади за счет образования новой поверхности определено через выражение (3.18). Отсюда можно сделать вывод, что плотность поверхностной потенциальной энергии в ТПС определяется полностью энергией образования новой поверхности:

$$U_F=\frac{1}{2}(\mu^F+\lambda^F)\frac{\Delta F_{pores}}{F}\frac{\Delta F_{pores}}{F} \quad (3.24)$$

При этом модуль $K^F=(\mu^F+\lambda^F)$ в теории пористых сред следует однозначно трактовать как удвоенную энергию образования единицы поверхности. Действительно, при $\frac{\Delta F_{pores}}{F}=1$ из (3.24) следует:

$$(\mu^F+\lambda^F)=2U_F\Big|_{\frac{\Delta F_{pores}}{F}=1}=K^F \quad (3.25)$$

Таким образом, установлены пять связей (3.6), (3.7), (3.14), (3.15) и (3.25) между формальными параметрами среды и экпериметально измеримыми параметрами G, E, f_θ, K_θ и K^F.

Физический смысл оставшегося шестого формального параметра χ^{33} вряд ли может быть выяснен с помощью полиномиального решения ибо любое полиномиальное решение определяет медленно меняющуюся часть решения. Формальный параметр χ^{33}, напротив, определяет быстроменяющуюся часть решения. Для выяснения его физического смысла следует сформулировать и решить краевую задачу для некоторого быстроменяющегося локального состояния.

3.2. Построение общего решения в теории пористых сред.

Представим систему четырех уравнений равновесия теории пористых сред в виде подсистемы трех уравнений равновесия в перемещениях и одного уравнения относительно пор θ^Ξ. Для этого определим лапласиан от пор θ^Ξ из «классических» уравнений равновесия и исключим его из скалярного уравнения равновесия (аналогично тому как это было сделано при построении общего решения уравнений теории сред Коссера):

$$\theta^\Xi=\frac{(2\mu^{12}+3\lambda^{12})}{(2\mu^{22}+3\lambda^{22})}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}+\frac{4\chi^{33}(2\mu^{11}+\lambda^{11})}{(2\mu^{12}+3\lambda^{12})(2\mu^{22}+3\lambda^{22})}\Delta\frac{\partial R_k}{\partial x_k}+\frac{4\chi^{33}}{(2\mu^{12}+3\lambda^{12})(2\mu^{22}+3\lambda^{22})}\frac{\partial P_k^V}{\partial x_k} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}&\mu^{11}(\Delta R_i-\frac{\partial^2 R_k}{\partial x_i\partial x_k})+[2\mu^{11}+\lambda^{11}-\frac{(2\mu^{12}+3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{22}+3\lambda^{22})}]\frac{\partial^2 R_k}{\partial x_i\partial x_k}-\frac{4\chi^{33}(2\mu^{11}+\lambda^{11})}{3(2\mu^{22}+3\lambda^{22})}\Delta\frac{\partial^2 R_k}{\partial x_i\partial x_k}+\\&+P_i^V-\frac{4\chi^{33}}{3(2\mu^{22}+3\lambda^{22})}\frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i\partial x_k}=0\end{aligned} \quad (3.27)$$

Таким образом, теория пористых сред может быть сформулирована в перемещениях.

Исследуем структуру общего решения сформулированной системы. Для этого определим «классический» оператор равновесия $L_{ij}(...)$. Представим оператор системы (3.27) как произведение операторов. Искомый оператор должен иметь второй порядок и будет определять когезионное поле. Фундаментальное решение, соответствующее «классическому» оператору равновесия является «классическим» вектором перемещений. В свою очередь, фундаментальное решение, соответствующее искомому оператору «когезионного» поля даст определение «когезионным» перемещениям. Соответственно, линейная комбинация фундаментальных решений даст общее решение теории пористых сред. Реализуем эту процедуру.

«Классический» оператор равновесия $L_{ij}(...)$:

$$L_{ij}(...) = \mu^{11}[\Delta(...)\delta_{ij} - \frac{\partial^2(...)}{\partial x_i \partial x_j}] + [2\mu^{11} + \lambda^{11} - \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}]\frac{\partial^2(...)}{\partial x_i \partial x_j} \tag{3.28}$$

Из (3.28) непосредственно следует

$$\Delta\frac{\partial R_j}{\partial x_j} = \frac{1}{[2\mu^{11} + \lambda^{11} - \dfrac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}]}\frac{\partial L_{ij}R_j}{\partial x_i}$$

Исключая $\Delta\frac{\partial R_j}{\partial x_j}$ из (3.27), получим:

$$(L_{ij}R_j + P_i^V) - \frac{4\chi^{33}(2\mu^{11} + \lambda^{11})}{3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})[(2\mu^{11} + \lambda^{11}) - \dfrac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}]}\frac{\partial(L_{kj}R_j + P_k^V)}{\partial x_i \partial x_k} +$$

$$+\frac{4\chi^{33}(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{9(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})^2[(2\mu^{11} + \lambda^{11}) - \dfrac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}]}\frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

Введем определение длины когезионного поля l_θ для пористых сред:

$$l_\theta^2 = \frac{4\chi^{33}(2\mu^{11} + \lambda^{11})}{3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})[(2\mu^{11} + \lambda^{11}) - \dfrac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}]} \tag{3.29}$$

Тогда (3.27) с учетом (3.29) принимает вид произведения операторов:

$$[(...)\delta_{ik} - l_\theta^2\frac{\partial^2(...)}{\partial x_i \partial x_k}](L_{kj}R_j + P_k^V) + l_\theta^2\frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{11} + \lambda^{11})(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}\frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

Найденный оператор «когезионного» поля дает возможность определить «когезионные» перемещения:

$$u_k = -\frac{l_\theta^2}{[2\mu^{11} + \lambda^{11} - \dfrac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}]}(L_{kj}R_j + P_k^V) \tag{3.30}$$

и уравнения равновесия «когезионных» сил:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{l_\theta^2}u_i + \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{11} + \lambda^{11})(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})[2\mu^{11} + \lambda^{11} - \dfrac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}]}\frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \tag{3.31}$$

Взяв ротор (3.31), можно убедиться в том, что в пористых средах когезионные перемещения потенциальны:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (3.32)$$

Следовательно, вводя этот потенциал, можно свести векторное уравнение (3.31) к скалярному:

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$\Delta u - \frac{1}{l_\theta^2} u + \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{11} + \lambda^{11})(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})[2\mu^{11} + \lambda^{11} - \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}]} \frac{\partial P_k^V}{\partial x_k} = 0 \qquad (3.33)$$

Уравнение когезионного поля (3.33) дает возможность определить l_θ в (3.29), (3.30) как длину затухания неклассических краевых эффектов (multiscale-эффектов). В свою очередь, это позволяет отнести l_θ к экспериментально измеримым параметрам.

Таким образом, установлены все шесть связей (3.6), (3.7), (3.14), (3.15), (3.25) и (3.29) между формальными параметрами пористой среды μ^{11}, λ^{11}, $(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})$, $(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})$, $(\mu^F + \lambda^F)$, χ^{33} и экпериметально измеримыми параметрами G, E, f_θ, K_θ, K^F и l_θ.

Уравнение (3.27) можно представить в виде:

$$L_{ij}(R_j + u_j - R_j^*) + P_i^V = 0 \qquad (3.34)$$

где R_j^* является частным решением системы:

$$\mu^{11}(\Delta R_i^* - \frac{\partial^2 R_j^*}{\partial x_i \partial x_j}) + [2\mu^{11} + \lambda^{11} - \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})}] \frac{\partial^2 R_j^*}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{11} + \lambda^{11})(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})} \frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

Уравнение (3.34) имеет вид «классического оператора равновесия над некоторым вектором. Естественно определить этот вектор как вектор классических перемещений U_i:

$$U_i = R_i + u_i - R_i^* \qquad (3.35)$$

С учетом (3.35) получаем:

$$L_{ij} U_j + P_i^V = 0 \qquad (3.36)$$

Переписав (3.35) относительно полного вектора перемещений получаем вид общего решения уравнений теории пористых сред:

$$R_i = U_i - \frac{\partial u}{\partial x_i} + R_i^* \qquad (3.37)$$

Здесь U_i - фундаментальное решение, соответствующее «классическим» уравнениям равновесия (3.36), u - фундаментальное решение, соответствующее когезионному полю (3.33).

Таким образом, вместо четырех искомых функций R_i и θ^{Ξ}, задача сформулирована относительно классических перемещений U_i и потенциала когезионных перемещений u. Здесь следует отметить, что краевая задача соответствующая уравнениям (3.27) в общем случае все равно остается связанной, и амплитуды классического решения будут иными.

4. ТЕОРИЯ СРЕД С ДВОЙНИКОВАНИЕМ.

Рассмотрим третий частный случай общей теории, когда доминируют γ - дислокации. В этом случае $\theta^{\Xi}=0$ и $\omega_k^{\Xi}=0$, а тензор свободной дисторсии приобретает вид:

$$d_{ij}^{\Xi}=\gamma_{ij}^{\Xi} \tag{4.1}$$

Соответственно преобразуется и псевдотензор-источник дислокаций:

$$\Xi_{ij}=\frac{\partial\gamma_{in}^{\Xi}}{\partial x_m}Э_{nmj} \tag{4.2}$$

Лагранжиан для сред с двойникованием получаем как частный случай общей теории с учетом (4.1),(4.2):

$$L=A-\frac{1}{2}\iiint\{C_{ijnm}^{11}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}-4\mu^{12}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\gamma_{ij}^{\Xi}+2\mu^{22}\gamma_{ij}^{\Xi}\gamma_{ij}^{\Xi}+C_{ijnm}^{33}(\Xi_{nm})^{\gamma}(\Xi_{ij})^{\gamma}\}dV-$$
$$-\frac{1}{2}\oiint A_{ijnm}\gamma_{nm}^{\Xi}\gamma_{ij}^{\Xi}dF \tag{4.3}$$

Уравнения закона Гука в средах с двойникованием имеют вид:

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial U_V}{\partial(\frac{\partial R_i}{\partial x_j})}=C_{ijnm}^{11}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}-2\mu^{12}\gamma_{ij}^{\Xi}$$

$$p_{ij}=\frac{\partial U_V}{\partial\gamma_{ij}^{\Xi}}=-2\mu^{12}(\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}-\frac{1}{3}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij})+2\mu^{22}\gamma_{ij}^{\Xi}+$$

$$m_{ijk}=\frac{\partial U_V}{\partial(\frac{\partial\gamma_{ij}^{\Xi}}{\partial x_k})}=2\mu^{33}(\frac{\partial\gamma_{ij}^{\Xi}}{\partial x_k}-\frac{\partial\gamma_{ki}^{\Xi}}{\partial x_j})-(\mu^{33}-\chi^{33})\frac{\partial\gamma_{jb}^{\Xi}}{\partial x_b}\delta_{ik} \tag{4.4}$$

$$M_{ij}=\frac{\partial U_F}{\partial\gamma_{ij}^{\Xi}}=[\lambda^F n_i n_j n_n n_m+\delta^F n_n(\delta_{jm}-n_j n_m)n_i+$$
$$+\mu^F((\delta_{in}-n_i n_n)(\delta_{jm}-n_j n_m)+(\delta_{im}-n_i n_m)(\delta_{jn}-n_j n_n))]\gamma_{nm}^{\Xi}$$

Учитывая (4.3),(4.4), получим вариационное уравнение теории сред с двойникованием:

$$\delta L=\iiint\{[\mu^{11}(\Delta R_i-\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i\partial x_j})+(2\mu^{11}+\lambda^{11})\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i\partial x_j}-2\mu^{12}\frac{\partial\gamma_{ij}^{\Xi}}{\partial x_j}+P_i^V]\delta R_i+$$
$$+[-2\mu^{12}(\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}-\frac{1}{3}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij})+2\mu^{22}\gamma_{ij}^{\Xi}-2\mu^{33}\Delta\gamma_{ij}^{\Xi}+$$
$$+(3\mu^{33}-\chi^{33})(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{ik}^{\Xi}}{\partial x_j\partial x_k}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma_{jk}^{\Xi}}{\partial x_i\partial x_k}-\frac{1}{3}\frac{\partial^2\gamma_{rk}^{\Xi}}{\partial x_r\partial x_k}\delta_{ij})]\delta\gamma_{ij}^{\Xi}\}dV+ \tag{4.5}$$
$$+\oiint\{P_i^F-[\lambda^{11}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij}+\mu^{11}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\mu^{11}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}-2\mu^{12}\gamma_{ij}^{\Xi}]n_j\}\delta R_i dF-$$
$$-\oiint\{[2\mu^{33}\frac{\partial\gamma_{ij}^{\Xi}}{\partial x_k}-2\mu^{33}(\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{ik}^{\Xi}}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{jk}^{\Xi}}{\partial x_i}-\frac{1}{3}\frac{\partial\gamma_{rk}^{\Xi}}{\partial x_r}\delta_{ij})+$$
$$-(\mu^{33}-\chi^{33})(\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{jr}^{\Xi}}{\partial x_r}\delta_{ik}+\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{ir}^{\Xi}}{\partial x_r}\delta_{jk}-\frac{1}{3}\frac{\partial\gamma_{kr}^{\Xi}}{\partial x_r}\delta_{ij})]n_k+A_{ijnm}\gamma_{nm}^{\Xi}\}\delta\gamma_{ij}^{\Xi}dF$$

Как видно из полученных уравнений Эйлера (и это отмечалось при постановке задачи), каждая точка исследуемой среды имеет восемь степеней свободы: три компоненты вектора перемещений R_i и пять независимых компонент тензора-девиатора γ_{ij}^{Ξ}. Граничные условия на поверхности тела так же определяются восемью степенями свободы. Уравнения равновесия в целом содержат шесть формальных параметров среды. Граничные условия в целом содержат три формальных параметра поверхности среды. Таким образом, в отличие от общей теории сред с сохраняющимися дислокациями, в исследуемой среде допустимы два (из трех в общей теории) когезионных взаимодействия и три (из четырех в общей теории) адгезионных взаимодействия.

4.1. Построение фундаментальных решений и их физический смысл.

Для выделения подсистемы уравнений на вектор перемещений берем дивергенцию тензорного уравнения равновесия моментов и исключаем из него $\frac{\partial \gamma_{ik}^{\Xi}}{\partial x_k}$, определенную из векторного уравнения равновесия сил.

$$\begin{cases} 2\mu^{12}\frac{\partial \gamma_{ik}^{\Xi}}{\partial x_k} = \mu^{11}(\Delta R_i - \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j}) + (2\mu^{11}+\lambda^{11})\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} + P_i^V \\ \\ (\frac{4(\mu^{11}\mu^{22}-\mu^{12}\mu^{12})}{3\mu^{22}} + \frac{(2\mu^{11}+3\lambda^{11})}{3})\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{(\mu^{11}\mu^{22}-\mu^{12}\mu^{12})}{\mu^{22}}(\Delta R_i - \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j}) + P_i^V - \\ -\frac{\chi^{33}}{3\mu^{22}}[(2\mu^{11}+\lambda^{11})\Delta\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k}] - \frac{(\mu^{33}+\chi^{33})}{4\mu^{22}}[\mu^{11}\Delta(\Delta R_i - \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j}) + (\Delta P_i^V - \frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k})] = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

Таким образом, получены разрешающие уравнения для перемещений.

Покажем, что вектор перемещений R_i можно представить через два фундаментальных вектора. Первый вектор U_i – вектор “классических” перемещений, удовлетворяющий “классическим” уравнениям равновесия. Второй вектор u_i – вектор когезионных перемещений.

Определение “классических” U_i и когезионных u_i перемещений осуществляется по той же схеме как и в теории сред Коссера и в теории пористых сред, изложенных выше:

$$U_j = R_j - \frac{\chi^{33}}{3\mu^{22}}\frac{E}{E_D}\frac{\partial^2 R_k}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{(\mu^{33}+\chi^{33})}{4\mu^{22}}\frac{G}{G_D}(\Delta R_j - \frac{\partial^2 R_k}{\partial x_j \partial x_k})$$

и

$$u_j = -\frac{1}{C}L_{jk}R_k = -\frac{1}{C}[E_D\frac{\partial^2 R_k}{\partial x_j \partial x_k} + G_D(\Delta R_j - \frac{\partial^2 R_k}{\partial x_j \partial x_k})]$$

здесь: C -некоторый нормировочный множитель размерности [Pa/m^2], а

$$L_{ij}(...) = E_D\frac{\partial^2(...)}{\partial x_i \partial x_j} + G_D(\Delta(...)\delta_{ij} - \frac{\partial^2(...)}{\partial x_i \partial x_j}),$$

$$G_D = \frac{(\mu^{11}\mu^{22}-\mu^{12}\mu^{12})}{\mu^{22}} \qquad E_D = (\frac{4(\mu^{11}\mu^{22}-\mu^{12}\mu^{12})}{3\mu^{22}} + \frac{(2\mu^{11}+3\lambda^{11})}{3})$$

Отметим здесь, что определение «классический» берется в кавычки для того, чтобы подчеркнуть отличие этого оператора от оператора Ламе. В этом операторе фигурируют не идеальные модули $\mu^{11} = G$ и $2\mu^{11} + \lambda^{11} = E$, а дефектные модули $G_D < \mu^{11}$ и $E_D < 2\mu^{11} + \lambda^{11}$. После подстановки U_j в разрешающие уравнения, они приобретают вид "классических" уравнений равновесия с модифицированной нагрузкой, зависящей от вторых производных от объемных сил:

$$L_{ij}U_j + P_i^V - \frac{\chi^{33}}{3\mu^{22}}\frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{(\mu^{33} + \chi^{33})}{4\mu^{22}}(\Delta P_i^V - \frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k}) = 0 \tag{4.7}$$

Объемная нагрузка в "классических" уравнениях модифицирована за счет влияния дислокаций, что отражают множители при производных в (4.7).

После подстановки u_j в разрешающие уравнения, они приобретают вид уравнений равновесия "когезионных" взаимодействий «базисной» модели:

$$\begin{gathered}\frac{C\chi^{33}}{3\mu^{22}}\frac{E}{E_D}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{C(\mu^{33} + \chi^{33})}{4\mu^{22}}\frac{G}{G_D}(\Delta u_i - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}) - Cu_i + \\ + P_i^V - \frac{\chi^{33}}{3\mu^{22}}\frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{(\mu^{33} + \chi^{33})}{4\mu^{22}}(\Delta P_i^V - \frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k}) = 0\end{gathered} \tag{4.8}$$

Отметим здесь, что ранее, в работах [16-21], уравнения когезионного поля записывались фактически с учетом упрощающей гипотезы о пропорциональности когезионых модулей μ^{33} и χ^{33}:

$$\frac{\chi^{33}}{3\mu^{22}}\frac{E}{E_D E_D} = \frac{(\mu^{33} + \chi^{33})}{4\mu^{22}}\frac{G}{G_D G_D} = \frac{1}{C}$$

$$E_D\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + G_D(\Delta u_i - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}) - Cu_i + P_i^V - \frac{\chi^{33}}{3\mu^{22}}\frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{(\mu^{33} + \chi^{33})}{4\mu^{22}}(\Delta P_i^V - \frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k}) = 0$$

Эта гипотеза приводила к тому, что операторы "классических" и "когезионных" взаимодействий во вторых производных совпадали, и общее решение легко строилось как разность "классических" и "когезионных" перемещений.

$$R_i = U_i - u_i \tag{4.9}$$

Таким образом, найдены шесть фундаментальных решений U_i и u_i из восьми.

При известных перемещениях систему уравнений равновесия и моментов можно считать неоднородной относительно двойникования γ_{ij}^{Ξ}, с правыми частями, зависящими от перемещений. Ее решение тогда следует строить как сумму общего решения однородной системы Γ_{ij} и частное решение неоднородной (зависящей от перемещений) системы записанное через потенциал γ_i:

$$\gamma_{ij}^{\Xi} = \Gamma_{ij} + (\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial \gamma_k}{\partial x_k}\delta_{ij}) \tag{4.10}$$

Следовательно, два недостающих фундаментальных решения можно найти как соответствующие решения однородных уравнений равновесия и моментов $\mathit{\Gamma}_{ij}$:

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$\mu^{33}\Delta\Gamma_{ij} - \mu^{22}\Gamma_{ij} = 0$$

Замечание.

Общим свойством однородных решений (фундаментальных решений) для всех рассмотренных частных теорий является то, что дивергенция соответствующей им части свободной дисторсии равна нулю. Следовательно, равен нулю и поток соответствующей части дислокаций. Однако практический интерес имеет та часть дислокаций, которая имеет ненулевую дивергенцию и может дрейфовать, группироваться в окрестности линий возмущения и сливаться в макротрещины.

Можно убедиться подстановкой, что частное решение системы уравнений (4.6) относительно γ_{ij}^{Ξ} записывается в виде

$$\gamma_i = \frac{\mu^{12}}{\mu^{22}} R_i + \frac{(\mu^{33}+\chi^{33})}{4\mu^{22}} \frac{\mu^{12}}{\mu^{22}} (\Delta R_i - \frac{\partial^2 R_k}{\partial x_i \partial x_k}) + \frac{(3\mu^{33}+\chi^{33})}{6\mu^{22}} \frac{\mu^{12}}{\mu^{22}} \frac{\partial^2 R_k}{\partial x_i \partial x_k} +$$
$$+ \frac{(\mu^{33}+\chi^{33})}{4\mu^{22}} \frac{(\mu^{33}+\chi^{33})}{4\mu^{12}\mu^{22}} [\mu^{11}\Delta(\Delta R_i - \frac{\partial^2 R_k}{\partial x_i \partial x_k}) + (\Delta P_i^V - \frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k})] +$$
$$+ \frac{(3\mu^{33}+\chi^{33})}{6\mu^{22}} \frac{(3\mu^{33}+\chi^{33})}{4\mu^{12}\mu^{22}} [(2\mu^{11}+\lambda^{11})\Delta \frac{\partial^2 R_k}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 P_k^V}{\partial x_i \partial x_k}]$$

Из этого решения, если в нем удержать первое слагаемое и подставить в выражение для γ_{ij}^{Ξ} (4.10) получим запись гипотезы Аэро-Кувшинского для сред с двойникованием. Следовательно, можно построить прикладную теорию сред с сохраняющимися дислокациями на основании обобщенной гипотезы Аэро-Кувшинского (2.29) с шестью граничными условиями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе, на основе «кинематического» вариационного принципа [16-21] дана полная и корректная модель сред с сохраняющимися дислокациями. На основе проведенного кинематического анализа предложена новая классификация дислокаций, позволяющая выделить три типа дислокаций: γ - дислокации, θ-дислокации, ω-дислокации. Эта классификация дает новую кинематическую трактовку дислокаций, так как отражает связь дислокаций с формоизменением - γ, с изменением объема θ (пористость) и с скручиванием ω (спины).

Рассмотрены частные теории в которых доминирует один из указанных трех типов дислокаций.

Построена теория сред Коссера, где $\gamma_{ij}^{\Xi} = 0$ и $\theta^{\Xi} = 0$, $\omega_k^{\Xi} \neq 0$, а тензор свободной дисторсии определяется соотношением $d_{ij}^{\Xi} = -\omega_k^{\Xi} Э_{ijk}$. Каждая точка такой среды обладает шестью степенями свободы R_i и ω_i^{Ξ}.

Построена теория пористых сред, где доминируют дислокации, порожденные только свободным изменением объёма θ^{Ξ}. Для пористой среды с четырьмя степенями свободы R_i, θ^{Ξ} имеем $\omega_k^{\Xi} = 0$ и $\gamma_{ij}^{\Xi} = 0$ и $d_{ij}^{\Xi} = \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{ij}$.

Наконец, построена теория сред с двойникованием, где доминирующим типом дислокаций является изменение формы γ_{ij}^{Ξ}. Такая среда имеет восемь степеней свободы R_i, γ_{ij}^{Ξ}.

В качестве примера прикладной теории построена теория сред Аэро-Кувшинского, характерной особенностью которой является формулировка краевой задачи только относительно вектора перемещений. Дислокации определяются после решения дифференцированием. Сформулировано обобщение гипотезы Аэро-Кувшинского о пропорциональности свободной и стесненной дисторсии, которая позволяет построить прикладной вариант теории с сокращенным количеством граничных условий (шесть граничных условий вместо девяти).

Литература

1. Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф., Фирсова Ф.Д. Описание кристаллической упаковки частиц с учетом моментных взаимодействий// Изв. РАН. МТТ. 2003. N4. С 110-127
2. Иванова Е.А., Морозов Н.Ф., Б.Н. Семенов, Фирсова Ф.Д. Об определении упругих модулей наноструктур: теоретические расчеты и методика экпериментов// Изв. РАН. МТТ. 2005. N4С 75-85
3. Gutkin M.Yu., Nanoscopics of dislocations and disclinations in gradient elasticity. Reviews of Advanced in Materials Science, Vol.1, No.1, pp. 27-60, 2000.
4. Aifantis E.C., Gradient effects at the macro, micro and nano scales. J. Mech. Behav. Mater., Vol. 5 No. 3, pp. 335-353, 1994.
5. Aifantis E.C., Strain gradient interpretation of size effects. Int. J. Fracture, 95, pp. 299-314, 1999.
6. Fleck, N.A., and Hutchinson, J.W., A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. J. Mech. Phys. Solids, 41, pp. 1825-1857, 1993.
7. Fleck, N.A., and Hutchinson, J.W., A reformulation of strain gradient plasticity. J. Mech. Phys. Solids, 49, pp. 2245-2271, 2001.
8. Fleck, N.A., and Hutchinson, J.W., Strain gradient plasticity. Advanced in Applied Mechanics, 33. pp 295-361, 1997.
9. Gao, H., Huang, Y., Nix, W.D., and Hutchinson, J.W., Mechanism-based strain gradient plasticity – I. Theory. J. Mech. Phys. Solids, 47, pp. 1239-1263, 1999.
10. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity, Arch. Ration. Mech. And Analysis, 1, 51-78 (1964)
11. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of the couple-stress in linear elasticity, Arch. Ration. Mech. And Analysis, 11, 415-448 (1962)
12. Kroner E., Gauge Field Theories of Defects in Solids. Stuttgart: Max-Plank Inst., 1982.
13. De Wit R., Theory of dislocations: continuous and discrete disclinations in isotropic elasticity, J. of Research of the National Bureau of Standards, 77A, No. 3, pp. 359-368, 1973.
14. Лурье С.А., Белов П.А., Орлов А.П. Модели сплошных сред с обобщенной кинематикой. Свойства и некоторые обобщения. Механика композиционных материалов и конструкций. 1996, Т.2, N 2, с.84-104.

15. Образцов И.Ф., Лурье С.А. Белов П.А. Об обобщенных разложениях в прикладной теории упругости и их приложения к конструкциям из композитов. Механика композиционных материалов и конструкций. 1997, № 3, с. 62-79.
16. Белов П.А., Лурье С.А. Модели деформирования твердых тел и их аналоги в теории поля// Мех. тв. тела Изв. РАН, 1998, № 3 С. 157-166.
17. Образцов И.Ф., Лурье, С.А., Яновский Ю.Г., Белов П.А. О некоторых классах моделей тонких структур// Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион, Естественные науки (к 80-ю академика И.И. Воровича). Ростов-на-Дону, 2000, № 3 с.110-118.
18. Лурье С.А., Белов П.А., Математические модели механики сплошной среды и физических полей. М, Из-во ВЦ РАН, 2000г.(монография), 151с.
19. Лурье, С.А., Белов П.А. и Криволуцкая И.И. Об одной модели когезионных взаимодействий в сплошных средах// Конструкции из композиционных материалов N 2, 2000, М. ВИМИ. Журнал посвящен 80-ю академика И.Ф. Образцова.
20. Lurie S, Belov P, Volkov-Bogorodsky D, Tuchkova N, Nanomechanical Modeling of the Nanostructures and Dispersed Composites, Int. J. Comp Mater Scs 2003; 28(3-4):529-539
21. Lurie S., Belov P., Tuchkova N. The Application of the multiscale models for description of the dispersed composites// Int. Journal "Computational Materials Science" A., 2004, 36(2):145-152.
22. Белов П.А., Лурье С.А. Общая теория дефектов сплошных сред //Механика композиционных материалов и конструкций, 2003. т.9 .N4.С. 210-222
23. Белов П.А., Лурье С.А., Бодунов А.М.,Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г О моделировании масштабных эффектов в тонких структурах//Механика композитных материалов и конструкций, 2002, №4, т.8, стр.585-598,.
24. Лурье С.А., Бодунов А.М., Белов П.А., Криволуцкая И.И. Масштабные эффекты в тонких пленках.// Межотрослевой журнал «Меаника композитных конструкций» ВИМИ, №2, стр.33-40, 2002.
25. Cosserat E., Cosserat F., Theore des corps deformables, Paris, Hermann. 1909.
26. Аэро Э.Л. Кувшинский Е.В., Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц, Физика твердого тела, 2 1399-1409 (1960).