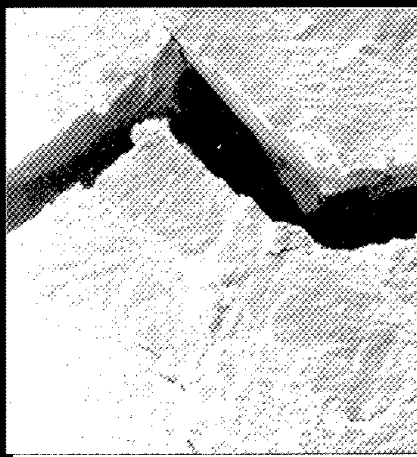


ISSN 1683-805X

ФИЗИЧЕСКАЯ МЕЗОМЕХАНИКА

- Мезомеханика структурно-неоднородных сред
- Мезомеханика разрушения
- Физическая мезомеханика материалов
- Приложения мезомеханики к проблемам геодинамики и геотектоники
- Мезомеханика функциональных материалов и материалов для электроники
- Неразрушающие методы контроля



Том 10 Номер 6

Ноябрь – декабрь 2007

Содержание

Эффект «шахматной доски» и процессы массопереноса в интерфейсных средах живой и неживой природы	5
<i>Панин Л.Е., Панин В.Е. (Россия)</i>	
Нелинейные волновые эффекты солитонов кривизны в поверхностных слоях поликристаллов высокочистого алюминия при интенсивной пластической деформации. I. Эксперимент	21
<i>Панин В.Е., Елсукова Т.Ф., Егорушкин В.Е., Ваулина О.Ю., Почивалов Ю.И. (Россия)</i>	
Образование самоподобных структур на фольгах монокристалла алюминия {100}$\langle 001 \rangle$ при циклическом растяжении	33
<i>Кузнецов П.В., Петракова И.В., Гордиенко Ю.Г.¹, Засимчук Е.Э.¹, Карбовский В.Л.¹ (Россия, ¹ Украина)</i>	
Применение датчиков на основе тонких металлических пленок для контроля целостности конструкций воздушных судов	43
<i>Паже К. (Великобритания)</i>	
К общей геометрической теории дефектных сред	49
<i>Белов П.А., Лурье С.А. (Россия)</i>	
Тепловое расширение полимерных композитов, наполненных углеродными нанотрубками	63
<i>Яновский Ю.Г., Козлов Г.В., Бура А.И.¹, Липатов Ю.С.¹ (Россия, ¹ Украина)</i>	
Моделирование процессов динамического деформирования дискретной среды под воздействием импульсной нагрузки	69
<i>Микуляк С.В. (Украина)</i>	
Влияние формы включений и прочностных свойств интерфейсов на механизмы разрушения металлокерамического композита на мезоуровне	75
<i>Романова В.А., Балохонов Р.Р. (Россия)</i>	
Прогнозирование прочностных свойств композитов на основе изучения механофизических процессов пластической деформации модельных слоистых монокристаллов. Часть I. Натурный эксперимент	89
<i>Боровков А.И., Клявин О.И., Клявин О.В., Никифоров А.В., Пальмов В.А. (Россия)</i>	
Прогнозирование прочностных свойств композитов на основе изучения механофизических процессов пластической деформации модельных слоистых монокристаллов. Часть II. Вычислительный эксперимент	95
<i>Боровков А.И., Клявин О.И., Клявин О.В., Никифоров А.В., Пальмов В.А. (Россия)</i>	
Разработка статистического подхода для описания процессов изнашивания порошковых покрытий и материалов при трении скольжения	101
<i>Винокуров Г.Г., Попов О.Н. (Россия)</i>	
Структурная модификация политетрафторэтилена скрытокристаллическим графитом	109
<i>Машков Ю.К., Кропотин О.В., Суриков Вал.И., Егорова В.А., Зверев М.А. (Россия)</i>	
Список работ, опубликованных в журнале «Физическая мезомеханика» в 2007 году	115

К общей геометрической теории дефектных сред

П.А. Белов, С.А. Лурье

Институт прикладной механики РАН, Москва, 119991, Россия

Развивается общая геометрическая теория дефектов сплошных сред. Даны определение полей дефектов различного уровня сложности и их интерпретация, связанная с известными теоретическими и экспериментальными данными о генерации таких дефектов, как дислокации и дисклинации. Установлены иерархичность строения полей дефектов и общие закономерности генерации и уничтожения дефектов.

Предложена классификация геометрических моделей сред. Изучены геометрические свойства полей дефектов, которые предложено связать с понятиями ранга, типа, сортности дефектов, глубины дефектности.

Показывается, что все известные дефекты естественным образом включаются в предложенную классификацию. Так, поля дислокаций и дисклинаций являются соответственно полями дефектов первого и второго ранга. Установлен широкий класс новых типов дефектов.

To the general geometric theory of defect-containing media

P.A. Belov and S.A. Lurie

Institute of Applied Mechanics RAS, Moscow, 119991, Russia

A general geometric theory of defects in continua is developed. Defect fields of different complexity are defined and interpreted on the basis of known theoretical and experimental data on the generation of such defects as dislocations and disclinations. A hierarchical structure of defect fields and general mechanisms of defect generation and elimination are revealed.

A classification of the geometric models of continua is proposed. The geometric properties of defect fields are studied and related to the notions of the rank, type, sort and depth of defects.

It is shown that all known defects naturally fit in the proposed classification. For example, dislocation and disclination fields are respectively defect fields of the first and second rank. A wide class of new defect types is established.

1. Введение

Значительные достижения в моделировании сплошных сред с микроструктурами, особенно в приложении к наноматериалам, нанокompозитам, обязаны успехам в области экспериментального и теоретического изучения атомных структур, полей дефектов типа дислокаций и дисклинаций. Известно, что во многих случаях дефекты формируются уже на стадии изготовления многих новых материалов. К таким материалам можно отнести нано- и некристаллические материалы; аморфные кристаллические соединения, нанокompозиты, квазикристаллические, наноквазикристаллические и некоторые другие [1]. Унаследованные дефекты затрагивают общие эксплуатационные свойства этих материалов. По

этой причине теория дефектов, являющаяся достаточно универсальным средством исследования в механике, физике и материаловедении, получила большое развитие в современных исследованиях. Многие практически важные феноменологические модели в теории дефектов были значительно пересмотрены в исследованиях последнего времени. Важные результаты были получены в области теории дефектов сплошной среды [2-6], а также при исследовании пластической деформации и моделировании сред с масштабными эффектами различных уровней. Получили развитие градиентные теории упругости [1, 7, 8] и пластичности [9-12]. Показано, что градиентные теории достаточно эффективны при моделировании сред на нано- и микроуровнях. Несом-

ненно, здесь следует отметить и систематические исследования томской школы механиков в области изучения структурных уровней деформации и разрушения структурно-неоднородных сред [13–15].

Исследование геометрии дефектов является основным этапом в развитии феноменологических моделей теории дефектов и составляет наиболее важный элемент в применении вариационных методов при построении градиентных моделей высокого порядка [9–12, 16]. Действительно, знание геометрии дефектов позволяет установить необходимый список непрерывных аргументов для корректной формулировки соответствующего лагранжиана. Геометрический анализ позволяет установить связь между различными дефектами, дает возможность проанализировать условия их генерации и исчезновения [3–6].

Возможность зарождения и исчезновения для каждого из двух известных видов дефектов — дислокаций и дисклинаций — в сплошных средах установлена теоретически и экспериментально [2, 17, 18]. Экспериментально показано, что дислокации могут зарождаться и исчезать на дисклинациях. Можно утверждать, что факт генерации и исчезновения дисклинаций экспериментально установлен. Однако в настоящее время нам не известны экспериментальные исследования, которые установили бы источники дисклинаций с такой же ясностью, с какой они установлены для дислокаций.

Особое значение данного исследования состоит, в частности, в том, чтобы установить связь между геометрическими моделями сплошной среды с полями дефектов и моделями сред с масштабными эффектами различного уровня [19].

Развиваемая теория дефектов позволяет обоснованно выбрать список аргументов для вариационного описания моделей сред с усложненной геометрией, что весьма актуально при моделировании дисперсных композитов, пористых сред, а также при изучении кавитации, турбулентности и пр.

Выбор той или иной геометрической структуры дефектной среды определяет возможность описания тех или иных физических свойств моделируемой среды. Так, мелкодисперсные включения можно интерпретировать как дислокации замещения в матрице. Такие дислокации не зарождаются и не исчезают, поэтому теорию мелкодисперсных композитов можно строить только как модель дефектной среды с сохраняющимися дислокациями. В качестве другого примера можно привести среды, в которых допустимы фазовые переходы. Малая область дочерней фазы может быть рассмотрена как рождающаяся дислокация замещения в материнской фазе. Построение модели такой среды на базе сред с сохраняющимися дислокациями уже нельзя считать корректным. Минимально необходимой моделью здесь является модель дефектной среды с генерируемыми дислокациями и сохраняющимися дисклинациями.

В настоящей работе развивается общая теория дефектных сплошных сред, позволяющая сформулировать условия существования дефектов различного типа, их зарождения и исчезновения.

2. Геометрическая модель сред Коши. Скалярное поле дефектов

Ниже анализируются последовательности моделей дефектных сред различной степени сложности, начиная с простейшей модели, для которой могут быть введены скалярный потенциал и скалярное поле дефектов.

Предварительно дадим некоторые определения.

Пусть V — область в пространстве, занятая исследуемой сплошной средой.

1. В области V задано скалярное поле, если каждой точке M из области V ставится в соответствие по известному закону некоторое число $D(M)$. Таким образом, скалярное поле может быть задано с помощью функции $D(M)$.

По аналогии с понятием скалярного поля вводится понятие векторного поля.

2. В области V задано векторное поле, если каждой точке M из области V ставится в соответствие по известному закону некоторый вектор $D_i(M)$, $i = \overline{1,3}$. Таким образом, векторное поле может быть задано с помощью векторной функции $D_i(M)$, $i = \overline{1,3}$. Нижний индекс обозначает компоненты векторной функции.

3. Аналогично вводятся определения тензорных полей второго ранга $D_{ij}(M)$, $i, j = \overline{1,3}$, третьего ранга $D_{ijk}(M)$, $i, j, k = \overline{1,3}$ и т.д.

4. Классическим непрерывным полем будем называть поле, компоненты которого определены с помощью непрерывных функций.

5. Полем дефектов будем называть поле, компоненты которого определены с помощью разрывных функций.

Обратим внимание на то, что данное выше классическое определение поля любого ранга не связано с непрерывностью функций, определяющих компоненты поля.

Пусть в области V функцией $D^0(M)$ задано скалярное поле, а также векторное поле перемещений R_i (тензор первого ранга). Определим, при каких условиях вектор непрерывных перемещений может быть представлен как градиент дифференцируемого скаляра D^0 :

$$R_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} \quad (1)$$

Здесь x_i — координаты радиуса-вектора.

Умножая обе части этого равенства на dx_i и интегрируя от начальной точки M_0 до текущей точки M , получим:

$$D^0(M) = D^0(M_0) + \int_{M_0}^M R_i dx_i \quad (2)$$

Условием однозначного определения скалярной функции D^0 по вектору перемещения R_i в произвольной точке M исследуемой среды является независимость криволинейного интеграла в (2) от пути интегрирования, которое, очевидно, совпадает с условием отсутствия вихрей ω_k поля перемещений:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk} = -2\omega_k = 0. \quad (3)$$

Здесь \mathcal{E}_{ijk} — псевдотензор Леви-Чивиты.

Будем называть бездефектной средой Коши сплошную среду, в которой отсутствуют вихри (3). Для такой среды в качестве обобщенной координаты геометрического состояния среды может быть взят непрерывный скалярный потенциал $D^0(M)$.

С формальной точки зрения в бездефектной среде Коши вектор перемещений определяется как общее решение однородного уравнения (3). Теперь исследуем дефектную среду Коши с полем дефектов, которое характеризуется наличием вихрей:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk} = -2\omega_k \neq 0. \quad (4)$$

Здесь вектор перемещений уже представляется в виде двух слагаемых: неинтегрируемой части D^1 и интегрируемой — градиента непрерывного и дифференцируемого скаляра D^0 :

$$R_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1. \quad (5)$$

Слагаемое D_i^1 в (5) является частным решением уравнения (4) и поэтому определяет часть перемещений, связанную с дефектностью. Слагаемое $\partial D^0/\partial x_i$ в (5) является общим решением однородного уравнения (4).

Формально проинтегрируем правую часть уравнения (5) и получим следующее определение для потенциала перемещений:

$$D = D^0 + D^1. \quad (6)$$

Величина $D(M)$ определяет дефектное скалярное поле для среды Коши. Оно представляется в виде суммы непрерывного и дифференцируемого скалярного поля $D^0(M)$, исследованного выше, и некоторой разрывной части $D^1(M)$, определяемой по частному решению $D_i^1(M)$ уравнения (5) с помощью следующего криволинейного интеграла:

$$D^1 = D^1(M_0, M) = \int_{M_0}^M D_i^1 dx_i. \quad (7)$$

$D^1(M)$ является полем дефектов (разрывов, скачков) формального потенциала D . Вихри $-2\omega_k$ являются источниками дефектов, так как определяют непрерывное поле D_i^1 из (4) и (5), по которому строится разрывное поле дефектов D^1 в соответствии с (7).

С формальной точки зрения обобщенная производная величины $D^1(M)$, очевидно, определяется следующим равенством:

$$\frac{\partial D^1}{\partial x_i} = D_i^1.$$

Сформулируем результаты геометрического анализа структуры дефектной среды Коши.

1. Для этой среды предполагается существование произвольного векторного поля непрерывных перемещений D_i , которое разделяется на интегрируемую $\partial D^0/\partial x_i$ и неинтегрируемую D_i^1 составляющие. Интегрируемую часть $\partial D^0/\partial x_i$ будем в дальнейшем называть стесненными перемещениями, в то время как неинтегрируемую часть D_i^1 будем в дальнейшем называть свободными перемещениями.

2. Для поля перемещений D_i можно ввести формальный дефектный (разрывный) потенциал D :

$$D = D^0 + D^1.$$

Этот потенциал представим в виде суммы непрерывного и дифференцируемого потенциала D^0 и разрывного поля дефектов потенциальности D^1 .

Потенциал D^0 соответствует интегрируемой части перемещений $\partial D^0/\partial x_i$. Поле дефектов потенциальности D^1 соответствует неинтегрируемой части перемещений D_i^1 .

3. Вихри $\omega_k = -1/2 \partial D_i^1/\partial x_j \mathcal{E}_{ijk}$ как источники дефектов D^1 подчиняются следующему закону сохранения в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial x_k} = 0.$$

В интегральной форме закон сохранения имеет вид:

$$\iint (\omega_k n_k) dF = 0.$$

4. Для дефектной среды Коши основными геометрическими переменными при формулировке лагранжиана модели являются непрерывные и необходимое число раз дифференцируемые поля D^0 и D_i^1 .

Отметим здесь, что скалярное поле дефектов формально будет определяться разрывной скалярной функцией D^1 :

$$D^1 = \int_{M_0}^M D_i^1 dy_i. \quad (8)$$

Результаты геометрического анализа дефектной среды Коши можно свести в табл. 1.

При дальнейшем изложении понятие дефектного поля переносится на тензор первого ранга — вектор перемещений. Разрывы в векторе перемещений определяются как дислокации. Определение дислокаций как поля скачков перемещений является традиционным,

Таблица 1

Ранг/Сорт	Сорт 0	Сорт 1
D	D^0	D^1
D_i	$\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$	D_i^1

можно даже говорить, классическим. Дислокации достаточно подробно изучены, и им посвящен большой объем публикаций. Однако в целях сохранения целостности изложения далее проведем все необходимые построения.

3. Геометрическая модель сред Папковича и Папковича–Коссера. Векторное поле дефектов

Рассмотрим более сложные среды с дефектным векторным полем перемещений. По аналогии с дефектным скалярным полем D , введем дефектное векторное поле перемещений D_i , которое может служить обобщенным (разрывным) векторным потенциалом для тензора второго ранга — тензора дисторсии D_{ij} .

Рассмотрим сначала несимметричный тензор дисторсии d_{ij}^0 , который определяется как градиент некоторого непрерывного векторного поля перемещений R_i :

$$d_{ij}^0 = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}.$$

Записанное несимметричное соотношение Коши можно трактовать как условие существования векторного потенциала для тензора дисторсии. Очевидно, что условие существования такого потенциала записывается в виде:

$$\frac{\partial d_{in}^0}{\partial x_m} \varepsilon_{nmj} = 0. \quad (9)$$

Заметим, что здесь наблюдается полная аналогия со скалярным потенциалом для вектора перемещений R_i в бездефектной среде Коши. С другой стороны, условие (9), известное как однородное уравнение Папковича, является условием существования криволинейного интеграла при определении вектора перемещений по тензору дисторсии. В этом случае имеется бездефектная среда с непрерывным полем перемещений. Среды, в которых имеется непрерывный векторный потенциал тензора дисторсии (вектор перемещений), назовем бездефектными средами Папковича.

В бездефектных средах Папковича вектор перемещений непрерывен, а тензор дисторсии d_{in}^0 является общим решением однородного уравнения (9), что соответствует отсутствию дефектов типа дислокаций. В общем случае бездефектная среда Папковича является средой Коши, в которой имеется непрерывный вектор перемещений. Очевидно, что

$$d_{in}^0 = \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1 \right) = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_n \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_n}.$$

Также как и среда Коши, среда Папковича может содержать и скалярные дефекты, т.к. непрерывный вектор перемещений содержит и интегрируемую в смысле (2) часть D^0 , и непрерывную, но не интегрируемую в смысле (3) часть D_i^1 :

$$R_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1, \quad d_{in}^0 = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_n \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_n}.$$

В частности, когда $D^0 \equiv 0$, модель бездефектной среды Папковича совпадает с моделью классической теории упругости ($R_i \equiv D_i^1$, $d_{in}^0 \equiv \partial D_i^1 / \partial x_n$).

В другом частном случае, когда $D_i^1 = 0$, модель бездефектной среды Папковича является полностью бездефектной ($R_i = \partial D^0 / \partial x_i$). В ней отсутствуют как дислокации (векторные дефекты), так и скалярные дефекты, т.е. поле перемещений имеет скалярный потенциал.

Рассмотрим дефектную среду Папковича–Коссера. Если дисторсия D_{ij} не имеет непрерывного векторного потенциала, условия интегрируемости перемещений не выполняются:

$$\frac{\partial D_{in}}{\partial x_m} \varepsilon_{nmj} = \Xi_{ij} \neq 0. \quad (10)$$

Будем говорить, что в этом случае соотношения Папковича являются неоднородными.

Непрерывным тензором несовместности перемещений является тензор дислокаций Ξ_{ij} [5]. Им определяется неоднородность соотношений Папковича. Если $\Xi_{ij} = 0$, дисторсия интегрируема и вектор перемещений как потенциал дисторсии непрерывен. Если $\Xi_{ij} \neq 0$, дисторсия не интегрируема, вектор перемещений как потенциал дисторсии разрывен.

Решение D_{ij} уравнений существования дислокаций (10) можно представить в виде суммы общего решения $d_{ij}^0 = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$, $d_{in}^0 = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_n \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_n}$, однородных и частного решения $d_{ij}^\Xi = D_{ij}^\Xi$ неоднородных уравнений Папковича (10):

$$D_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + D_{ij}^2 = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2. \quad (11)$$

Среду с тензором дисторсии D_{ij} , $D_{ij}^2 \neq 0$, удовлетворяющим равенству (11), назовем дефектной средой Папковича–Коссера. Подчеркнем, что в бездефектной, однородной среде Папковича тензор дисторсии является интегрируемым — он удовлетворяет условиям интегрируемости (9). При этом непрерывный вектор перемещений может быть определен из несимметричных соотношений Коши путем интегрирования в квадратурах (формулы Чезаро).

Напротив, для дефектной среды Папковича–Коссера тензор дисторсии D_{ij} в общем случае может быть представлен как сумма интегрируемой

$$d_{in}^0 = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_n \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_n}$$

и неинтегрируемой $D_{ij}^2 \neq 0$ частей.

Отметим, что имеет место аналогия между соотношениями (4) и (10), а также между уравнениями (5) и (11).

На этом аналогия заканчивается. Если в средах Коши вектор перемещений D_i является непрерывным, то в средах Папковича в общем случае формальный вектор

перемещений D_i содержит разрывную часть (дислокации) D_i^2 :

$$D_i = R_i + D_i^2.$$

Вектор дислокаций D_i^2 как составляющая полного дефектного вектора перемещений D_i определяется как частное решение неоднородных уравнений существования дислокаций (10), (11):

$$D_i^2(M) = \int_{M_0}^M D_{ij}^2 dx_j. \quad (12)$$

Таким образом, дефектный вектор обобщенных перемещений D_i имеет более разнообразную структуру, чем в средах Коши:

$$D_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1 + D_i^2. \quad (13)$$

Сравним (13) с (5). Наряду с интегрируемой $\partial D^0/\partial x_i$ и неинтегрируемой (но непрерывной) составляющей D_i^1 он имеет и разрывную D_i^2 составляющую (дислокации).

Построим теперь формальный обобщенный потенциал D дефектного вектора перемещений D_i . В качестве слагаемого в нем появляется дополнительный дефект D^2 , связанный с третьим слагаемым D_i^2 в представлении обобщенного вектора перемещений D_i :

$$D = D^0 + D^1 + D^2, \quad (14)$$

$$D^2 = \int_{M_0}^M D_i^2 dx_i. \quad (15)$$

Дадим определение ранга модели среды. Рангом среды назовем максимальный ранг непрерывной кинематической переменной (обобщенная координата кинематического состояния среды), содержащей неинтегрируемую составляющую.

Пример. Для сред Коши тензор дисторсии не имеет неинтегрируемой части и полностью определен через векторный потенциал — вектор перемещений. Вектор перемещений в средах Коши имеет неинтегрируемую составляющую D_i^1 . Поэтому мы можем называть среды Коши средами с рангом кинематических переменных не ниже первого, или просто — средами первого ранга. Соответственно среды Папковича–Коссера можно называть средами второго ранга, так как в этих средах тензор дисторсии уже содержит неинтегрируемую часть D_{ij}^2 .

Обобщим результаты кинематического анализа для дефектных сред Папковича–Коссера и дадим некоторые формальные определения.

1. Для сред Папковича–Коссера установлено, что обобщенными координатами кинематического состояния среды, которые можно использовать как аргументы вариационного уравнения при построении соответствующей физической модели, являются следующие непрерывные тензорные объекты:

- непрерывная составляющая дефектного скалярного поля D — непрерывный потенциал D^0 ;
- непрерывная составляющая дефектного векторного поля D_i — «классический» вектор перемещений $R_i = \partial D^0/\partial x_i + D_i^1$ и непрерывный тензор дисторсии

$$D_{ij} = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2.$$

2. Ранг среды Папковича–Коссера равен двум, т.к. тензор дисторсии D_{ij} содержит неинтегрируемую часть D_{ij}^2 . При этом, наряду с тензором дисторсии, обобщенными координатами могут быть также вектор перемещений (первый ранг) и скалярное поле D^0 (нулевой ранг), т.е. $\text{rang}(D_{ij}) > \text{rang}(R_i) > \text{rang}(D^0)$.

3. Свойства составляющих геометрических переменных позволяют ввести понятия сортности. Скалярные, векторные и тензорные объекты с одним и тем же верхним индексом отнесем к объектам одного сорта. Например, геометрические переменные с верхним индексом 2 соответствуют частным решениям (интегралам) от псевдотензора-источника Ξ_{ij} (дислокаций). Если источник дислокаций в среде Папковича–Коссера отсутствует, то среда Папковича–Коссера вырождается в среду Коши. В свою очередь, среда Коши с псевдотензором-источником ω_k вырождается в идеальную, абсолютно бездефектную среду, если положить $\omega_k = 0$. Это свойство геометрических моделей будем связывать с понятием сортности. Для пояснения этого понятия приведем таблицу геометрических объектов для сред Папковича–Коссера (табл. 2); построенную в соответствии с определениями (11)–(15).

Если источник дислокаций в среде Папковича–Коссера отсутствует, все составляющие в колонке «Сорт 2» равны нулю. Тогда первые две строки в таблице полностью определяют геометрию среды Коши (табл. 1). Для бездефектной среды Коши $\omega_k = 0$. В этом случае в колонке «Сорт 1» следует принять $D_i^1 = 0$ и $D^1 = 0$ в соответствии с введенными ранее определениями. Таким образом, составляющие кинематических переменных разных рангов, находящиеся в одной и той же колонке таблицы, имеют общее свойство — сорт: они равны нулю или отличны от нуля одновременно с равенством/неравенством нулю соответствующего псевдотензора-источника дефектов.

4. Даже на этом этапе исследования дефектных сред классификация дефектов представляется достаточно

Таблица 2

Ранг/Сорт	Сорт 0	Сорт 1	Сорт 2
D	D^0	D^1	D^2
D_i	$\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$	D_i^1	D_i^2
D_{ij}	$\frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i}$	$\frac{\partial D_i^1}{\partial x_j}$	D_{ij}^2

разнообразной и не вписывается в «плоскую» таблицу. Действительно, рассмотрим соотношение (12). Выберем замкнутую траекторию интегрирования, совместив конечную точку траектории интегрирования M с начальной точкой M_0 :

$$D_{ij}^2(M_0, M = M_0) = \oint D_{ij}^2 dx_j = \oint D_{ij}^2 s_j ds. \quad (16)$$

Здесь s_j — единичный вектор касательной к контуру интегрирования. Проекция вектора R_i^2 в точке M_0 на направление касательной к контуру s_j^0 трактуется как дислокация отрыва, а две проекции R_i^2 в ортогональных направлениях — как дислокации скольжения.

Традиционное разложение дислокаций [6] включает два типа дислокаций скольжения: $R_i^2 v_i = v_i \oint D_{ij}^2 s_j ds$, $R_i^2 n_i = n_i \oint D_{ij}^2 s_j ds$ и один — дислокаций отрыва: $R_i^2 s_i = s_i \oint D_{ij}^2 s_j ds$. Такая классификация не отражает энергетической независимости выделенных типов дислокаций.

Дадим иное определение типов дислокаций. Разложим тензор дисторсии:

$$D_{ij} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} + \omega_{ij}. \quad (17)$$

Здесь симметричная часть тензора дисторсии ϵ_{ij} является тензором деформаций:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} D_{ij} + \frac{1}{2} D_{ji}.$$

Тензор-девиатор γ_{ij} (деформации изменения формы), шаровой тензор $\theta \delta_{ij}$ и тензор поворотов имеют соответственно вид:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} D_{ij} + \frac{1}{2} D_{ji} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij},$$

$$\theta = D_{ij} \delta_{ij} = D_{kk} \quad (\theta \text{ — изменение объема}),$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} D_{ij} - \frac{1}{2} D_{ji}.$$

Тензор поворотов ω_{ij} в (17) можно представить через псевдовектор поворотов ω_k :

$$\omega_k = -\frac{1}{2} \omega_{ij} \epsilon_{ijk} = -\frac{1}{2} D_{ij} \epsilon_{ijk}.$$

Проведем симметрирование тензора дисторсии (17). Неинтегрируемая часть тензора дисторсии D_{ij}^2 симметрируется так же. Подставляя разложение D_{ij}^2 в (16), определим три новых типа дислокаций:

$$\oint \gamma_{ij}^2 dx_j \text{ — } \gamma\text{-дислокации,}$$

$$\oint \omega_{ij}^2 dx_j \text{ — } \omega\text{-дислокации,}$$

$$\oint \theta^2 dx_j \text{ — } \theta\text{-дислокации.}$$

В записанных выражениях верхний индекс 2 — не показатель степени, а индекс сортировки.

В работе [20] показано, что физическая модель сред с сохраняющимися дислокациями позволяет записать выражение медленно меняющейся части потенциальной энергии дислокаций в виде канонической квад-

ратичной формы от γ_{ij}^2 , ω_{ij}^2 и θ^2 . В силу каноничности потенциальные энергии выделенных типов дислокаций не имеют перекрестных членов. Поэтому они могут существовать (в отличие от дислокаций скольжения и отрыва) независимо друг от друга.

Еще одним аргументом в пользу выбора новой классификации дислокаций является существование для каждого нового типа дислокаций своего псевдотензора-источника. Действительно, опираясь на решение (11), разложение (17) и используя определение псевдотензора-источника дислокаций (10), получим:

$$\begin{aligned} \Xi_{ij} &= \frac{\partial D_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\gamma_{in}^2 + \frac{1}{3} \theta^2 \delta_{in} + \omega_{in}^2 \right) \mathcal{E}_{nmj} = \\ &= \frac{\partial \gamma_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} + \frac{1}{3} \frac{\partial \theta^2}{\partial x_m} \delta_{in} \mathcal{E}_{nmj} + \frac{\partial \omega_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} = \\ &= \Xi_{ij}^\gamma + \Xi_{ij}^\theta + \Xi_{ij}^\omega. \end{aligned}$$

Таким образом, установлены псевдотензоры-источники для всех типов дислокаций в новой классификации:

$$\Xi_{ij}^\gamma \text{ — источник } \gamma\text{-дислокаций,}$$

$$\Xi_{ij}^\theta \text{ — источник } \theta\text{-дислокаций,}$$

$$\Xi_{ij}^\omega \text{ — источник } \omega\text{-дислокаций.}$$

Источники дислокаций определяются следующими равенствами:

$$\Xi_{ij}^\gamma = \frac{\partial \gamma_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj},$$

$$\Xi_{ij}^\theta = \frac{1}{3} \frac{\partial \theta^2}{\partial x_m} \delta_{in} \mathcal{E}_{nmj},$$

$$\Xi_{ij}^\omega = \frac{\partial \omega_{in}^2}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj}.$$

Нетрудно убедиться в том, что каждый тип псевдотензоров-источников в отдельности удовлетворяет закону сохранения:

$$\frac{\partial \Xi_{ij}^\gamma}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \gamma_{in}^2}{\partial x_j \partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \Xi_{ij}^\theta}{\partial x_j} = \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta^2}{\partial x_j \partial x_m} \delta_{in} \mathcal{E}_{nmj} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial \Xi_{ij}^\omega}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \omega_{in}^2}{\partial x_j \partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} \equiv 0.$$

5. Имеет место дифференциальный закон сохранения для псевдотензора дислокаций:

$$\frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

и закон сохранения в интегральной форме:

$$\iiint \frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_j} dV = \iint \Xi_{ij} n_j dF = 0.$$

Следовательно, в рамках моделей сред Папковича–Коссера нельзя описать генерацию и исчезновение дислокаций. Действительно, пусть замкнутая поверхность F образована двумя поверхностями, натянутыми на плоский контур, причем первая поверхность будет иметь неотрицательную кривизну и вектор нормали n_j , а вторая — неположительную кривизну и вектор нормали $-n_j$. Тогда из интегральной формулировки закона сохранения следует, что

$$\iint \Xi_{ij} n_j dF = \iint \Xi_{ij} n_j dF,$$

т.е. поток тензора Ξ_{ij} через любую поверхность, натянутую на выбранный плоский контур, один и тот же.

Рассмотрим поток тензора Ξ_{ij} через плоскость, в которой лежит выбранный плоский контур:

$$\iint \Xi_{ij} n_j dF = \iint \Xi_{ij} n_j dF = n_j \iint \Xi_{ij} dF.$$

С учетом записанного равенства традиционное определение дислокаций (16) через вектор Бюргерса приводит к следующему:

$$\begin{aligned} D_i^2 &= \oint D_{ij}^2 s_j ds = \\ &= \oint D_{ij}^2 (v_n n_m \Xi_{jmm}) ds = \iint \frac{\partial D_{ij}^2 n_m \Xi_{jmm}}{\partial x_n} dF = \\ &= \iint \left(\frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_n} \Xi_{jmm} \right) n_m dF = n_m \iint \Xi_{im} dF. \end{aligned}$$

Таким образом, мерой сохраняющихся дислокаций может служить неинтегрируемая часть тензора дисторсии D_{ij}^2 (на основе традиционного определения (16) через вектор Бюргерса):

$$D_i^2 = \oint D_{ij}^2 dx_j.$$

Одновременно мерой сохраняющихся дислокаций может быть и псевдотензор-источник Ξ_{ij} .

6. Рассмотрим антисимметричную часть дисторсии

$$D_{ij} = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2.$$

Для этого свернем ее с псевдотензором Леви-Чивиты и получим соответствующий псевдовектор полных поворотов:

$$\begin{aligned} T_k &= D_{ij} \mathcal{E}_{ijk} = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} \mathcal{E}_{ijk} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk} + D_{ij}^2 \mathcal{E}_{ijk} = \\ &= 0 + (-2\omega_k^1) + (-2\omega_k^2) = 0 + T_k^1 + T_k^2. \end{aligned}$$

Здесь предложено новое обозначение для псевдотензора-источника скалярных дефектов T_k . Оно представляется удобным в связи с введенным ранее понятием сортности. Действительно, в рамках сред Папковича–Коссера существуют два сорта скалярных дефектов D^1 и D^2 и соответственно два сорта их псевдотензорных источников T_k^1 и T_k^2 с разными свойствами:

$$T_k^1 = \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk}, \quad T_k^2 = D_{ij}^2 \mathcal{E}_{ijk}.$$

Псевдовектор стесненных поворотов T_k^1 , как уже отмечалось выше, удовлетворяет закону сохранения. В этом нетрудно убедиться из следующей цепочки равенств:

$$\frac{\partial T_k^1}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_k \partial x_j} \mathcal{E}_{ijk} = 0.$$

Поэтому скалярные дефекты D^1 сорта 1, очевидно, сохраняются.

В то же время, псевдовектор свободных поворотов T_k^2 не удовлетворяет закону сохранения, т.к. имеют место равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_k^2}{\partial x_k} &= \frac{\partial D_{ij}^2 \mathcal{E}_{ijk}}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} = \\ &= \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \mathcal{E}_{jki} = \Xi_{ii} = T_{ii}^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Поэтому скалярные дефекты D^2 сорта 2 могут зарождаться и исчезать на сохраняющихся дислокациях.

Следует отметить, что имеет место общая связь между псевдотензорами-источниками второго и первого рангов T_k, T_{ij} :

$$\frac{\partial T_k}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} = T_{ii}.$$

Приведенный геометрический анализ дефектных сред и предложенная на основе этого анализа классификация составляют часть более общей классификации и являются основой для формального обобщения теории дефектных сред, используя метод математической индукции. Действительно, добавим в табл. 2 следующую строку и столбец и проанализируем новые тензорные объекты (табл. 3).

Покажем в дальнейшем, что эти объекты соответствуют модели среды третьего ранга и связаны с известными дефектами — дисклинациями, которые определяются как поле скачков псевдовектора поворотов. Будет проанализирована сортность (четвертый столбец в табл. 3), исследован дефектный тензор дисторсии второго

Таблица 3

Ранг/Сорт	Сорт 0	Сорт 1	Сорт 2	Сорт 3
D	D^0	D^1	D^2	D^3
D_i	$\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$	D_i^1	D_i^2	D_i^3
D_{ij}	$\frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i}$	$\frac{\partial D_i^1}{\partial x_j}$	D_{ij}^2	D_{ij}^3
D_{ijk}	$\frac{\partial^3 D^0}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$	$\frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_k \partial x_j}$	$\frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k}$	D_{ijk}^3

го ранга (обобщение дефектного поля), разрывы в антисимметричной части которого и определяются традиционно как дисклинации.

4. Геометрическая модель сред Сен-Венана. Тензорное поле дефектов

Ранее была установлена формальная аналогия уравнений (4) и (10) на примере рассмотрения и сравнения сред первого (среды Коши) и второго ранга (среды Папковича–Коссера). Попытаемся продолжить эту аналогию.

Рассмотрим тензор дисторсии D_{ij} и тензор кривизн D_{ijn} , который является градиентом тензора дисторсии:

$$D_{ijn} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_n}$$

Следуя общему алгоритму, рассмотрим условия интегрируемости тензора дисторсии в записанном соотношении:

$$\frac{\partial D_{ijn}}{\partial x_m} \varepsilon_{nmk} = 0. \quad (18)$$

Условия (18) являются условиями существования криволинейного интеграла при определении тензора дисторсии D_{ij} через тензор кривизн D_{ijn} . Назовем их обобщенными соотношениями Сен-Венана.

Иначе говоря, условия интегрируемости (18) являются критерием существования тензорного потенциала для тензора кривизн. Этим потенциалом является тензор дисторсии D_{ij} . Имеет место полная аналогия со скалярным потенциалом для вектора R_i (среды Коши) и векторным потенциалом для тензора дисторсии (среды Папковича).

Уравнение (18) является обобщением известных уравнений совместности Сен-Венана. Чтобы доказать это, достаточно выделить в тензорном уравнении (18) антисимметричную по индексам i, j часть. В этом частном случае уравнение (18) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \left(-\frac{1}{2} D_{pqn} \varepsilon_{pqk} \right) \varepsilon_{nmk} = 0.$$

Это уравнение есть условие существования векторного потенциала ω_i для кривизн $-1/2 D_{pqn} \varepsilon_{pqk} = \partial \omega_k / \partial x_n$. С другой стороны, именно уравнения Сен-Венана и являются условиями интегрируемости (условиями существования) вектора поворотов. Таким образом, уравнение (18) как частный случай содержит в себе уравнения Сен-Венана.

Среды, для которых имеется непрерывный тензорный потенциал у тензора кривизн, будем называть бездефектными средами Сен-Венана. В бездефектных средах Сен-Венана тензор дисторсии D_{ij} может быть одно-

значно определен по D_{ijn} , т.к. условия интегрируемости (18) для D_{ijn} выполняются. Иначе говоря, в бездефектных средах Сен-Венана отсутствуют обобщенные дисклинации. Также как и в средах Папковича–Коссера с дефектами, здесь могут присутствовать сохраняющиеся дислокации D_i^2 (дефекты первого ранга) и два вида скалярных дефектов D^1 (сохраняющиеся скалярные дефекты) и D^2 (скалярные дефекты, способные зарождаться и исчезать на сохраняющихся дислокациях D_i^2).

Построим модель дефектной среды Сен-Венана. По аналогии с предыдущим предположим, что в общем случае условия интегрируемости (18) не выполняются, и тогда имеет место неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial D_{ijn}}{\partial x_m} \varepsilon_{nmk} = \Omega_{ijk} \neq 0. \quad (19)$$

Определим интегрируемую и неинтегрируемую части геометрической переменной третьего ранга (кривизны) как соответствующие общее решение однородного уравнения (18) и частное решение неоднородного уравнения (19). Равенство (19) является условием существования дефектов третьего сорта. Псевдотензор-источник Ω_{ijk} дефектов третьего сорта определяет соответствующую неинтегрируемую часть кривизн D_{ijk}^3 в четвертой строке табл. 3:

$$\frac{\partial D_{ijn}^3}{\partial x_m} \varepsilon_{nmk} = \Omega_{ijk}.$$

В то же время, первые три слагаемых в четвертой строке табл. 3 соответствуют общему решению однородного уравнения (18). С учетом (11) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{ijn}}{\partial x_m} \varepsilon_{nmk} - \Omega_{ijk} &= \\ &= \frac{\partial D_{ijn}}{\partial x_m} \varepsilon_{nmk} - \frac{\partial D_{ijn}^3}{\partial x_m} \varepsilon_{nmk} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_m} (D_{ijn} - D_{ijn}^3) \varepsilon_{nmk} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial^3 D^0}{\partial x_n \partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_n \partial x_j} + \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_n} \right) \varepsilon_{nmk} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_m} \varepsilon_{nmk} \left(\frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2 \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким образом, построено общее решение уравнений (19) существования дефектов третьего сорта:

$$D_{ijn} = \frac{\partial^3 D^0}{\partial x_n \partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_n \partial x_j} + \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_n} + D_{ijk}^3. \quad (20)$$

Это решение полностью совпадает со структурой четвертой строки табл. 3. Отметим, что аналогия цепоч-

ки уравнений (5), (11), (18) также имеет место. Действительно, до диагональных слагаемых в строках 2, 3 и 4 стоят интегрируемые части соответственно дефектного тензора первого, второго и третьего ранга. На диагональных местах, где ранг дефектной геометрической переменной равен ее сорту, стоят соответственно неинтегрируемые далее составляющие. Наконец, правее диагональных составляющих должны располагаться разрывные составляющие, которые являются разными сортами дефектов текущего ранга.

Действительно, проинтегрируем формально уравнение (20), получим дефектное тензорное поле второго ранга:

$$D_{ij} = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2 + D_{ij}^3. \quad (21)$$

Здесь ранг третьего слагаемого D_{ij}^3 совпадает с его сортом. Это слагаемое — непрерывное, но неинтегрируемое. Слева от этого слагаемого в (21) находятся интегрируемые части дисторсии, а справа — дефект

$$D_{ij}^3(M) = \int_{M_0}^M D_{ijk}^3 dx_k. \quad (22)$$

В равенстве (22) D_{ij}^3 — дефекты второго ранга третьего сорта, представляющие собой обобщенные дисклинации. Заметим, что известные классические дисклинации являются только антисимметричной частью этого разрывного тензора дисторсии D_{ijk}^3 .

Повторно интегрируя (21), получим выражение для дефектного поля первого ранга:

$$D_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1 + D_i^2 + D_i^3. \quad (23)$$

Здесь ранг второго слагаемого D_i^2 совпадает с его сортом. Это слагаемое является непрерывным, но неинтегрируемым. Слагаемое, стоящее слева от D_i^1 в (23), является интегрируемой частью дефектного поля первого ранга, а справа располагаются дефекты первого ранга:

– дислокации второго сорта (три типа сохраняющихся дислокаций):

$$D_i^2 = \int_{M_0}^M D_{ij}^2 dx_j;$$

– дислокации третьего сорта (три типа дислокаций, способных зародиться и исчезать на сохраняющихся обобщенных дисклинациях):

$$D_i^3 = \int_{M_0}^M D_{ij}^3 dx_j.$$

Последующее интегрирование (23) даст формальное выражение для дефектного поля нулевого ранга:

$$D = D^0 + D^1 + D^2 + D^3. \quad (24)$$

Здесь ранг первого слагаемого D^0 совпадает с его сортом. Это единственное непрерывное слагаемое. Сла-

гаемые, стоящие справа от него, определяют дефекты нулевого ранга соответственно первого, второго и третьего сорта:

$$D^1 = \int_{M_0}^M D_i^1 dx_i, \quad D^2 = \int_{M_0}^M D_i^2 dx_i \quad \text{и} \quad D^3 = \int_{M_0}^M D_i^3 dx_i.$$

Необходимость введения сортности как свойства дефектов сводится к тому, чтобы при определении свойств дефектов одного ранга избежать следующих громоздких определений:

– сохраняющиеся скалярные дефекты

$$D^1 = \int_{M_0}^M D_i^1 dx_i;$$

– скалярные дефекты, способные зародиться и исчезать на сохраняющихся дислокациях,

$$D^2 = \int_{M_0}^M D_i^2 dx_i;$$

– скалярные дефекты, способные зародиться и исчезать на дислокациях, которые, в свою очередь, могут зародиться и исчезать на сохраняющихся обобщенных дисклинациях,

$$D^3 = \int_{M_0}^M D_i^3 dx_i.$$

Проведенный геометрический анализ сред третьего ранга показал, что имеется полное соответствие между содержимым ячеек четвертой строки и четвертого столбца табл. 3 и слагаемыми последовательных квадратур (20), (21), (23), (24) уравнений существования дефектов третьего сорта (19).

Исследуем теперь свойства псевдотензоров-источников. Для этого последовательно образуем свертки каждой геометрической переменной, начиная с ранга равного трем, с псевдотензором Леви-Чивиты.

Псевдотензор-источник дислокаций образуется сверткой псевдотензора Леви-Чивиты с тензором кривизны третьего ранга:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= D_{imn} \mathcal{E}_{nmj} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 D^0}{\partial x_m \partial x_n \partial x_i} + \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_m \partial x_n} + \frac{\partial D_m^2}{\partial x_n} + D_{imn}^3 \right) \mathcal{E}_{nmj} = \\ &= 0 + 0 + \Xi_{ij} + D_{imn}^3 \mathcal{E}_{nmj} = T_{ij}^2 + T_{ij}^3. \end{aligned}$$

Здесь $T_{ij}^2 = \partial D_m^2 / \partial x_m \mathcal{E}_{nmj} = \Xi_{ij}$ — псевдотензор-источник сохраняющихся дислокаций (сорт 2); $T_{ij}^3 = D_{imn}^3 \mathcal{E}_{nmj}$ — псевдотензор-источник дислокаций, способных зародиться и исчезать на сохраняющихся обобщенных дисклинациях (сорт 3).

Действительно,

$$\frac{\partial T_{ij}^2}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 D_m^2}{\partial x_j \partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial T_{ij}^3}{\partial x_j} = \frac{\partial D_{inn}^3}{\partial x_j} \mathcal{E}_{nmj} = \frac{\partial D_{inn}^3}{\partial x_j} \mathcal{E}_{mjn} =$$

$$= \Omega_{inn} = T_{inn}^3 \neq 0.$$

Псевдотензор-источник первого ранга (псевдовектор поворотов) образуется сверткой псевдотензора Леви-Чивиты с тензором дисторсии второго ранга:

$$T_k = D_{ij} \mathcal{E}_{ijk} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2 + D_{ij}^3 \right) \mathcal{E}_{ijk} =$$

$$= 0 + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk} + D_{ij}^2 \mathcal{E}_{ijk} + D_{ij}^3 \mathcal{E}_{ijk} =$$

$$= 0 + T_k^1 + T_k^2 + T_k^3.$$

Записанное выше равенство позволяет дать следующие естественные определения трем сортам псевдотензор-источников первого ранга:

$$\frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} \mathcal{E}_{ijk} = T_k^1, \quad D_{ij}^2 \mathcal{E}_{ijk} = T_k^2, \quad D_{ij}^3 \mathcal{E}_{ijk} = T_k^3.$$

Нетрудно убедиться, что из этих определений вытекают следующие свойства источников дефектов первого ранга:

$$\frac{\partial T_k^1}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_j \partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial T_k^2}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} = T_{ii}^2, \quad (25)$$

$$\frac{\partial T_k^3}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{ij}^3}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} = T_{ii}^3.$$

Напомним, что в конце раздела 4 установлена аналогичная общая связь между полными псевдотензорами-источниками T_k и T_{ii} :

$$\frac{\partial T_k}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} = T_{ii}.$$

Рассмотрим теперь типы дефектов третьего сорта в дефектных средах Сен-Венана. Разложим разрывную часть дисторсии D_{ij}^3 (см. также (17)):

$$D_{ij}^3 = \gamma_{ij}^3 + \frac{1}{3} \theta^3 \delta_{ij} - \omega_k^3 \mathcal{E}_{ijk}.$$

Последнее слагаемое в записанном выражении определяет поле разрывов псевдовектора поворотов. Именно таким образом традиционно и определяются дисклинации.

Однако, как следует из построений, дисклинации определяют только антисимметричную часть D_{ij}^3 . Симметричная часть D_{ij}^3 определяет дефекты иной тензорной природы: девиаторная часть γ_{ij}^3 — поле разрывов деформаций изменения формы и поэтому названа двой-

никованием; шаровая часть θ^3 — поле разрывов деформации изменения объема и названа кавитацией [20].

Симметрируя правую часть уравнения (19) по первым двум индексам, получим определения псевдотензор-источников для дисклинаций, кавитации и двойникования:

$$\Omega_{ijk} = \Gamma_{ijk} + \frac{1}{3} \Theta_k \delta_{ij} - \Omega_{pk} \mathcal{E}_{ijp}. \quad (26)$$

В результате можно записать условия существования полей разрывов отдельно для формоизменения, изменения объема и поворотов. Условие существования скачков в тензорном поле свободного формоизменения γ_{ijn}^3 дает определение псевдотензора-источника двойникования. С учетом равенств (19), (26) получим:

$$\frac{\partial \gamma_{ijn}^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} = \left(\frac{1}{2} \Omega_{ijn} + \frac{1}{2} \Omega_{jin} - \frac{1}{3} \Omega_{ppn} \delta_{ij} \right) =$$

$$= \frac{\partial \left(\frac{1}{2} D_{ijn} + \frac{1}{2} D_{jin} - \frac{1}{3} D_{ppn} \delta_{ij} \right)}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} = \Gamma_{ijn}.$$

Условие существования скачков свободного изменения объема θ_n^3 даст определение псевдотензора-источника кавитации:

$$\frac{\partial \theta_n^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} = \Omega_{ijk} \delta_{ij} = \frac{\partial D_{ijn} \delta_{ij}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} = \Theta_k.$$

Наконец, запишем и условие существования классических дисклинаций — скачков в тензорном поле свободных поворотов ω_{ppn}^3 , которое дает одновременно определение псевдотензора-источника классических дисклинаций:

$$\frac{\partial \omega_{ppn}^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} = \Omega_{ijk} \mathcal{E}_{ijp} = \Omega_{pk}.$$

Когда $\Omega_{pk} = 0$, последние уравнения переходят в классические уравнения Сен-Венана.

Поля кривизны будут интегрируемыми или неинтегрируемыми в зависимости от того, равны нулю или нет соответствующие псевдотензоры-источники дисклинаций Ω_{ij} , кавитации Θ_j и двойникования Γ_{ijk} :

$$\frac{\partial \omega_{ijn}^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} = \Omega_{ij},$$

$$\frac{\partial \theta_n^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} = \Theta_j,$$

$$\frac{\partial \gamma_{ijn}^3}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmk} = \Gamma_{ijk}.$$

Если псевдотензоры-источники Ω_{ij} , Θ_j и Γ_{ijk} дифференцируемы, то каждый из них удовлетворяет соответствующему дифференциальному закону сохранения:

$$\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \Theta_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial x_k} = 0.$$

В заключение, учитывая определение псевдотензоров-источников, можно установить общую связь между псевдотензорами-источниками второго и третьего рангов:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial D_{inn}}{\partial x_j} \mathcal{E}_{nmj} = \Omega_{inn} = T_{inn}. \quad (27)$$

Соотношения (27) отражают свойства источников дефектов и аналогичны уравнениям (25).

Таким образом, доказано, что предложенная классификация, нашедшая отражение в табл. 3, действительно является полной и может быть использована для прогноза свойств дефектных сред с рангом дефектов выше двух. Эта классификация фактически позволяет прогнозировать новые типы дефектов. В частности, для сред третьего ранга теоретически предсказано существование кавитации и двойникования. Также предсказана возможность зарождения и исчезновения дислокаций при отсутствии классических дисклинаций.

5. Геометрическая модель сред ранга N

Развиваемая методика построения теории дефектных сред позволяет осуществить более широкое обобщение и предложить алгоритм построения геометрической модели сред заданного ранга N . Для этого проведем аналогию с построением классической модели сред с сохраняющимися дислокациями. Действительно, при построении этой модели (среды ранга $N = 2$) привлекаются геометрические переменные двух последовательных рангов: псевдотензор-источник дислокаций и тензор дисторсии имеют ранг два (N), а дефектный вектор перемещений и вектор дислокаций — ранг равный единице ($N - 1$).

Будем называть сохраняющийся псевдотензор-источник ранга N псевдотензором-источником мультидислокаций T_{ij} , геометрическую переменную ранга N , имеющую неинтегрируемую часть, — мультидисторсией D_{ij} . Соответственно геометрическую переменную ранга ($N - 1$), которая будет служить дефектным потенциалом для мультидисторсии, назовем тензором дефектных мультиперемещений D_{ij} . Непрерывную составляющую D_{ij} назовем тензором мультиперемещений R_{ij} , а разрывную составляющую D_{ij} — мультидислокациями D_{ij}^N .

Определим сохраняющийся псевдотензор-источник мультидислокаций T_{ij} ранга N следующим образом:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (28)$$

Тогда поле мультидисторсии будет определено общим решением уравнений сохранения (28):

$$T_{ij} = \frac{\partial D_{inn}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj}. \quad (29)$$

Выражения (29) дают представление общего решения уравнений (28). С другой стороны, их можно трактовать как неоднородные уравнения совместности, т.е. как обобщенные на ранг N неоднородные уравнения Папковича.

Представляя решение уравнений (29) как сумму общего решения $\partial R_{ij} / \partial x_j$ однородных уравнений (29) и частного решения D_{ij}^N неоднородных уравнений (29), получим:

$$D_{ij} = \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_j} + D_{ij}^N. \quad (30)$$

Антисимметричная часть уравнений (30) дает определение псевдотензора-источника ранга ($N - 1$) и соответственно его разложение по сортам ($N - 1$) и N :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= D_{inn} \mathcal{E}_{nmj} = \\ &= \frac{\partial R_{inn}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} + D_{inn}^N \mathcal{E}_{nmj} = \\ &= T_{ij}^{N-1} + T_{ij}^N. \end{aligned} \quad (31)$$

С другой стороны, равенства (31) и (29) позволяют установить общую связь между псевдотензором-источником ранга ($N - 1$) и соответственно псевдотензором-источником ранга N :

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial D_{inn}}{\partial x_i} \mathcal{E}_{nmj} = T_{ij}.$$

Интегрирование уравнений (30) дает определение дефектного тензора мультиперемещений

$$D_{ij} = R_{ij} + D_{ij}^N$$

и тензора мультидислокаций

$$D_{ij}^N = \int_{M_0}^{M_1} D_{ij}^N dx_j.$$

Тензор непрерывных мультиперемещений разложим на интегрируемую S_{ij} и неинтегрируемую D_{ij}^{N-1} части:

$$R_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_i} + D_{ij}^{N-1}.$$

По определению, неинтегрируемая часть мультиперемещений удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial D_{inn}^{N-1}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} = T_{ij}^{N-1} \neq 0. \quad (32)$$

Как следует из (32), псевдотензор-источник T_{ij}^{N-1} удовлетворяет закону сохранения:

$$\frac{\partial T_{ij}^{N-1}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 D_{inn}^{N-1}}{\partial x_m \partial x_i} \mathcal{E}_{nmj} \equiv 0. \quad (33)$$

При этом из (31) следует, что псевдотензор-источник T_{ij}^N не удовлетворяет закону сохранения:

$$\frac{\partial T_{...i}^N}{\partial x_i} = T_{...i} \neq 0. \quad (34)$$

Итак, с использованием равенств (28) и (29) получены соотношения (33) и (34), которые отличаются рангом входящих в них тензорных объектов. Уравнения (33) и (34) являются исходными при определении дефектной сплошной среды ранга $(N-1)$, в то время как (28) и (29) являлись исходными при определении дефектной сплошной среды ранга N . Первоначально выбирался конечный ранг среды N . Поэтому после N шагов этого алгоритма, очевидно, приходим к полю мультиперемещений ранга ноль (скалярному полю) $D = D^0 + D^1 + \dots + D^{N-1} + D^N$. На этом процедура построения последовательности дефектных сред до N -го ранга включительно естественным образом заканчивается.

Таким образом, предложена общая геометрическая теория дефектов. Эта теория, опираясь на известные в теории дефектов сведения о дислокациях и дисклинациях, позволяет прогнозировать новые поля дефектов, указывает условия их генерации и исчезновения. Сложность структуры различных полей дефектов привела к необходимости введения новых понятий (ранг дефектов, сорт дефектов), позволяющих сформулировать достаточно общую непротиворечивую классификацию дефектов. Тем не менее, считаем необходимым ввести еще и определение глубины дефектности. Понятие глубины дефектности позволяет указать иерархию причин, определяющих зарождение и исчезновение дефектов. Рассмотрим табл. 4, построенную для сред N -го ранга и указывающую последовательные квадратуры уравнений существования сохраняющихся («материнских») дефектов в среде ранга N .

Обратим внимание на то, что все дефекты, расположенные выше диагонали на одинаковое количество ячеек, обладают следующими общими свойствами: дефекты $D^1, D_i^2, D_{ij}^3, \dots, D_{ijk\dots}^N$ — сохраняющиеся дефекты; дефекты $D_i^2, D_j^3, D_{ij}^4, \dots, D_{ijk\dots}^N$ могут зародиться и исчезать на сохраняющихся дефектах;

дефекты $D_i^3, D_i^4, D_{ij}^5, \dots, D_{ijk\dots}^N$ могут зародиться и исчезать на дефектах, которые, в свою очередь, могут зародиться и исчезать на сохраняющихся дефектах и т.д. Эти группы дефектов можно описать с помощью числового параметра $h = s - r$, где s — сорт дефекта; r — ранг дефекта. Параметр h мы будем называть глубиной дефектности. Глубина дефектности показывает, в составе какой по счету квадратуры геометрической переменной появляется данный дефект. Так, сохраняющиеся дислокации D_i^2 появляются в первой квадратуре дисторсии D_{ij} , сохраняющиеся дисклинации D_{ij}^3 появляются в первой квадратуре кривизны D_{ijk} . Они имеют глубину дефектности равную 1. Дислокации D_i^3 , способные зародиться и исчезать на сохраняющихся дисклинациях D_{ij}^3 , появляются во второй квадратуре кривизны D_{ijk} . Также во второй квадратуре дисторсии D_{ij} появляются скалярные дефекты D^2 , которые могут зародиться и исчезать на сохраняющихся дислокациях D_i^2 .

Можно дать следующую визуальную интерпретацию глубины дефектов: все дефекты с одинаковой глубиной дефектности лежат на одной и той же диагонали (табл. 4). Причем чем больше глубина дефектности, тем больше расстояние между этой диагональю и главной диагональю.

6. Анализ результатов

Кратко перечислим результаты проведенного исследования, укажем на связь введенных в работе классов дефектов с известными.

Установлено новое поле дефектов — скалярные дефекты различных сортов.

Показано, что развиваемая в статье геометрическая теория описывает все известные свойства сохраняющихся дислокаций: имеет место классическое определение плотности дислокаций, классическое определение вектора Бюргера.

Таблица 4

Ранг/Сорт	Сорт 0	Сорт 1	Сорт 2	Сорт 3	...	Сорт N
D	D^0	D^1	D^2	D^3	...	D^N
D_i	$\frac{\partial D^0}{\partial x_i}$	D_i^1	D_i^2	D_i^3	...	D_i^N
D_{ij}	$\frac{\partial^2 D^0}{\partial x_i \partial x_j}$	$\frac{\partial D_i^1}{\partial x_j}$	D_{ij}^2	D_{ij}^3	...	D_{ij}^N
D_{ijk}	$\frac{\partial^3 D^0}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$	$\frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_k \partial x_j}$	$\frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k}$	D_{ijk}^3	...	D_{ijk}^N
...
$D_{ijk\dots}^N$	$\frac{\partial^N D^0}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$	$\frac{\partial^{(N-1)} D_i^1}{\partial x_k \partial x_j}$	$\frac{\partial^{(N-2)} D_{ij}^2}{\partial x_k}$	$\frac{\partial^{(N-3)} D_{ijk}^3}{\partial x_k}$...	$D_{ijk\dots}^N$
	N	$N-1$	$N-2$	$N-3$		

Генерируемые дислокации определяются в рамках теории как дефекты первого ранга третьего сорта. Установлено, что зарождение дислокаций на дисклинациях происходит строго по типам: на классических дисклинациях зарождаются только ω -дислокации. Новым элементом здесь является то, что два других типа дислокаций могут зарождаться и при отсутствии «классических» дисклинаций. С точки зрения общепринятого разделения дислокаций на типы (дислокации скольжения и дислокации отрыва), на «классических» дисклинациях зарождается «пакет» из трех типов — дислокаций скольжения и дислокаций отрыва в строго определенной пропорции.

Для каждого типа дислокаций существует и определен свой псевдотензор-источник, подчиняющийся соответствующему закону сохранения (или генерации/уничтожения).

Показано, что развита теория описывает известные свойства сохраняющихся «классических» дисклинаций.

Установлены два новых типа дефектов второго ранга: наряду с известными дефектами второго ранга — дисклинациями — существуют еще кавитация и двойникование.

Прогнозируется существование дефектов любого конечного ранга.

Установлена иерархическая структура источников дефектов: источником псевдотензора ранга $N-1$ является след псевдотензора ранга N .

Для любого ранга дефектов прогнозируется существование конечного числа сортов дефектов выбранного ранга. Количество сортов в каждом ранге дефектов связано с максимальным рангом сохраняющегося тензора-источника дефектов, существующего в рассматриваемой среде.

Показано, что для любого сорта дефектов возможно существование конечного числа рангов дефектов выбранного сорта. Количество рангов в каждом сорте дефектов связано с рангом сохраняющегося псевдотензора-источника дефектов выбранного сорта.

Все дефектные среды классифицированы по максимальному рангу псевдотензоров-источников сохраняющихся дефектов, или по максимальному рангу непрерывной геометрической переменной, имеющей неинтегрируемую составляющую.

Работа выполнена при поддержке проектов РФФИ (№№ 06-01-00051, 07-01-13525-офи-ц).

Литература

1. Gutkin M. Yu. Nanoscopies of dislocations and disclinations in gradient elasticity // *Reviews of Advanced in Mater. Science.* – 2000. – V. 1, – No. 1. – P. 27–60.
2. Kadić A., Edelen D.G.B. A Gauge Theory of Dislocations and Disclinations: Lect. Notes in Physics. – Berlin – New York: Springer-Verlag, 1983. – V. 174. – 290 p.
3. Kröner E. Dislocations and continuum mechanics // *Appl. Mech. Rev.* – 1962. – No. 15. – P. 599–606.
4. Kröner E. Gauge Field Theories of Defects in Solids. – Stuttgart: Max-Planck Inst., 1982. – 102 p.
5. De Wit R. The Continual Theory of the Stationary Dislocations // *Solid State Physics.* – New York: Academic Press, Inc., 1960. – V. 10. – 249 p.
6. De Wit R. Theory of dislocations: continuous and discrete disclinations in isotropic elasticity // *J. Research of the National Bureau of Standards.* A. – 1973. – V. 77. – No. 3. – P. 359–368.
7. Aifantis E.C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales // *J. Mech. Behav. Mater.* – 1994. – V. 5. – No. 3. – P. 335–353.
8. Aifantis E.C. Strain gradient interpretation of size effects // *Int. J. Fracture.* – 1999. – V. 95. – P. 299–314.
9. Fleck N.A., Hutchinson J.W. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1993. – V. 41. – P. 1825–1857.
10. Fleck N.A., Hutchinson J.W. A reformulation of strain gradient plasticity // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2001. – V. 49. – P. 2245–2271.
11. Fleck N.A., Hutchinson J.W. Strain Gradient Plasticity // *Advanced in Applied Mechanics.* – New York: Academic Press, Inc., 1997. – V. 33. – P. 295–361.
12. Gao H., Huang Y., Nix W.D., Hutchinson J.W. Mechanism-based strain gradient plasticity. I. Theory // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1999. – V. 47. – P. 1239–1263.
13. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / Под ред. В.Е. Панина. – Новосибирск: Наука, 1995. – Т. 1. – 298 с., Т. 2. – 320 с.
14. Макаров П.В. Микродинамическая теория пластичности и разрушения структурно-неоднородных сред // *Изв. вузов. Физика.* – 1992. – № 4. – С. 42–58.
15. Макаров П.В., Романова В.А. О новом критерии пластического течения при моделировании деформационных процессов на мезоуровне // *Mat. моделирование.* – 2000. – Т. 12. – № 11. – С. 91–101.
16. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Ration. Mech. and Analysis.* – 1964. – V. 1. – P. 51–78.
17. Лихачев В.А., Волков А.Е., Шудегов В.Е. Континуальная теория дефектов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 228 с.
18. Белов П.А., Лурье С.А. Общая теория дефектов сплошных сред // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2003. – Т. 9. – № 4. – С. 471–484.
19. Лурье С.А., Белов П.А., Бабешико А.В., Яновский Ю.Г. Масштабные эффекты (multiscale-effects) в моделях механики сплошных сред // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2002. – Т. 8. – № 1. – С. 71–82.
20. Лурье С.А., Белов П.А. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Азаро-Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием» // *Сб. трудов конференции «Современные проблемы механики гетерогенных сред», 2005.* – М.: Институт прикладной механики РАН, 2005. – С. 235–268.

Поступила в редакцию 15.11.2006 г.,
переработанный вариант 31.07.2007 г.