

## ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ УЧЕТА ПОВРЕЖДЕННОСТИ В МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ

Лурье С.\*, Белов А.\*\*\*, Дудченко А.\*\*, Семернин А\*\*., Хадарман Х.\*\*

*\*Институт прикладной механики РАН (Москва)*

*\*\*Московский Авиационный Институт (Технический Университет)*

*\*\*\*ООО «НИК»*

### РЕЗЮМЕ

Развивается алгоритм учета поврежденности в деформируемом теле, основанный на использовании общей модели сред с сохраняющимися дислокациями. Процедура учета поврежденности основана на асимптотическом подходе и, в общем случае, учитывает локальные масштабные эффекты свойственные развитию поврежденности в материале (локализация поврежденности в окрестности концентраторов напряжений, вершин трещин, границ контакта различных фаз). Предлагается вариант метода редуцированных нагрузок, позволяющий в рамках итерационной процедуры оценить влияние дислокационной поврежденности на механические характеристики материала.

### 1. ВВЕДЕНИЕ.

Развивается асимптотическая модель накопления повреждений на основе общей континуальной теории сред с сохраняющимися дефектами-дислокациями [1,2]. Предлагается асимптотическая процедура учета поврежденности, которая предусматривает построение основного асимптотического процесса и локальных процессов. Основной асимптотический процесс позволяет получить оценки для интегральных характеристик – эффективных модулей упругости и учесть накопленную поврежденность в материале за счет концентрации дислокаций различного типа (возможные типы дислокаций, их классификация, дана в [2]) в окрестности обобщенных неоднородностей (вершина трещины, граница контакта фаз и пр.). Реализация алгоритма сводится к процедуре пересчета нагрузок с учетом поврежденности в рамках любого численного алгоритма решения задачи теории упругости. Локальные асимптотические процессы позволяют оценить влияние поврежденности на распределение напряжений, установить параметры поврежденности и характер ее распределения. Они важны для оценки влияния поврежденности на прочность композитных материалов с нановключениями.

В реальных материалах накопление повреждений вызывает деградацию механических свойств. С другой стороны, образование зоны пластичности в окрестности вершин трещин и концентраторов напряжений можно связывать с локальным накоплением дислокационной поврежденности. Известные градиентные теории пластичности [3-5] фактически построены на использовании кинематических соотношений для дислокационной поврежденности. В частности, локальное разрыхление материала также может трактоваться как пластичность. В статье предлагается прикладная модель, которая сводится к методу приведенных нагрузок на каждом шаге асимптотической процедуры. Как частный случай моделируется поврежденность, определяемая частным типом дислокаций-пористостью.

## 2. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА

Анализ кинематической модели в теории сред с сохраняющимися дислокациями и использование "кинематического" вариационного принципа [6,7] приводят к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \iiint [(\sigma_{ij}, j + P_i^V) \delta R_i + (p_{ij} - m_{in}, m \mathcal{E}_{nmj}) \delta d_{ij}^{\Xi}] dV + \\ & + \iint [(P_i^F - \sigma_{ij} n_j) \delta R_i - (A_{ijnm} d_{nm}^{\Xi} - m_{in} n_m \mathcal{E}_{nmj}) \delta d_{ij}^{\Xi}] dF = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где  $V$ ,  $F$  - объем, занимаемый исследуемым телом и поверхность тела;  $R_i$  - вектор перемещений,  $d_{ij}^{\Xi}$  - тензор свободной дилатации;  $A_{ijnm}$  - тензор адгезионных модулей на поверхности тела,  $M_{ij} = \partial U_F / \partial d_{ij}^{\Xi} = A_{ijnm} d_{nm}^{\Xi}$ ;  $M_{ij}$  - тензор моментов на поверхности тела;  $\sigma_{ij}$  - тензор напряжений,  $p_{ij}$  - "дислокационные" напряжения,  $m_{ij}$  - тензор моментных напряжений.

Имеют место обобщенные уравнения закона Гука [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = C_{ijnm}^{11} R_{n,m} + C_{ijnm}^{12} d_{nm}^{\Xi}, \quad p_{ij} = C_{ijnm}^{21} R_{n,m} + C_{ijnm}^{22} d_{nm}^{\Xi}, \quad m_{ij} = C_{ijnm}^{33} \Xi_{nm}, \\ M_{ij} = \partial U_F / \partial d_{ij}^{\Xi} = A_{ijnm} d_{nm}^{\Xi} \end{aligned} \quad (2)$$

где  $C_{ijnm}^{pq}$  ( $p, q = 1, 2, 3$ ) - обобщенные модули упругости

Физические постоянные  $C_{ijnm}^{11}$  определяют классические «неповрежденные» модули упругости для идеальной, неповрежденной среды, модули  $C_{ijnm}^{12}$  и  $C_{ijnm}^{22}$  дают учет поврежденности (полей дислокаций), модуль упругости  $C_{ijnm}^{33}$  имеет размерность отличную от размерности классических модулей упругости  $C_{ijnm}^{11}$  и определяет масштабные эффекты. Модули упругости  $C_{ijnm}^{12}$  характеризуют взаимное возмущение классического поля перемещений и чисто дислокационных состояний. Для изотропного тела упругие модули можно записать через аналоги коэффициентов Ламе  $\lambda^{pq}, \mu^{pq}$  ( $p, q = 1, 2, 3$ ) и модули  $\chi^{pq}$ , определяющие несимметричность тензора напряжений:

$$C_{ijnm}^{pq} = \lambda^{pq} \delta_{ij} \delta_{nm} + (\mu^{pq} + \chi^{pq}) \delta_{in} \delta_{jm} + (\mu^{pq} - \chi^{pq}) \delta_{im} \delta_{jn}, \quad C_{ijnm}^{pq} = C_{ijnm}^{qp} \quad (3)$$

Показано [1], что тензор адгезионных модулей на поверхности тела выражается через четыре физические постоянные и имеет следующий общий вид:

$$\begin{aligned} A_{ijnm} = \lambda^F (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + \delta^F n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) + \\ + (\mu^F + \chi^F) (\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^F - \chi^F) (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n) \end{aligned} \quad (4)$$

«Поврежденные» эффективные модули упругости могут быть явно записаны через физические параметры  $C_{ijnm}^{11}$ ,  $C_{ijnm}^{12}$ ,  $C_{ijnm}^{22}$  [1]. Доказывается, что «поврежденные» модули упругости всегда меньше модулей упругости среды неповрежденной дислокациями. Если принять в (2), что  $C_{ijnm}^{12} = 0$  то общая краевая задача (1) распадается на краевую задачу относительно перемещений  $R_i$  и краевую задачу относительно свободной дилатации  $d_{ij}^{\Xi}$ . Краевая задача относительно перемещений при  $\chi^{11} = 0$  (теория упругости с симметричным тензором напряжений) совпадает с классической теорией упругости. Несвязная краевая задача на поврежденность однородна и ее решение относительно

свободной дисторсии  $d_{ij}^{\Xi}$  тривиально. Поэтому при  $C_{ijnm}^{12} = 0$  решение краевой задачи (1):  $R_i = R_i^0$ ,  $d_{ij}^{\Xi} = 0$ .

### 3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим нормы тензоров модулей  $\|C_{ijnm}^{11}\|$ ,  $\|C_{ijnm}^{12}\|$  и  $\|C_{ijnm}^{22}\|$  и введем параметр  $\gamma$ :  $\|C_{ijnm}^{12}\|/\|C_{ijnm}^{11}\| = \gamma$ . Если отношение норм тензоров  $\|C_{ijnm}^{11}\| \sim \|C_{ijnm}^{22}\|$  порядка единицы, а отношение  $\|C_{ijnm}^{12}\|/\|C_{ijnm}^{11}\|$  мало, то параметр  $\gamma$  может быть использован при построении асимптотического разложения. Параметр  $\gamma$  будем называть малым параметром поврежденности:  $\gamma = \|C_{ijnm}^{12}\|/\|C_{ijnm}^{11}\|$ . Этим параметром определяется основной асимптотический процесс.

Придем к определению малых параметров для вспомогательных асимптотических процессов. Введем малый параметр  $\varepsilon$ , ответственный за масштабные эффекты:  $\varepsilon = (\|C_{ijnm}^{33}\|/\|C_{ijnm}^{11}\|)^{1/2} l^{-1}$ ;

$$C_{ijnm}^{33} / \|C_{ijnm}^{11}\| = (C_{ijnm}^{33} / \|C_{ijnm}^{33}\|) (\|C_{ijnm}^{33}\| / \|C_{ijnm}^{11}\|) = \bar{C}_{ijnm}^{33} (\|C_{ijnm}^{33}\| / \|C_{ijnm}^{11}\|) = \bar{C}_{ijnm}^{33} \varepsilon^2 l^2,$$

здесь  $l$  - геометрический параметр размерности длины, который, например, можно определить с помощью равенства:  $l = V / F$ .

Соответственно, введем следующее определение малого параметра для адгезионных эффектов  $a$ :  $a = (\|A_{ijnm}\|/\|C_{ijnm}^{11}\|) l^{-1}$ ;

$$A_{ijnm} / \|C_{ijnm}^{11}\| = (A_{ijnm} / \|A_{ijnm}\|) (\|A_{ijnm}\| / \|C_{ijnm}^{11}\|) = \bar{A}_{ijnm} (\|A_{ijnm}\| / \|C_{ijnm}^{11}\|) = \bar{A}_{ijnm} a l.$$

При  $C_{ijnm}^{12} \neq 0$  будем искать решение в виде:  $R_i = R_i^N \gamma^N$ ,  $d_{ij}^{\Xi} = d_{ij}^M \gamma^M$  (по индексам  $N$  и  $M$  производится суммирование).

Рассмотрим случай, когда асимптотический процесс определяется малым параметром поврежденности  $\gamma$  - основной асимптотический процесс. Введем нормировку нагрузок  $\bar{P}_i^V, \bar{P}_i^F$  и тензоров модулей  $\bar{C}_{ijnm}^{11}, \bar{C}_{ijnm}^{12}, \bar{C}_{ijnm}^{22}$ :  $P_i^V / \|C_{ijnm}^{11}\| = \bar{P}_i^V$ ,  $P_i^F / \|C_{ijnm}^{11}\| = \bar{P}_i^F$ ,  $C_{ijnm}^{11} / \|C_{ijnm}^{11}\| = \bar{C}_{ijnm}^{11}$ ,  $C_{ijnm}^{22} / \|C_{ijnm}^{11}\| = \bar{C}_{ijnm}^{22}$ ,  $C_{ijnm}^{12} / \|C_{ijnm}^{11}\| = (\bar{C}_{ijnm}^{12} / \bar{C}_{ijnm}^{11}) (\|C_{ijnm}^{12}\| / \|C_{ijnm}^{11}\|) = \bar{C}_{ijnm}^{12} \gamma$

В результате, с учетом введенных определений и обозначений вариационное уравнение (1), определяемое выражениями при вариации перемещений  $\delta R_i$ , приводится к виду:

$$\begin{aligned} & \iiint [\bar{C}_{ijnm}^{11} (R_n, j_m) + \bar{C}_{ijnm}^{12} \gamma (d_{nm}, j) + \bar{P}_i^V] \delta R_i dV + \\ & + \iint [\bar{P}_i^F - \bar{C}_{ijnm}^{11} n_j (R_n, m) - \bar{C}_{ijnm}^{12} \gamma n_j d_{nm}] \delta R_i dF = \end{aligned} \quad (5)$$

$$= \gamma^N \left\{ \iiint [\bar{C}_{ijnm}^{11} (R_n^N, j_m) + P_i^{VN}] \delta R_i dV + \iint [P_i^{FN} - \bar{C}_{ijnm}^{11} n_j (R_n^N, m)] \delta R_i dF \right\} = 0$$

где

$$P_i^{VN} = \begin{cases} \bar{P}_i^V & \text{при } N = 0 \\ \bar{C}_{ijnm}^{12} (d_{nm}^{N-1}), j & \text{при } N > 0 \end{cases} \quad P_i^{FN} = \begin{cases} \bar{P}_i^F & \text{при } N = 0 \\ -\bar{C}_{ijnm}^{12} n_j d_{nm}^{N-1} & \text{при } N > 0 \end{cases} \quad (6)$$

Во вспомогательном итерационном процессе, определяемом вариационной формой при вариациях  $\delta d_{ij}^{\Xi}$  асимптотическое разложение строится с помощью двух дополнительных малых параметров:  $\varepsilon$  - параметра масштабного

«когезионного» эффекта  $\varepsilon$  и параметра адгезионных эффектов  $a$ . Здесь получаем следующее вариационное равенство:

$$\begin{aligned} & \iiint (\bar{C}_{ijnm}^{22} d_{nm}^{\varepsilon} + \bar{C}_{ijnm}^{12} \gamma R_{n,m} - \bar{C}_{inpq}^{33} \varepsilon^2 d_{pr,m,s}^{\varepsilon} \mathcal{E}_{rsq} \mathcal{E}_{nmj}) \delta d_{ij}^{\varepsilon} dV - \\ & - l \iint (\bar{A}_{ijnm} a d_{nm}^{\varepsilon} - \bar{C}_{inpq}^{33} \varepsilon^2 n_m \mathcal{E}_{nmj} d_{pr,s}^{\varepsilon} \mathcal{E}_{rsq}) \delta d_{ij}^{\varepsilon} dF = 0, \quad (\bar{x}_m = x_m / l) \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим случай, когда малые параметры одного порядка, т.е.  $\varepsilon \sim \gamma$  и  $a \sim \gamma$ . Тогда, вспомогательный итерационный процесс можно сформулировать в виде:

$$\begin{aligned} & \iiint (\bar{C}_{ijnm}^{22} \gamma^N d_{nm}^N + \bar{C}_{ijnm}^{12} \gamma^{N+1} R_{n,m} - \bar{C}_{inpq}^{33} \gamma^{M+2} d_{pr,m,s}^N \mathcal{E}_{rsq} \mathcal{E}_{nmj}) \delta d_{ij}^{\varepsilon} dV - \\ & - l \iint (\bar{A}_{ijnm} \gamma^{N+1} d_{nm}^M - \bar{C}_{inpq}^{33} n_m \mathcal{E}_{nmj} \gamma^{N+2} d_{pr,s}^N \mathcal{E}_{rsq}) \delta d_{ij}^{\varepsilon} dF = \\ & = \gamma^N \{ \iiint (\bar{C}_{ijnm}^{22} d_{nm}^N + p_{ij}^N) \delta d_{ij}^{\varepsilon} dV - l \iint (\bar{A}_{ijnm} d_{nm}^{N-1} - M_{ij}^N) \delta d_{ij}^{\varepsilon} dF \} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Равенства (8) позволяют определить значения  $p_{ij}^N$  и  $M_{ij}^N$  для каждого  $N$  по вектору перемещений и тензору дисторсии, вычисленным на предыдущем шаге, с помощью соотношений аналогичных равенствам (6).

Если  $\varepsilon \leq \gamma$  и  $a \leq \gamma$ , то вспомогательный процесс вырождается в алгебраическую связь между компонентами свободной и стесненной дисторсией. Интересен случай, когда краевая задача относительно свободной дисторсии вырождается в алгебраическую. Если этот частный случай имеет место, неоднородные обобщенные уравнения Гельмгольца относительно свободной дисторсии вырождаются в алгебраические уравнения. С помощью этих алгебраических уравнений компоненты свободной дисторсии исключаются из системы уравнений (5)-(6). Имеем, например:

$$P_{pq}^N = \begin{cases} 0 & \text{при } N = 0 \\ \bar{C}_{pqsr}^{12} (R_s^{N-1})_{,r} & \text{при } N > 0 \end{cases} \quad d_{nm}^{N-1} = -\bar{C}_{nmpq}^{-22} \bar{C}_{pqsr}^{12} (R_s^{N-2})_{,r}.$$

Таким образом, решение уравнений теории сред с сохраняющимися дислокациями в этом случае сводится к последовательности решений классической теории упругости с эффективными нагрузками, зависящими от четного номера приближения.

$$P_i^{VN} = \begin{cases} \bar{P}_i^V & \text{при } N = 0 \\ -\bar{C}_{ijnm}^{12} \bar{C}_{nmpq}^{-22} \bar{C}_{pqsr}^{12} \frac{\partial^2 R_s^{N-2}}{\partial x_j \partial x_r} & \text{при } N > 0 \end{cases}, \quad P_i^{FN} = \begin{cases} \bar{P}_i^F & \text{при } N = 0 \\ \bar{C}_{ijnm}^{12} n_j \bar{C}_{nmpq}^{-22} \bar{C}_{pqsr}^{12} \frac{\partial R_s^{N-2}}{\partial x_r} & \text{при } N > 0 \end{cases}$$

В противном случае вспомогательный итерационный процесс приводит к краевой задаче. Это имеет место только тогда, когда по крайней мере один из параметров  $\varepsilon^2$  или  $a$  превышает параметр поврежденности  $\gamma$ . В этом случае задачу следует формулировать относительно максимального малого параметра. В данной работе вспомогательные асимптотические процессы подробно не исследуются.

Приведенные результаты позволяют утверждать, что общая краевая задача распадается на две независимые краевые задачи: - краевую задачу для вектора перемещений, которая будет определять основной асимптотический процесс, и - краевую задачу для тензора свободной дисторсии, которая, с одной стороны, позволяет построить итерационную процедуру расчета для учета поврежденности, а с другой будет являться основой для определения вспомогательных асимптотических процессов.

Остановимся подробнее на основном процессе и построим на его основе итерационную процедуру метода редуцированных нагрузок.

#### 4. МЕТОД РЕДУЦИРОВАННЫХ НАГРУЗОК.

Рассмотрим процесс, в котором единственным малым параметром является параметр  $\gamma$ . Тогда из уравнения (7) свободная дисторсия в объеме находится в виде:

$$d_{pq}^N = \begin{cases} 0 & \text{при } N = 0 \\ -\bar{C}_{pqij}^{-22} \bar{C}_{ijnm}^{12} \frac{\partial R_n^{N-1}}{\partial x_m} + \bar{C}_{pqij}^{-22} \bar{C}_{inpq}^{33} \frac{\partial^2 d_{pr}^{N-2}}{\partial x_m \partial x_s} \mathcal{E}_{rsq} \mathcal{E}_{nmj} & \text{при } N > 0 \end{cases}$$

Если в последнем выражении для свободной дисторсии пренебречь локальными масштабными эффектами, получим

$$d_{pq}^N = \begin{cases} 0 & \text{if } N = 0 \\ -\bar{C}_{pqij}^{-22} \bar{C}_{ijnm}^{12} \frac{\partial R_n^{N-1}}{\partial x_m} & \text{for } N > 0 \end{cases}$$

На поверхности можно записать аналогичные равенства.

Записанные соотношения позволяют построить вариант метода редуцированных нагрузок, который рассматривается как обоснованный способ учета развития поврежденности в материалах (наполненных композитах и анизотропных композитных материалах) при различных условиях нагружения. Конечно, для этого потребуются дать обобщение изложенных ранее результатов на анизотропные среды. На этом пути придется преодолеть некоторые технические трудности, связанные с увеличением количества независимых компонент тензоров модулей  $C_{ijnm}^{pq}$  и  $A_{ijnm}$ .

Сформулируем алгоритм итерационной процедуры расчета.

1. Положим  $N = 0$ . В этом случае  $d_{pq}^0 = 0$ . Перемещение в нулевом приближении  $R_i^0$  определяется по известным нагрузкам как решение классической краевой задачи:

$$\left\{ \iiint (C_{ijnm}^{11} R_{n,jm}^0 + P_i^{V0}) \delta R_i dV + \iint (P_i^{F0} - C_{ijnm}^{11} n_j R_{n,m}^0) \delta R_i dF \right\} = 0$$

2. Положим  $N = 1$ . Определим свободную дисторсию в первом приближении  $d_{pq}^1$

$$d_{pq}^1 = -\bar{C}_{pqij}^{-22} \bar{C}_{ijnm}^{12} R_{n,m}^0, \quad (d_{pq}^0 = 0)$$

Далее по формулам (6) определяются редуцированные нагрузки в основном процессе для определения перемещений первого приближения:

$$P_i^{V1} = \bar{C}_{ijnm}^{12} d_{nm,j}^{1-1} = 0, \quad P_i^{F1} = 0.$$

3. Теперь можно найти перемещения в первом приближении:  $R_i^1 = 0$ .

4. Определяется свободная дисторсия для второго приближения  $d_{pq}^2 = 0$ .

5. Определяются редуцированные нагрузки в основном процессе для второго приближения:

$$P_i^{V2} = \bar{C}_{ijnm}^{12} d_{nm,j}^1, \quad P_i^{F2} = -\bar{C}_{ijnm}^{12} n_j d_{nm}^1$$

6. Находим перемещения для второго приближения как решение следующей краевой задачи классической теории упругости:

$$\left\{ \iiint (C_{ijnm}^{11} R_{n,jk}^2 + P_i^{V2}) \delta R_i dV + \iint (P_i^{F2} - C_{ijnm}^{11} n_j R_{n,m}^2) \delta R_i dF \right\} = 0,$$

$$P_i^{V2} = \bar{C}_{ijnm}^{12} d_{nm,j}^1, \quad P_i^{F2} = -\bar{C}_{ijnm}^{12} n_j d_{nm}^1.$$

Далее для реализации алгоритма повторяются пункты 1-5 для определения  $d_{pq}^3, P_i^{V3}, P_i^{F3}, R_i^3$ . Общее решение задачи с учетом поврежденности находится в форме разложения:  $R_i = \sum_{N=0}^S R_i^N \gamma^N$ .

Построенное решение зависит от двух параметров  $\mu^{12}, \lambda^{12}$  и двух параметров  $\mu^{22}, \lambda^{22}$  (если принять, что  $\chi^{pq} = 0$ ). При этом должны быть соблюдены условия:  $\varepsilon \leq \gamma$  и  $a \leq \gamma$ . В общем случае эти параметры должны быть найдены в результате обработки данных экспериментальных исследований материала, например, кривых характеризующих процесс зависимости деградации механических свойств от параметра процесса (амплитуды нагрузки при квазистатическом нагружении или числа циклов нагружения и т.п.). Если ограничиться основным процессом по параметру  $\gamma$ , то следует априори предположить выполнение неравенств  $\varepsilon \leq \gamma$  и  $a \leq \gamma$ , которые также должны быть проверены экспериментальным путем.

## 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРЫХЛЕНИЯ (ПОРИСТОСТИ), КАК ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ ДИСЛОКАЦИОННОЙ ПОВРЕЖДЕННОСТИ

Рассмотрим пористую среду как частный случай общей теории сред с полем дефектов, в котором доминируют только  $\theta$ -дислокации [1]. Для такой среды уравнения закона Гука в объеме тела принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \partial U_V / \partial (R_{i,j}) = 2\mu^{11} \gamma_{ij} + (2\mu^{11} + 3\lambda^{11}) / 3 \theta^0 \delta_{ij} - (2\mu^{12} + 3\lambda^{12}) / 3 \theta^\Xi \delta_{ij} \\ p_{kk} &= \partial U_V / \partial \theta^\Xi = -(2\mu^{12} + 3\lambda^{12}) / 3 \theta^0 + (2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) / 3 \theta^\Xi \\ m_k &= \partial U_V / \partial (\theta^\Xi,{}_k) = 4/9 \chi^{33} \theta^\Xi,{}_k, \quad M_{ij} = \partial U_F / \partial d_{ij}^\Xi = A_{ijmn} d_{nm}^\Xi \\ &, \quad d_{ij}^\Xi = \theta^\Xi / 3 \delta_{ij}, \quad A_{iiss} = 4(\mu^F + \lambda^F). \end{aligned}$$

Вариационное уравнение (1) приобретает здесь следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta L &= \iiint \{ [P_i^V + \mu^{11} (\Delta R_i - R_{j,ij}) + (2\mu^{11} + \lambda^{11}) R_{k,ik} - (2/3\mu^{12} + \lambda^{12}) \theta^\Xi,{}_i] \delta R_i - \\ &- [(2/3\mu^{12} + \lambda^{12}) R_{k,k} + (2/3\mu^{22} + \lambda^{22}) \theta^\Xi - 4/9 \chi^{33} \Delta \theta^\Xi] \delta \theta^\Xi \} dV + \\ &+ \iint [P_i^F - \lambda^{11} R_{k,k} n_i - \mu^{11} (R_{i,j} n_j + R_{j,i} n_j) + (2/3\mu^{12} + \lambda^{12}) \theta^\Xi n_i] \delta R_i dF \\ &- 4/9 \iint [\chi^{33} n_k \theta^\Xi,{}_k + (\mu^F + \lambda^F) \theta^\Xi] \delta \theta^\Xi dF = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, общая постановка симметричной теории пористых сред содержит шесть независимых формальных параметров среды:  $\mu^{11}, \lambda^{11}, (2\mu^{12} + 3\lambda^{12}), (2\mu^{22} + 3\lambda^{22}), \chi^{33}$  и  $(\mu^F + \lambda^F)$ . Отметим фундаментальную роль перекрестного модуля объемного сжатия  $(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})$ . Если положить его равным нулю в (9), то общая краевая задача распадается на две независимые краевые задачи:

$$\begin{aligned} \iiint [P_i^V + \mu^{11} (\Delta R_i - R_{j,ij}) + (2\mu^{11} + \lambda^{11}) R_{k,ik}] \delta R_i dV + \\ + \iint [P_i^F - \lambda^{11} R_{k,k} n_i - \mu^{11} (R_{i,j} n_j + R_{j,i} n_j)] \delta R_i dF = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} \iiint [(2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) \theta^\Xi - 4/3 \chi^{33} \Delta \theta^\Xi] \delta \theta^\Xi dV + \\ + 4/3 \iint [\chi^{33} n_k \theta^\Xi,{}_k + (\mu^F + \lambda^F) \theta^\Xi] \delta \theta^\Xi dF = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Из однородности краевой задачи (11) на поры  $\theta^{\Xi}$  следует, что  $\theta^{\Xi} \equiv 0$ . Решение (12) для перемещений будет совпадать с решением классической теории упругости. Поэтому модули  $\mu^{11}$  и  $\lambda^{11}$  можно трактовать как коэффициенты Ламе среды, не поврежденной порами.

Пусть теперь  $(2\mu^{12} + 3\lambda^{12}) \neq 0$ . Тогда решение скалярного уравнения на поры (9):  $-(2/3\mu^{12} + \lambda^{12})R_{k,k} + (2/3\mu^{22} + \lambda^{22})\theta^{\Xi} - 4/9\chi^{33}\Delta\theta^{\Xi} = 0$  можно представить в виде суммы частного решения, зависящего от перемещений, и общего решения однородного уравнения Гельмгольца. Очевидно, что решение однородного уравнения Гельмгольца носит локальный характер, и поэтому при построении соответствующего частного решения можно полагать, что в первом приближении:  $\theta^{\Xi} \approx [(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})/(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})]R_{k,k}$ . Тогда краевая задача на перемещения для среды с поврежденностью может быть решена независимо от краевой задачи на поры:

$$\begin{aligned} & \iiint \{ [P_i^V + \mu^{11}(\Delta R_i - R_{j,ij}) + E_{\theta} R_{k,ik}] \delta R_i \} dV + \\ & + \iint [P_i^F - \lambda_{\theta} R_{k,k} n_i - \mu^{11}(R_{i,j} n_j + R_{j,i} n_j)] \delta R_i dF = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

здесь даны определения модуля упругости поврежденной среды:  $E_{\theta} = 2\mu^{11} + \lambda_{\theta} = 2\mu^{11} + \lambda^{11} - 3(2/3\mu^{12} + \lambda^{12})^2 / (2\mu^{22} + 3\lambda^{22})$  и коэффициента Ламе поврежденной среды:  $\lambda_{\theta} = \lambda^{11} - 3(2/3\mu^{12} + \lambda^{12})^2 / (2\mu^{22} + 3\lambda^{22})$ .

Краевая задача на поры при известных перемещениях будет неоднородной:

$$\begin{aligned} & \iiint [(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})\theta^{\Xi} - 4/3\chi^{33}\Delta\theta^{\Xi}] \delta\theta^{\Xi} dV + \\ & + 4/3 \iint \{ (\mu^F + \lambda^F) [(2\mu^{12} + 3\lambda^{12}) / (2\mu^{22} + 3\lambda^{22})] R_{k,k} + \chi^{33} n_k \theta^{\Xi} \} \delta\theta^{\Xi} dF = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Решение краевой задачи (12) для медленно меняющейся части решения уравнений теории пористых сред отличается от классического решения только иной величиной модуля Юнга. Краевая задача (13) позволяет определить пористость. Нетрудно убедиться, что модуль Юнга "поврежденной" среды  $E_{\theta}$  всегда меньше модуля Юнга  $E$  среды без поврежденности:

$$E - E_{\theta} = (2\mu^{11} + \lambda^{11}) - E_{\theta} = \frac{(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})^2}{3(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})} \geq 0.$$

Таким образом, учет поврежденности для медленно изменяющегося деформированного состояния в средах с поврежденностью-разрыхлением (пористость) сводится к решению задачи теории упругости, в которой вместо коэффициента Ламе  $\lambda$  следует брать значение коэффициента Ламе поврежденной среды  $\lambda_{\theta} = \lambda^{11} - 3(2/3\mu^{12} + \lambda^{12})^2 / (2\mu^{22} + 3\lambda^{22})$ . При этом решение зависит от одного параметра поврежденности  $3(2/3\mu^{12} + \lambda^{12})^2 / (2\mu^{22} + 3\lambda^{22})$ , который следует определять по имеющимся экспериментальным данным.

Запишем метод редуцированных нагрузок для учета поврежденности, связанной с пористостью. В этом случае следует принять в (9):

$$\begin{aligned} \gamma &= \left\| (2/3\mu^{12} + \lambda^{12}) \right\| / \left\| (2/3\mu^{11} + \lambda^{11}) \right\|, \quad \varepsilon^2 = 4/9 l^{-2} \left\| \chi^{33} \right\| / \left\| (2/3\mu^{11} + \lambda^{11}) \right\| \\ a &= l^{-1} \left\| (\mu^F + \lambda^F) \right\| / \left\| (2/3\mu^{11} + \lambda^{11}) \right\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mu^{11}} &= \mu^{11} / \|(2/3\mu^{11} + \lambda^{11})\|, \quad \overline{\chi^{33}} = \chi^{33} / \|\chi^{33}\|, \quad \overline{P^{V,F}} = P^{V,F} / \|(2/3\mu^{11} + \lambda^{11})\|, \\ \overline{(2\mu^{11} + \lambda^{11})} &= (2\mu^{11} + \lambda^{11}) / \|(2/3\mu^{11} + \lambda^{11})\|, \quad \|(2/3\mu^{22} + \lambda^{22})\| \sim \|(2/3\mu^{11} + \lambda^{11})\|, \\ \overline{(2/3\mu^{12} + \lambda^{12})} &= (2/3\mu^{12} + \lambda^{12}) / \|(2/3\mu^{11} + \lambda^{11})\|, \\ \overline{(2/3\mu^{22} + \lambda^{22})} &= (2/3\mu^{22} + \lambda^{22}) / \|(2/3\mu^{11} + \lambda^{11})\|, \\ \|(2/3\mu^{22} + \lambda^{22})\| &\sim \|(2/3\mu^{11} + \lambda^{11})\|, \quad \overline{(\mu^F + \lambda^F)} = (\mu^F + \lambda^F) / \|\mu^F + \lambda^F\| \end{aligned}$$

Используя асимптотические разложения для вектора перемещений  $R_i$  и

пористости  $\theta^{\Xi}$ , перепишем вариационное уравнение (9) в следующем виде

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \iiint \gamma^N \{ [\overline{(P^V)^N} + \overline{\mu^{11}} (\Delta R_i^N - (R_{j,ij}^N)) + (2\mu^{11} + \lambda^{11}) (R_{k,ik}^N) - (2/3\mu^{12} + \lambda^{12}) (\overline{\theta^{\Xi}})^{N-1} n_i] \delta R_i - \\ & - \gamma^N [-(2/3\mu^{12} + \lambda^{12}) (R_{k,k}^{N-1})_* + (2/3\mu^{22} + \lambda^{22}) (\overline{\theta^{\Xi}})^N - \chi^{33} \varepsilon^2 l^2 \Delta (\overline{\theta^{\Xi}})^N] \delta \overline{\theta^{\Xi}} \} dV + \\ & + \iint \gamma^N [(\overline{(P^F)^N} - \lambda^{11} (R_{k,k}^N) n_i - \overline{\mu^{11}} ((R_{i,j})^N n_j + (R_{j,i})^N n_j) + (2/3\mu^{12} + \lambda^{12}) (\overline{\theta^{\Xi}})^{N-1} n_i] \delta R_i dF \\ & - 4/9 \iint \gamma^N [\chi^{33} n_k \varepsilon^2 l^2 \overline{\theta^{\Xi}}_{,k} + (\overline{\mu^F + \lambda^F}) a l \overline{\theta^{\Xi}}] \delta \overline{\theta^{\Xi}} dF = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

В результате из (14), получим следующую последовательность классических

задач теории упругости в основном асимптотическом процессе:  $R_i = \sum_{N=0}^S R_i^N \gamma^N$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \iiint \{ [(P_i^V)^N + \mu^{11} (\Delta R_i^N - R_{j,ij}^N) + (2\mu^{11} + \lambda^{11}) R_{k,ik}^N] \delta R_i \} dV + \\ & + \iint [(P_i^F)^N - \lambda^{11} R_{k,k}^N n_i - \mu^{11} (R_{i,j}^N n_j + R_{j,i}^N n_j)] \delta R_i d \end{aligned} \quad (15)$$

здесь  $(P_i^{V,F})^N = (\overline{P_i^V})^N \|(2/3\mu^{11} + \lambda^{11})\|$ ,

$$(\overline{P_i^V})^N = \begin{cases} \overline{P_i^V} & \text{при } N = 0 \\ (\overline{\theta^{\Xi}})^{N-1} n_i & \text{при } N > 0 \end{cases}, \quad (\overline{P_i^F})^N = \begin{cases} \overline{P_i^F} & \text{при } N = 0 \\ (\overline{\theta^{\Xi}})^{N-1} n_i & \text{при } N > 0 \end{cases} \quad (16)$$

где  $\overline{\theta^{\Xi}} = \overline{(2/3\mu^{12} + \lambda^{12})} (\theta^{\Xi})$ .

На каждом шаге поврежденность-пористость  $(\theta^{\Xi})^N$  пересчитывается по формуле

$$(\theta^{\Xi})^N = \begin{cases} 0 & \text{при } N = 0 \\ \left( \overline{(2/3\mu^{22} + \lambda^{22})} \right)^{-1} \overline{(2/3\mu^{12} + \lambda^{12})} (R_{k,k}^{N-1})_* & \text{при } N > 0 \end{cases}$$

При таком построении последнее граничное условие фактически игнорируется, быстро изменяемые локальные состояния не учитываются. Приведенная процедура приближенного учета поврежденности зависит, по существу, только

от одного дополнительного параметра:  $\Omega = \left( \overline{(2/3\mu^{22} + \lambda^{22})} \right)^{-1} \left( \overline{(2/3\mu^{12} + \lambda^{12})} \right)$ .

Этот параметр следует определять в результате сравнения построенного приближенного решения с экспериментальными данными.

Чтобы учесть еще и локальный характер распределения поврежденности, следует в рамках процедуры (15),(16) для определения пористости  $(\theta^{\Xi})^N$  решать на каждом шаге вспомогательную краевую задачу для неоднородного уравнения Гельмгольца с известной из предыдущего шага расчетом правой частью:

$$\overline{(2/3\mu^{22} + \lambda^{22})} (\overline{\theta^{\Xi}})^N - \chi^{33} \varepsilon^2 l^2 \Delta (\overline{\theta^{\Xi}})^N = \overline{(2/3\mu^{12} + \lambda^{12})} (R_{k,k}^{N-1})_*$$



и граничного условия на поверхности тела  $F$  :

$$[\overline{\chi}^{33} n_k \varepsilon^2 l^2 \theta^{\Xi},_k + (\mu^F + \lambda^F) a l \theta^{\Xi}] |_F = 0$$

В этом случае решение строится с точностью до трех параметров модели. Один из них является параметром  $\Omega = \left( \frac{2}{3\mu^{22} + \lambda^{22}} \right)^{-1} \left( \frac{2}{3\mu^{12} + \lambda^{12}} \right)$ , два других учитывают масштабные эффекты: -в объеме (когезия)-параметр  $\Psi$  :  $\Psi = \overline{\chi}^{33} \varepsilon^2 l^2 \left( \frac{2}{3\mu^{22} + \lambda^{22}} \right)^{-1}$ , и на поверхности (адгезия)- параметр  $\Theta$  :  $\Theta = [(\mu^F + \lambda^F) a l] [\overline{\chi}^{33} \varepsilon^2 l^2]^{-1}$ . Параметры  $\Omega$ ,  $\Psi$ ,  $\Theta$  определяются в результате сравнения полученного решения с теми или иными экспериментальными данными.

Наконец приведем еще один алгоритм учета поврежденности в рамках асимптотического процесса. При численной реализации приведенных алгоритмов в рамках известных численных подходов, например, с помощью метода конечных элементов, удобно сводить проблему поврежденности к изменению механических свойств. Численный метод конечных элементов позволяет реализовывать прямой расчет, если на отдельных элементах свойства материала изменяются, и являются в целом кусочно-постоянными в объеме. На первом этапе решается задача теории упругости (15), в результате чего определяется напряженное и деформированное состояние для первого приближения. Затем рассматривается задача для определения полей поврежденности  $\theta^{\Xi}(x_i)$  для уравнения Гельмгольца:

$$(\overline{\theta}^{\Xi})^N - \Psi \Delta (\overline{\theta}^{\Xi})^N = \Omega (R_k^{N-1})_{,k} \quad (17)$$

С граничными условиями

$$[n_k \overline{\theta}^{\Xi},_k + \Theta \overline{\theta}^{\Xi}] |_F = 0 \quad (18)$$

Рассмотрим теперь вариационное уравнение (9) и перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \iiint \gamma^N [(\overline{P}^V)^N + \overline{\mu}^{11} (\Delta R_i^N - (R_j^N)_{,ij}) + (2\overline{\mu}^{11} + \overline{\Lambda}^N) (R_k^N)_{,ik}] \delta R_i + \\ & + \iint \gamma^N [(\overline{P}^F)^N - \overline{\Lambda}^N (R_k)_{,k}^N n_i - \overline{\mu}^{11} ((R_i)_{,j})^N n_j + (R_j)_{,i}^N n_j] \delta R_i dF \quad (19) \\ & - \iiint \gamma^N [\dots] \delta \theta^{\Xi} dV - 4/9 \iint \gamma^N [\dots] \delta \theta^{\Xi} dF = 0 \end{aligned}$$

В равенстве (19) через  $\overline{\Lambda}^N$  введено обозначение редуцированного значения коэффициента Ламе  $\lambda$  для основного процесса (расчета перемещений). Деградация  $\lambda$  происходит за счет накопления повреждения-пористости:

$$\Lambda^N = \lambda^{11} - (2/3\mu^{12} + \lambda^{12}) [(\overline{\theta}^{\Xi})^{N-1},_i / (R_k^N)_{,ik}] \quad (20)$$

Пусть имеется концентратор (или трещина) с заданным контуром (заданной поверхностью в случае пространственной задачи) в окрестности которой возникает поле поврежденности. Будем определять изменение механических характеристик из-за роста поврежденности по нормали к контуру концентратора (трещины). Будем, считать, что изменяемость пористости к направлению, касательной к контуру концентратора существенно меньше чем в направлении нормали. Т.е. будем считать, что зависимость изменения механических характеристик в окрестности концентратора определяется изменением пористости в направлении нормали (координата к контуру концентратора). В таком случае из уравнения (17) получим

$$(\overline{\theta}^{\Xi})^N = C \exp(-\sqrt{\Psi} x_n) + \Omega (R_k^{N-1})_{,k} = C \exp(-\sqrt{\Psi} x_n) + \Omega \theta_0^{N-1} \quad (21)$$

где  $C$  - постоянная, а  $\theta_0^{N-1} = (R_k^{N-1})_{,k}$  -объемная деформация, которая может быть рассчитана для классической задачи на любом шаге приближения.

Подставив решение (21) в граничное условие (18), можно найти постоянную  $C$  в равенстве (21). Можно предположить, что скорость изменения величины  $\theta_0$  в направлении нормали к контуру включения  $\partial\theta_0/\partial x_n = n_k \theta_{0,k}$  невелика ( $\partial\theta_0/\partial x_n \ll \theta_0$ ). Тогда получим:  $C = -[(\theta_0^{N-1})|_F] \Theta \Omega / (\sqrt{\Psi} + \Theta)$ , и

$$(\bar{\theta}^E)^N = \theta_0^{N-1}(x_n) \Omega - [(\theta_0^{N-1})_F] [\Omega \Theta / (\sqrt{\Psi} + \Theta)] \exp(-\sqrt{\Psi} x_n).$$

В результате, приближенное соотношение (21), определяющее изменение свойств (деградацию) в окрестности концентратора, можно переписать в виде:

$$\Lambda^N \cong \lambda^{11} - (2/3\mu^{12} + \lambda^{12}) \{ [(\theta_0^{N-1})_F] [\Omega \Theta \sqrt{\Psi} / (\sqrt{\Psi} + \Theta)] \} \left( \exp(-\sqrt{\Psi} x_n) / \theta_0^N(x_n),_n \right) \quad (22)$$

Главное следствие полученного равенства состоит в том, что указана приближенная зависимость, определяющая изменение механических характеристик по толщине «тонкого слоя». Под «тонким слоем» понимаем окрестность границы концентратора напряжений. Скорость изменения определяется одним параметром  $\sqrt{\Psi}$ . Фактически, через этот параметр определяется и эффективная толщина «тонкого слоя». Кратко опишем алгоритм расчета.

1. Решается задача теории упругости для неповрежденной среды с механическими характеристиками  $\mu^{11}, \lambda^{11}$ . Определяется величина  $(\theta_0^1)_F$ . Она определяет скорость изменения деградации свойств вдоль «тонкого слоя».

2. Для первого приближения вычисляются  $\theta_0^1(x_n), [(\theta_0^1(x_n))_n]$ , определяющие основное, неповрежденное и медленно меняющееся состояние. Считается, что нормальная производная  $\theta_0^1(x_n),_n$  в равенстве (22) мало меняет характер изменения свойств по толщине «тонкого слоя». Поэтому в выражении (22) функцию  $\theta_0^1(x_n),_n$  можно заменить средним значением  $\langle \theta_0^1(x_n),_n \rangle$  по системе конечных элементов описывающих «тонкий слой», в направлении, ортогональном контуру концентратора.

3. Задается изменение механических свойств  $\Lambda(x_n)$  в конечных элементах, покрывающих зону «тонкого слоя» в окрестности границы концентратора:

$$\Lambda^N \cong \lambda^{11} - A [(\theta_0^{N-1})_F] \exp(-\sqrt{\Psi} x_n)$$

здесь  $A$  - обобщенная постоянная модели поврежденности.

4. Для второго приближения вычисляется значение коэффициента Ламе для поврежденной среды и т.д. Для следующих приближений следует использовать тот же алгоритм и соотношения (20),(21). Окончательно, решение строится с точностью до двух параметров, определяемых из экспериментальных данных. Этот же алгоритм используется, если имеется несколько концентраторов (трещин).

В качестве примера, рассмотрим задачу об учете поврежденности-разрыхления (пористость) при расчете коэффициента интенсивности напряжений для стрингерной панели с поперечной короткой трещиной. Панель растягивается усилиями в направлении продольных стрингеров, расстояние между которыми, равно 135 мм. Длина трещины значительно меньше расстояния между

стрингерами. Характеристики материала панели определяются параметрами Ламе  $\mu = 2731 \text{ кг/мм}^2$ ,  $\lambda = 4096 \text{ кг/мм}^2$ .

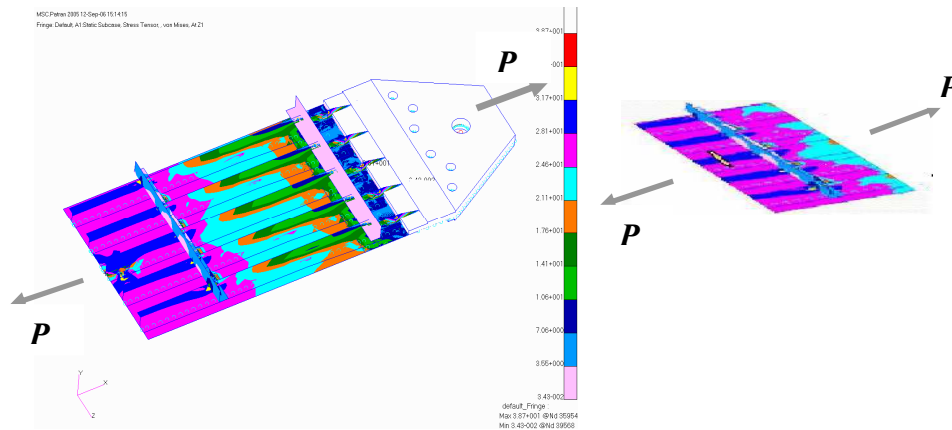


Рис.1. Подкрепленная стрингерная панель с поперечной трещиной

Коэффициент интенсивности рассчитывался численно, с использованием метода конечных элементов. Показано, что использование однопараметрической модели поврежденности и формулы для  $\lambda_\theta = \lambda^{11} - 3(2/3 \mu^{12} + \lambda^{12})^2 / (2\mu^{22} + 3\lambda^{22})$ , дает весьма малые поправки при вычислении коэффициента интенсивности напряжений, что не соответствует действительности. Использование двухпараметрической модели для описания накопления поврежденности, сводящейся к редуцированию параметра Ламе  $\lambda$  (22) в системе трех слоев конечных элементов, окружающих контур трещины позволяет более адекватно моделировать эффект возрастания коэффициента интенсивности (точки на рисунке 2).

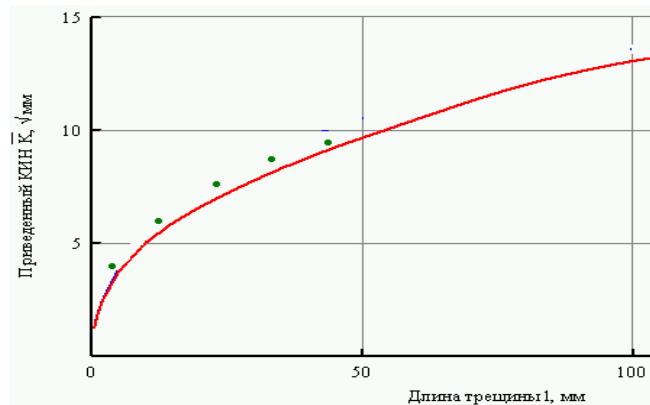


Рис2. Учет поврежденности-разрушения при вычислении коэффициента интенсивности

Параметры поврежденности в (22) выбраны так, что параметр  $\Lambda$  в конечном элементе в окрестности вершины трещины равен  $\approx 105 \text{ кг/мм}^2$ . Сплошная кривая соответствует расчету коэффициента интенсивности без учета локальной поврежденности-разрушения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен алгоритм накопления повреждений, использующий асимптотические разложения при интегрировании краевой задачи для модели сред с сохраняющимися дислокациями. Этот алгоритм позволяет исследовать эволюцию зоны поврежденности в окрестности зон концентрации напряжений. Фактически, предложен аналог модели зоны пластичности, связываемой здесь с локальной поврежденностью- разрыхлением.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белов П.А. Лурье С.А. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с "двойникованием".//Сб. тр. конф. "Современные проблемы механики гетерогенных сред", Инст. Прикл. Мех. РАН 2005, т.1, С. 235-268.
2. Белов П.А., Лурье С.А. Общая теория дефектов сплошных сред.// Механика композитных материалов и конструкций. т.9, №4.
3. Aifantis E.C., Strain gradient interpretation of size effects. Int. J. Fracture, 95, pp. 299-314, 1999.
4. Gutkin M.Yu., Nanoscopies of dislocations and disclinations in gradient elasticity. Reviews of Advanced in Materials Science, Vol.1, No.1, pp. 27-60, 2000.
5. Fleck, N.A., and Hutchinson, J.W., Strain gradient plasticity. Advanced in Applied Mechanics, 33. pp 295-361, 1997.
6. Образцов И.Ф., Белов П.А., Лурье С.А., Дудченко А.А., Волков-Богородский Д.Б., Яновский Ю.Г., Кочемасова Е.И., Потупчик Е.М., Шумова Н.П. Основы механики межфазного слоя //Механика композиционных материалов и конструкций, 2004. т.10 .N 4 ,С. 596-612
7. Lurie S., Belov P., Tuchkova N. The Application of the multiscale models for description of the dispersed composites//Int. Journal Computational Materials Science A., 2005. v.36, N2, pp.145-152.