ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ АДГЕЗИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ.

Белов П.А.*, Лурье С.А.**

**ООО «НИК», Petr.A.Belov@boeing.com*
***Институт прикладной механики РАН (Москва), lurie@ccas.ru*

РЕЗЮМЕ

В работе использован «кинематический» вариационный принцип [1] построения моделей сплошных сред с обобщенной кинематикой. Новым элементом применения «кинематического» вариационного принципа является учет связей между дисторсией и перемещениями не только в объеме среды, но и на поверхности. Это приводит к появлению в лагранжиане теории соответствующей поверхностной плотности потенциальной энергии, по своей структуре похожей на объемную плотность потенциальной энергии для трансверсально изотропной среды в направлении нормали к поверхности. Приведена вариационная постановка, получены уравнения Эйлера и соответствующий спектр краевых задач. Дифференциальные уравнения равновесия совпадают с уравнениями классической теории упругости, но «статические» граничные условия содержат слагаемые со вторыми производными от перемещений по касательным направлениям к поверхности. Они трактуются как плоские дивергенции адгезионных напряжений и дают возможность учесть масштабные эффекты на поверхности. Показано, что сформулированная теория описывает эффект капиллярного давления Лапласа как свое строгое следствие. Теория предсказывает существование аналогичных эффектов в касательных напряжениях. Сформулирована теория тонких пленок с адгезионными свойствами лицевых поверхностей, которая дает объяснение эффекту супермодулей (точнее – супержесткостей) тонких пленок при стремлении толщины пленки к нулю. Теория объясняет аномальные жесткостные свойства нанотрубок и нанопластин существенным влиянием на них адгезии поверхности пленок. Исследование решений динамических уравнений теории классических сред с адгезионными свойствами поверхностей позволило предсказать существование целого спектра поверхностных волн, обусловленных существованием адгезионных свойств поверхности. Дано теоретическое объяснение эффекту капиллярной ряби как резонансному образованию стоячих W-волн (одного из типов открытых поверхностных волн). Для других типов поверхностных волн предсказаны аналогичные эффекты. Предложена процедура экспериментального определения адгезионных модулей для твердых тел с помощью измерения скоростей распространения и длин волн открытых поверхностных волн.

1. ВВЕДЕНИЕ.

«Кинематический» вариационный принцип, сформулированный в [1] и развитый в [2-4], дает возможность построить замкнутую модель среды по выбранным кинематическим свойствам. Так, постулируя непрерывность среды (отсутствие дефектов [5]), следует ввести в качестве кинематических связей между двенадцатью зависимыми кинематическими переменными: деформациями, поворотами и перемещениями, девять несимметричных соотношений Коши:

$$d_{ij} - \frac{\partial R_i}{\partial x_j} = 0$$

где $d_{ij} = \varepsilon_{ij} - \omega_k Э_{ijk}$ - тензор дисторсии, ε_{ij} - тензор деформаций, ω_k - псевдовектор поворотов, $Э_{ijk}$ - псевдотензор Леви-Чивиты. Варьируя соотношения Коши, домножая их на неопределенные множители Лагранжа σ_{ij} и интегрируя по объему тела, формулируется возможная работа внутренних сил (реактивных силовых факторов, обеспечивающих выполнение выбранных кинематических связей). Возможная работа преобразуется путем взятия по частям в линейную вариационную форму. Для обратимых физически линейных процессов такой выбор кинематических связей приводит к лагранжиану простейшей

несимметричной теории упругости, а при гипотезе парности касательных напряжений – к классической теории упругости [1].
Новым моментом данной работы является учет связей между дисторсией и перемещениями не только в объеме среды, но и на поверхности.

$$\overline{\delta U} = \iiint \sigma_{ij}\delta(d_{ij} - \frac{\partial R_i}{\partial x_j})dV + \oiint a_{ik}\delta(d_{ij} - \frac{\partial R_i}{\partial x_j})(\delta_{jk} - n_j n_k)dF$$

Здесь следует сделать акцент на том, что в отличие от девяти соотношений Коши в объеме, на поверхности среды можно сформулировать только шесть соотношений Коши, потому что нормальные производные на поверхности не определены. Это соображение и определяет появление множителя $(\delta_{jk} - n_j n_k)$ в поверхностной плотности возможной работы. Приводя возможную работу к линейной вариационной форме и постулируя ее интегрируемость (существование потенциальной энергии), получим:

$$U = \iiint U_V(d_{ij}, R_i)dV + \oiint U_F(d_{ij}(\delta_{jk} - n_j n_k), R_i)dF + \sum \oint U_s(R_i)ds$$

Чтобы сформулированная потенциальная энергия приводила к теории, не противоречащей экспериментальным данным, следует исключить перемещения из списков аргументов:

$$U = \iiint U_V(d_{ij})dV + \oiint U_F(d_{ij}(\delta_{jk} - n_j n_k))dF$$

Таким образом, получен вид потенциальной энергии классических сред с адгезионными свойствами поверхностей и выяснен список ее аргументов.

2. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА

Для физически линейной среды плотности потенциальных энергий в объеме и на поверхности должны быть квадратичными положительно определенными формами своих аргументов. Отсюда получим следующий лагранжиан:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint C_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}dV - \frac{1}{2}\oiint A^*_{ipnq}[\frac{\partial R_n}{\partial x_m}(\delta_{mq} - n_m n_q)][\frac{\partial R_i}{\partial x_j}(\delta_{jp} - n_j n_p)]dF \quad (1)$$

Здесь явно просматривается «подобие» между поверхностной плотностью энергии U_F и объемной плотностью энергии U_V.

$$2U_V = C_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}$$

$$2U_F = A_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}$$

$$A_{ijnm} = A^*_{ipnq}(\delta_{mq} - n_m n_q)(\delta_{jp} - n_j n_p) \quad (2)$$

Как следствие, тензоры модулей C_{ijnm} и A_{ijnm} имеют общее свойство симметрии при перестановке первой и второй пары индексов:

$$C_{ijnm} = C_{nmij}$$
$$A_{ijnm} = A_{nmij} \quad (3)$$

Однако их структуры радикально отличаются.
Тензор объемных модулей является изотропным и имеет следующую структуру:

$$C_{ijnm} = [\lambda\delta_{ij}\delta_{nm} + (\mu + \chi)\delta_{in}\delta_{jm} + (\mu - \chi)\delta_{im}\delta_{jn}] \quad (4)$$

Здесь λ, μ - классические модули – коэффициенты Ламе, а χ - неклассический модуль – «третий коэффициент Ламе».
В то же время тензор адгезионных модулей является трансверсально изотропным, и физические свойства по направлению нормали отличаются от физических свойств в любом направлении, лежащем в касательной плоскости к поверхности. Трансверсальная изотропность следует из определения A_{ijnm} через произвольный тензор A^*_{ipnq} (2). Кроме того,

тензор адгезионных модулей, в соответствии с тем же определением (2), обладает следующими уникальными свойствами:

$$A_{ijnm} n_j = 0$$
$$A_{ijnm} n_m = 0 \tag{5}$$

Как будет показано ниже, тензор адгезионных модулей имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} A_{ijnm} &= [\lambda^F (\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{nm} - n_n n_m) + \delta^F n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) + \\ &+ (\mu^F + \chi^F)(\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^F - \chi^F)(\delta_{im} - n_i n_m)(\delta_{jn} - n_j n_n)] \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь λ^F, μ^F, χ^F и δ^F - адгезионные модули, имеющие размерность, превышающую размерность коэффициентов Ламе, на размерность длины.
Варьируя лагранжиан и приравнивая вариацию нулю, получим вариационное уравнение:

$$\begin{aligned} \delta L &= \iiint [C_{ijnm} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} + P_i^V] \delta R_i dV + \\ &+ \oiint [P_i^F - C_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} n_j + A_{ijnm} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m}] \delta R_i dF - \\ &- \sum \oint A_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \nu_j \delta R_i ds = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь суммирование производится по всем контурам, ограничивающим гладкие поверхности, составляющие кусочно-гладкую поверхность F.

Таким образом, теория сред с идеальной адгезией поверхностей имеет те же уравнения равновесия, что и классическая теория упругости (при $\chi = 0$), но краевая задача содержит другие статические граничные условия.

3. СТРУКТУРА ТЕНЗОРА АДГЕЗИОННЫХ МОДУЛЕЙ.

Структура тензора адгезионных модулей A_{ijnm} определяется его разложением по тензорам четвертого ранга, построенным как все возможные произведения пар «плоских» тензоров Кронекера вида $(\delta_{ij} - n_i n_j)$ и тензоров, образованных произведением векторов единичной нормали вида $n_i n_j$ со всеми возможными перестановками индексов. Эти тензоры являются своего рода базисными, а модули являются проекциями тензора A_{ijnm} на базисные тензоры. В общем случае можно построить десять таких базисных тензоров:

$$(\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{nm} - n_n n_m), \quad (\delta_{ij} - n_i n_j) n_n n_m, \quad n_i n_j (\delta_{nm} - n_n n_m), \quad n_i n_j n_n n_m,$$
$$(\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m), \quad (\delta_{in} - n_i n_n) n_j n_m, \quad n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m),$$
$$(\delta_{im} - n_i n_m)(\delta_{jn} - n_j n_n), \quad (\delta_{im} - n_i n_m) n_j n_n, \quad n_i n_m (\delta_{jn} - n_j n_n).$$

Так как любой тензор модулей в силу существования плотности потенциальной энергии должен обладать симметрией (3) при перестановке первой и второй пар индексов, количество базисных тензоров сокращается до восьми:

$$(\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{nm} - n_n n_m); \quad (\delta_{ij} - n_i n_j) n_n n_m + n_i n_j (\delta_{nm} - n_n n_m); \quad n_i n_j n_n n_m;$$
$$(\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m); \quad (\delta_{in} - n_i n_n) n_j n_m; \quad n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m);$$
$$(\delta_{im} - n_i n_m)(\delta_{jn} - n_j n_n); \quad (\delta_{im} - n_i n_m) n_j n_n + n_i n_m (\delta_{jn} - n_j n_n).$$

Таким образом, произвольный трансверсально-изотропный тензор модулей с нормалью n_i к поверхности изотропии в несимметричной теории имеет восемь независимых компонент.

$$\begin{aligned} C_{ijnm} &= C_1 (\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{nm} - n_n n_m) + C_2 [(\delta_{ij} - n_i n_j) n_n n_m + n_i n_j (\delta_{nm} - n_n n_m)] + C_3 n_i n_j n_n n_m + \\ &+ C_4 (\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m) + C_5 (\delta_{in} - n_i n_n) n_j n_m + C_6 n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) + \\ &+ C_7 (\delta_{im} - n_i n_m)(\delta_{jn} - n_j n_n) + C_8 [(\delta_{im} - n_i n_m) n_j n_n + n_i n_m (\delta_{jn} - n_j n_n)] \end{aligned}$$

Заметим, что в симметричной теории упругости трансверсально изотропный тензор модулей имеет пять независимых компонент. Действительно, в силу наличия симметрии при перестановке индексов отдельно в первой паре и отдельно – во второй, получим дополнительные условия:

$$C_{ijnm} = C_{jinm}$$

$$C_{ijnm} = C_{ijmn}$$

Из этих дополнительных условий следует, что в «парный» трансверсально изотропный тензор модулей входят только пять из восьми возможных комбинаций модулей:

$$C_{ijnm} = C_1(\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{nm} - n_n n_m) +$$
$$+ C_2[(\delta_{ij} - n_i n_j) n_n n_m + n_i n_j (\delta_{nm} - n_n n_m)] +$$
$$+ C_3 n_i n_j n_n n_m +$$
$$+ \frac{1}{2}(C_4 + C_7)[(\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m) + (\delta_{jn} - n_j n_n)(\delta_{im} - n_i n_m)] +$$
$$+ \frac{1}{4}(C_5 + C_6 + 2C_8)[(\delta_{in} - n_i n_n) n_j n_m + (\delta_{jn} - n_j n_n) n_i n_m + (\delta_{im} - n_i n_m) n_j n_n + (\delta_{jm} - n_j n_m) n_i n_n]$$

Как было показано выше (5), тензор адгезионных модулей, в отличие от произвольного трансверсально изотропного несимметричного тензора модулей, должен удовлетворять дополнительным условиям:

$$\begin{cases} A_{ijnm} n_j = 0 \\ A_{ijnm} n_m = 0 \end{cases}$$

Поэтому, следует исключить из совокупности базисных тензоров те, которые этим условиям не удовлетворяют. Таким образом, базисные тензоры

$$(\delta_{ij} - n_i n_j) n_n n_m + n_i n_j (\delta_{nm} - n_n n_m); \qquad n_i n_j n_n n_m;$$

$$(\delta_{in} - n_i n_n) n_j n_m; \qquad (\delta_{im} - n_i n_m) n_j n_n + n_i n_m (\delta_{jn} - n_j n_n)$$

исключаются из структуры тензора адгезионных модулей.

Окончательно, несимметричный тензор адгезионных модулей приобретает вид разложения по оставшимся четырем базисным тензорам:

$$A_{ijnm} = [\lambda^F (\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{nm} - n_n n_m) + \delta^F n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) +$$
$$+ (\mu^F + \chi^F)(\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^F - \chi^F)(\delta_{im} - n_i n_m)(\delta_{jn} - n_j n_n)]$$

Отметим здесь, что симметричный тензор адгезионных модулей приобрел бы структуру, содержащую только два адгезионных модуля.

$$A_{ijnm} = \lambda^F (\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{nm} - n_n n_m) + \mu^F [(\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m) + (\delta_{im} - n_i n_m)(\delta_{jn} - n_j n_n)]$$

Сравнивая структуры адгезионных модулей в симметричной и несимметричной теориях, можно сделать заключение, что модули χ^F и δ^F определяют в адгезии несимметричные эффекты.

4. ТРАКТОВКА АДГЕЗИОННЫХ МОДУЛЕЙ.

Преобразуем поверхностную плотность потенциальной энергии к каноническому виду и дадим физическую трактовку адгезионным модулям, являющимся коэффициентами в канонической квадратичной форме. Представим дисторсию в виде тензорного разложения на "плоский" девиатор:

$${}^2\gamma_{ij} = \frac{1}{2} d_{nm} (\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m) + \frac{1}{2} d_{nm} (\delta_{jn} - n_j n_n)(\delta_{im} - n_i n_m) - \frac{1}{2} d_{nm} (\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{nm} - n_n n_m)$$

"плоский" шаровой тензор:

$${}^2\theta = d_{nm} (\delta_{nm} - n_n n_m)$$

"плоский" антисимметричный тензор:

$$^2\omega_{ij} = \frac{1}{2} d_{nm}(\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m) - \frac{1}{2} d_{nm}(\delta_{jn} - n_j n_n)(\delta_{im} - n_i n_m)$$

и "плоский" вектор углов поворота поверхности при ее изгибе:

$$^2\alpha_i = d_{nm} n_n (\delta_{mi} - n_m n_i)$$

Здесь левый верхний индекс "2" подчеркивает тот факт, что соответствующие компоненты тензора дисторсии вычисляются на поверхности тела (в 2D). В результате получим:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j}(\delta_{jk} - n_j n_k) = {}^2\gamma_{ij} + \frac{1}{2}{}^2\theta(\delta_{ij} - n_i n_j) + {}^2\omega_{ij} + {}^2\alpha_j n_i \qquad (8)$$

Представленный в виде разложения (8) тензор дисторсии на поверхности, преобразует потенциальную энергию адгезии к каноническому виду:

$$2U_F = A_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} = (\mu^F + \lambda^F)({}^2\theta\,{}^2\theta) + 2\mu^F({}^2\gamma_{ij}\,{}^2\gamma_{ij}) + 2\chi^F({}^2\omega_{ij}\,{}^2\omega_{ij}) + \delta^F({}^2\alpha_k\,{}^2\alpha_k) \qquad (9)$$

Каноничность поверхностной плотности потенциальной энергии дает основание утверждению о существовании четырех энергетически независимых типов адгезионных взаимодействий (отсутствие перекрестных членов). Каждое взаимодействие характеризуется своим адгезионным модулем $(\mu^F + \lambda^F)$, μ^F, χ^F и δ^F.

Введем скалярные меры деформации для каждого типа адгезионных взаимодействий:

$$\Theta = \sqrt{{}^2\theta\,{}^2\theta} \quad \Gamma = \sqrt{{}^2\gamma_{ij}\,{}^2\gamma_{ij}} \quad \Omega = \sqrt{{}^2\omega_{ij}\,{}^2\omega_{ij}} \quad A = \sqrt{{}^2\alpha_k\,{}^2\alpha_k},$$

тогда поверхностная плотность потенциальной энергии в мерах приобретает вид:

$$2U_F(\Theta, \Gamma, \Omega, A) = (\mu^F + \lambda^F)\Theta\Theta + 2\mu^F\Gamma\Gamma + 2\chi^F\Omega\Omega + \delta^F AA$$

Из этого представления следует энергетическая трактовка адгезионных модулей

$$(\mu^F + \lambda^F) = 2U_F(1,0,0,0) \quad 2\mu^F = 2U_F(0,1,0,0) \quad 2\chi^F = 2U_F(0,0,1,0) \quad \delta^F = 2U_F(0,0,0,1) \qquad (10)$$

как удвоенной потенциальной энергии, накапливаемой поверхностью при единичной мере деформации соответствующего типа адгезионных взаимодействий.

5. КАПИЛЛЯРНОЕ ДАВЛЕНИЕ ЛАПЛАСА.

В статических граничных условиях теории классических сред с идеальными адгезионными свойствами поверхностей появляется дополнительное слагаемое со вторыми производными от перемещений. Если на поверхности тела деформации меняются медленно как функции координат поверхности $C_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} n_j >> A_{ijnm}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m}$, то решением такой приближенной задачи будет классическое решение. В противоположном случае, когда деформации на поверхности тела меняются достаточно быстро, и $A_{ijnm}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} >> C_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} n_j$, классическое решение не применимо, и эксперименты, в которых будет реализовано это условие, будут фиксировать неклассические эффекты.

Таким неклассическим, с точки зрения изложенного, эффектом является капиллярное давление Лапласа. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим статическое граничное условие для нормальных напряжений.

$$C_{ijnm} n_i n_j \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - A_{ijnm} n_i \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} = P_i^F n_i$$

С учетом определений тензоров модулей (4), (6) и вводя обозначения

$$P_i^F n_i = p_{ext}$$
$$R_n n_n = R$$
$$\frac{\partial R}{\partial x_m} n_m = \dot{R}$$
$$(\delta_{nm} - n_n n_m)\frac{\partial R_n}{\partial x_m} = \frac{\Delta F}{F}$$
получим:
$$(2\mu + \lambda)\dot{R} + \lambda \frac{\Delta F}{F} - \delta^F \nabla^2 R = p_{ext}$$
Учтем уравнение закона Гука для давления:
$$p = (\frac{2\mu}{3} + \lambda)(\dot{R} + \frac{\Delta F}{F}) \quad \Rightarrow \quad \dot{R} = \frac{1}{(\frac{2\mu}{3} + \lambda)} p - \frac{\Delta F}{F}$$
Исключим из статического граничного условия нормальную производную:
$$\frac{(2\mu + \lambda)}{(\frac{2\mu}{3} + \lambda)} p = p_{ext} + 2\mu \frac{\Delta F}{F} + \delta^F \nabla^2 R \qquad (11)$$
Для жидкостей это соотношение можно упростить, полагая $\lambda >> \mu$, тогда можно обнаружить, что уравнение (11) является обобщенным уравнением Лапласа для капиллярного давления:
$$p = p_{ext} + 2\mu \frac{\Delta F}{F} + \delta^F \nabla^2 R$$
Давление на поверхности среды уравновешено внешним давлением p_{ext}, поверхностным натяжением $2\mu \frac{\Delta F}{F}$ и капиллярным давлением $\delta^F \nabla^2 R$. Обратим внимание на то, что капиллярное давление пропорционально (как и у Лапласа) сумме главных кривизн деформированной поверхности.
$$\nabla^2 R = \frac{\partial^2 R}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial s_2^2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$
$$p = p_{ext} + 2\mu \frac{\Delta F}{F} + \delta^F (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$$
Здесь R_1 и R_2 - радиусы главных кривизн.

Таким образом, теория классических сред с идеальной адгезией поверхностей описывает явление капиллярного давления как свое строгое следствие. Одновременно адгезионный модуль δ^F идентифицируется как постоянная Лапласа для капиллярного давления. Также дается определение поверхностного натяжения $2\mu \frac{\Delta F}{F}$ в классической механике сплошных сред.

6. АДГЕЗИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ.

Наряду с капиллярным давлением Лапласа, теория классических сред с идеальными адгезионными свойствами поверхностей предсказывает неклассические эффекты и в касательных статических граничных условиях. Проведем аналогичные преобразования в статических граничных условиях с касательными напряжениями $\tau_k = \sigma_{ij} n_j (\delta_{ik} - n_i n_k) \quad \Rightarrow \quad \tau_k n_k = 0$.

$$\tau_k = [P_i^F + (\mu^F + \chi^F)\nabla^2 R_i + \frac{(\lambda^F + \mu^F - \chi^F)}{2\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}(2\mu\frac{\Delta F}{F})](\delta_{ik} - n_i n_k) \qquad (12)$$

Как видим, в касательных граничных условиях появляются два неклассических поверхностных эффекта, связанных с появлением двух слагаемых со старшими (вторыми) производными. Первый эффект аналогичен капиллярному давлению Лапласа – это появление плоского оператора Лапласа, действующего на некоторый вектор. В «нормальном» граничном условии этим вектором был вектор $\delta^F R n_k$, а в «касательных» - $(\mu^F + \chi^F)R_i(\delta_{ik} - n_i n_k)$. Второй неклассический эффект связан с плоским градиентом поверхностного натяжения $2\mu\frac{\Delta F}{F}$.

Можно разделить эффекты в касательных напряжениях, представив плоское векторное уравнение (12) в виде его плоской дивергенции:

$$\frac{\partial \tau_k}{\partial x_k} = \frac{\partial P_i^F}{\partial x_k}(\delta_{ik} - n_i n_k) + \frac{(2\mu^F + \lambda^F)}{2\mu}\nabla^2(2\mu\frac{\Delta F}{F})$$

и его плоского ротора:

$$\frac{\partial \tau_n}{\partial x_m}\mathit{Э}_{nmk} n_k = \frac{\partial P_n^F}{\partial x_m}\mathit{Э}_{nmk} n_k + (\mu^F + \chi^F)\nabla^2(\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\mathit{Э}_{nmk} n_k)$$

Таким образом, адгезионные эффекты разделены и выписаны их уравнения. Комбинации адгезионных модулей $(2\mu^F + \lambda^F)$ и $(\mu^F + \chi^F)$, являющиеся адгезионными аналогами модуля Юнга и модуля сдвига, определяют характерные длины разделенных адгезионных взаимодействий.

7. К ТЕОРИИ ТОНКИХ ПЛЕНОК.

Рассмотрим классическую постановку теории пластин для сред с адгезионными свойствами.

1. Прогибы отсутствуют: $R_i Z_i = 0$

2. Перемещения в плоскости пластины постоянны по толщине: $\frac{\partial R_j}{\partial x_k} Z_k(\delta_{ij} - Z_i Z_j) = 0$.

Здесь Z_i - орт оси OZ.

Из этих гипотез следует, что объемная плотность потенциальной энергии в (1) постоянна по толщине, и можно провести внутреннее интегрирование по $z = x_k Z_k$.

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint C_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}dV - \frac{1}{2}\oiint A_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}dF =$$

$$= A - \frac{1}{2}\iint [\int_{-h/2}^{+h/2} C_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}dz]dxdy - \frac{1}{2}[\iint A_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}dxdy + \oint(\int_{-h/2}^{+h/2} A_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}dz)ds] = \qquad (13)$$

$$= A - \frac{1}{2}\iint (C_{ijnm}h + A_{ijnm})\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}dxdy = A - \frac{1}{2}\iint C^*_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}dxdy$$

Здесь мы пренебрегли энергией адгезии торцевой поверхности $\frac{1}{2}\oint(\int_{-h/2}^{+h/2} A_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}dz)ds$.

Таким образом, тензор эффективных жесткостей C^*_{ijnm} для пленок с адгезионными свойствами лицевых поверхностей является линейной функцией абсолютной толщины h:

$$C^*_{ijnm} =$$
$$= (\lambda h + \lambda^F)(\delta_{ij} - Z_i Z_j)(\delta_{nm} - Z_n Z_m) +$$
$$+[(\mu + \chi)h + (\mu^F + \chi^F)](\delta_{in} - Z_i Z_n)(\delta_{jm} - Z_j Z_m) +$$
$$+[(\mu - \chi)h + (\mu^F - \chi^F)](\delta_{im} - Z_i Z_m)(\delta_{jn} - Z_j Z_n)$$

Этот эффект является масштабным.

$$\lambda^* h = \lambda h + \lambda^F \quad \mu^* h = \mu h + \mu^F \quad \chi^* h = \chi h + \chi^F \tag{14}$$

Следствия.

1. При стремлении к нулю толщины пленки её жесткость стремится не к нулю, а к соответствующему адгезионному модулю. Из этого следует, что жесткость нанотрубок и нанопластин в основном определяется адгезионными свойствами, а не упругими.
2. Не трудно показать, что (14) можно трактовать с точки зрения классической теории упругости как эффективные жесткости трехслойной пластины $E_{eff} h$, $G_{eff} h$ и $g_{eff} h$. С учетом того, что $E = 2\mu + \lambda$, $G = \mu$ и $g = \chi$, получим:

$$\begin{aligned}
E_{eff} h &= Eh + E^F = E(h - 2h_a) + (E^F + E2h_a) = E(h - 2h_a) + 2E_a h_a \\
G_{eff} h &= Gh + G^F = G(h - 2h_a) + (G^F + G2h_a) = G(h - 2h_a) + 2G_a h_a \\
g_{eff} h &= gh + g^F = g(h - 2h_a) + (g^F + g2h_a) = g(h - 2h_a) + 2g_a h_a
\end{aligned} \tag{15}$$

Средняя пластина имеет те же модули, что и классическая среда без адгезии, и имеет толщину $(h - 2h_a)$. Две обкладки имеют толщину по h_a и модули $E_a = E + \dfrac{E^F}{2h_a}$, $G_a = G + \dfrac{G^F}{2h_a}$, $g_a = g + \dfrac{g^F}{2h_a}$. Такая трактовка для сред с адгезионными свойствами поверхности эквивалентна гипотезе существования «адгезионного слоя» с параметрами h_a, E_a, G_a, g_a в классической теории упругости.

3. Теория тонких пленок с адгезионными свойствами допускает две эквивалентные интерпретации адгезионных аналогов коэффициентов Ламе, вошедших в выражение жесткости пленок с адгезионными свойствами лицевых поверхностей (14).

3.1. Первая трактовка использует определение характерных длин адгезионных взаимодействий:

$$\lambda^F = \lambda h_\lambda \quad \mu^F = \mu h_\mu \quad \chi^F = \chi h_\chi \tag{16}$$

3.2. Вторая трактовка использует определение толщины h_a «адгезионного слоя»:

$$\lambda^F = 2(\lambda_a - \lambda)h_a \quad \mu^F = 2(\mu_a - \mu)h_a \quad \chi^F = 2(\chi_a - \chi)h_a \tag{17}$$

Эквивалентность трактовок следует из определений (16)-(17) - толщина адгезионного слоя и характерные длины адгезионных взаимодействий связаны соотношениями:

$$h_\lambda = h_a \frac{2(\lambda_a - \lambda)}{\lambda} \quad h_\mu = h_a \frac{2(\mu_a - \mu)}{\mu} \quad h_\chi = h_a \frac{2(\chi_a - \chi)}{\chi}$$

4. Рассуждения, приводящие к понятию «адгезионного слоя» вполне аналогичны рассуждениям, приводящим к понятию «межфазного слоя» в теории мелкодисперсных композитов [7]. В [7] структура межфазного слоя была представлена четырьмя прослойками с толщинами, определяемыми соответственно классическими краевыми эффектами и когезионными multiscale-эффектами в матрице и во включении. С учетом полученных результатов, можно утверждать, что структура межфазного слоя получает дальнейшую детализацию, благодаря появлению двух дополнительных прослоек с толщинами, определяемыми адгезионными свойствами матрицы и включения.

8. ЧИСТЫЙ ИЗГИБ ПЛАСТИН С АДГЕЗИЕЙ ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

Так как уравнения равновесия те же, что и в классической теории, гипотезы Кирхгоффа применимы и к теории сред с адгезионными свойствами поверхностей.
Для перемещений в соответствии с гипотезами неизменной нормали:

$$U(x,y,z) = -\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} z \quad V(x,y,z) = -\frac{\partial W(x,y)}{\partial y} z \quad W(x,y,z) = W(x,y) \tag{18}$$

Для напряжений в соответствии с гипотезой ненадавливаемости:

$$\sigma_{xx} = -\frac{E}{(1-\nu^2)}[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}]z \quad \sigma_{xy} = -(1-\nu)\frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} z \quad \sigma_{xz} = \sigma^0_{xz} + \frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\partial \nabla^2 W}{\partial x}\frac{z^2}{2}$$

$$\sigma_{yx} = -(1-\nu)\frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} z \qquad \sigma_{yy} = -(1-\nu)\frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} z \quad \sigma_{yz} = \sigma^0_{yz} + \frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\partial \nabla^2 W}{\partial y}\frac{z^2}{2}$$

$$\sigma_{zx} = \sigma^0_{xz} + \frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\partial \nabla^2 W}{\partial x}\frac{z^2}{2} \tag{19}$$

$$\sigma_{zy} = \sigma^0_{yz} + \frac{E}{(1-\nu^2)}\frac{\partial \nabla^2 W}{\partial y}\frac{z^2}{2}$$

$$\sigma_{zz} = -(\frac{\partial \sigma^0_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^0_{yz}}{\partial y})z - \frac{E}{(1-\nu^2)}\nabla^2\nabla^2 W \frac{z^3}{6}$$

Удовлетворяя граничным условиям (12) на лицевых поверхностях:

$$\sigma_{xz} = P^F_x - (2\mu^F + \lambda^F)\nabla^2 \frac{\partial W}{\partial x}\frac{h}{2}$$

$$\sigma_{yz} = P^F_y - (2\mu^F + \lambda^F)\nabla^2 \frac{\partial W}{\partial y}\frac{h}{2}$$

получим:

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = P^F_x - [\frac{E}{(1-\nu^2)}(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2}) + (2\mu^F + \lambda^F)\frac{h}{2}]\nabla^2 \frac{\partial W}{\partial x} \\ \sigma_{yz} = P^F_y - [\frac{E}{(1-\nu^2)}(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2}) + (2\mu^F + \lambda^F)\frac{h}{2}]\nabla^2 \frac{\partial W}{\partial y} \\ \sigma_{zz} = -(\frac{\partial P^F_x}{\partial x} + \frac{\partial P^F_y}{\partial y})z + [\frac{E}{(1-\nu^2)}(\frac{zh^2}{8} - \frac{z^3}{6}) + (2\mu^F + \lambda^F)\frac{zh}{2}]\nabla^2\nabla^2 W \end{cases}$$

Удовлетворяя граничному условию (11) на лицевых поверхностях
$\sigma_{zz} = P^F_z + \delta^F \nabla^2 W$,
получим аналог уравнения Софи Жермен для пластин с адгезионными свойствами лицевых поверхностей:

$$D^* \nabla^2\nabla^2 W - \delta^F \nabla^2 W = q \tag{20}$$

Здесь $D^* = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{(2\mu^F + \lambda^F)h^2}{2}$ - эффективная цилиндрическая жесткость пластины, причем первое слагаемое соответствует вкладу упругости, а второе слагаемое – вкладу адгезии; $q = 2P^F_z + (\frac{\partial P^F_x}{\partial x} + \frac{\partial P^F_y}{\partial y})h$ - внешняя приведенная поперечная нагрузка. Так же, как и для растяжения пластин, для чистого изгиба при снижении толщины пластины становится существенным вклад адгезионной составляющей в эффективную цилиндрическую жесткость. При толщине $h \ll 6(1-\nu^2)\frac{(2\mu^F + \lambda^F)}{E}$ цилиндрическая жесткость полностью определяется адгезионными свойствами, и эксперименты с пластинами такой толщины будут фиксировать неклассические эффекты.

Другим источником неклассических эффектов будет служить второе слагаемое в уравнении (20), связанное с давлением Лапласа. Это слагаемое не зависит от толщины вообще. Действительно, введем естественную меру длины для данного материала пластины, используя отличие размерности адгезионных и упругих модулей на размерность длины:

$$h_0 = \frac{\delta^F}{E}$$

Уравнение (20) можно привести к безразмерному виду:

$$\overline{D}\overline{\nabla}^2\overline{\nabla}^2\overline{W} - \overline{\nabla}^2\overline{W} = \overline{q}$$

$$\overline{W} = \frac{1}{h_0}W \quad \overline{x}_i = \frac{1}{h_0}x_i \quad \overline{h} = \frac{1}{h_0}h$$

$$\overline{\nabla}^2(...) = \frac{\partial^2(...)}{\partial\overline{x}_i\partial\overline{x}_j}(\delta_{ij} - Z_i Z_j) \quad \overline{D} = [\frac{1}{12(1-v^2)}\overline{h}^3 + \frac{(2\mu^F + \lambda^F)}{\delta^F}\overline{h}^2] \quad \overline{q} = \frac{1}{E}q$$

Поэтому для сверхтонких пленок, когда первым членом в уравнении (20) можно пренебречь, давление Лапласа полностью определяет напряженно-деформированное состояние. Обратим внимание на то, что при этом краевая задача вырождается, и разрешающее уравнение имеет второй порядок. Соответственно, количество граничных условий также должно сократиться.

Рассмотрение этого вырожденного случая будет предметом отдельной статьи.

10. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН АДГЕЗИОННОГО ТИПА.

Учтем в работе внешних сил инерционные члены, а остальные внешние нагрузки положим равными нулю. Уравнения Эйлера тогда приобретут вид:

$$(\mu + \chi)(\Delta R_i - \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j}) + (2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} - \rho\frac{\partial^2 R_i}{\partial t^2} = 0 \qquad (21)$$

Здесь $\Delta(...) = \frac{\partial^2(...)}{\partial x_k \partial x_k}$ - трехмерный оператор Лапласа.

1. Волны расширения. Существование волн расширения в объеме среды определяется уравнением, полученным из уравнений равновесия действием на них оператора дивергенции:

$$(2\mu + \lambda)\Delta\theta - \rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0$$

$$\theta = \frac{\partial R_j}{\partial x_j} \qquad (22)$$

Соответственно, скорость распространения волн расширения, так же как и в классике, определяется соотношением:

$$c_1 = \sqrt{\frac{(2\mu + \lambda)}{\rho}} \qquad (23)$$

2. Волны искажения. Существование волн искажения в объеме среды определяется уравнениями, полученными из уравнений равновесия действием на них оператора ротора:

$$(\mu + \chi)\Delta\omega_i - \rho\frac{\partial^2\omega_i}{\partial t^2} = 0$$

$$\omega_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{nmi} \qquad (24)$$

Скорость распространения волн искажения иная, чем в классике, определяется соотношением:

$$c_2 = \sqrt{\frac{(\mu+\chi)}{\rho}} \tag{25}$$

Если положить $\chi = 0$, что эквивалентно введению гипотезы парности касательных напряжений, скорости распространения волн искажения в классике и в рассматриваемой теории совпадают. Соотношение (25) может служить основанием для постановки экспериментального определения «третьего коэффициента Ламе». В случае, если эксперимент даст значение $\chi = 0$, он станет экспериментальным подтверждением гипотезы парности.

3. W-волны. Пусть в (21) вектор перемещений будет иметь только одну компоненту, направленную параллельно оси OZ: $R_i = W(x,z)Z_i$. Тогда остается единственное уравнение движения, которое определяет первый тип поперечной поверхностной волны, связанной с давлением Лапласа:

$$(\mu+\chi)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \tag{26}$$

с соответствующим граничным условием на плоской поверхности полубесконечной среды:

$$(2\mu+\lambda)\frac{\partial W}{\partial z} - \delta^F \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \tag{27}$$

При $\delta^F = 0$ не существует нетривиального решения краевой задачи (26)-(27), описывающего поперечную поверхностную волну. При $\delta^F \neq 0$ нетривиальное решение существует:

$$W = W_a e^{-2\pi a_W \frac{z}{l_W}} Sin\frac{2\pi}{l_W}(x - c_W t)$$

Здесь l_W - длина волны, $a_W = 2\pi\frac{\delta^F}{(2\mu+\lambda)l_W}$ - безразмерный параметр затухания волны по глубине, $c_W = \sqrt{c_2^2 - c_1^2 a_W^2}$ - скорость движения фронта волны.

Будем называть такую волну W-волной.

Если в эксперименте удастся реализовать W-волну, измеряя длину волны и скорость движения ее фронта, можно вычислить постоянную Лапласа для поверхности данной среды:

$$\delta^F = (2\mu+\lambda)l_W \frac{\sqrt{c_2^2 - c_W^2}}{2\pi c_1} \tag{28}$$

Здесь следует отметить, что в соответствии с (28) длина волны W-волны является единственной для выбранной среды:

$$l_W = \frac{2\pi c_1}{\sqrt{c_2^2 - c_W^2}}\frac{\delta^F}{(2\mu+\lambda)} \tag{29}$$

Действительно, правая часть соотношения (29) определена только механическими характеристиками среды – плотностью ρ, адгезионным модулем δ^F и коэффициентами Ламе μ, λ, χ. То же самое можно утверждать и относительно частоты/периода колебаний W-волны:

$$\omega_W = \frac{2\pi}{l_W} c_W \tag{30}$$

Соотношение (30) дает теоретическое объяснение явлению капиллярной ряби [] на поверхности жидкости как резонансному образованию стоячей W-волны на частоте ω_W.

4. V-волны. Пусть в (21) вектор перемещений будет иметь только одну компоненту, направленную параллельно поверхности полупространства: $R_i = V(x,z)Y_i$. Тогда остается единственное уравнение движения, которое определяет второй тип поперечной поверхностной волны:

$$(\mu+\chi)(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}) - \rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \tag{31}$$

с соответствующим граничным условием на плоской поверхности полубесконечной среды:

$$(\mu+\chi)\frac{\partial V}{\partial z}=(\mu^F+\chi^F)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \tag{32}$$

При $(\mu^F+\chi^F)=0$ не существует нетривиального решения краевой задачи (31)-(32), описывающего поперечную поверхностную волну. При $(\mu^F+\chi^F)\neq 0$ нетривиальное решение существует:

$$V=V_a e^{-2\pi a_V \frac{z}{l_V}} Sin\frac{2\pi}{l_V}(x-c_V t)$$

Здесь l_V - длина волны, $a_V=2\pi\frac{(\mu^F+\chi^F)}{(\mu+\chi)l_V}$ - безразмерный параметр затухания волны по глубине, $c_V=c_2\sqrt{(1-a_V^2)}$ - скорость движения фронта волны.

Будем называть такую волну V-волной.

Если в эксперименте удастся реализовать V-волну, измеряя длину волны и скорость движения ее фронта, можно вычислить адгезионный модуль $(\mu^F+\chi^F)$ для поверхности данной среды:

$$(\mu^F+\chi^F)=(\mu+\chi)l_V\frac{\sqrt{c_2^2-c_V^2}}{2\pi c_2} \tag{33}$$

Рассуждения о единственности для длины волны и частоты V-волны, вытекающие из соотношения (33), аналогичны изложенным выше рассуждениям для W-волны и соотношения (28):

Длина волны V-волны является единственной для выбранной среды:

$$l_V=\frac{2\pi c_2}{\sqrt{c_2^2-c_V^2}}\frac{(\mu^F+\chi^F)}{(\mu+\chi)} \tag{34}$$

Частота/период колебаний V-волны:

$$\omega_V=\frac{2\pi}{l_V}c_V \tag{35}$$

Очевидно, что для V-волны должен существовать резонансный эффект, аналогичный эффекту капиллярной ряби для W-волны.

5. U-волны. Пусть в (21) вектор перемещений будет иметь только одну компоненту, направленную параллельно поверхности полупространства: $R_i=U(x,z)X_i$. Тогда остается единственное уравнение движения, которое определяет чистую продольную поверхностную волну:

$$(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+(\mu+\chi)\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0 \tag{36}$$

с соответствующим граничным условием на плоской поверхности полубесконечной среды:

$$(\mu+\chi)\frac{\partial U}{\partial z}=(\mu^F+\chi^F)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \tag{37}$$

При $(\mu^F+\chi^F)=0$ не существует нетривиального решения краевой задачи (36)-(37) для продольной поверхностной волны. При $(\mu^F+\chi^F)\neq 0$ нетривиальное решение существует:

$$U=U_a e^{-2\pi a_U \frac{z}{l_U}} Sin\frac{2\pi}{l_U}(x-c_U t)$$

Здесь l_U - длина волны, $a_U=2\pi\frac{(\mu^F+\chi^F)}{(\mu+\chi)l_U}$ - безразмерный параметр затухания волны по глубине, $c_U=\sqrt{c_1^2-c_2^2a_U^2}$ - скорость движения фронта волны.

Будем называть такую волну U-волной.

Если в эксперименте удастся реализовать U-волну, измеряя длину волны и скорость движения ее фронта, можно вычислить адгезионный модуль $(\mu^F+\chi^F)$ для поверхности данной среды:

$$(\mu^F+\chi^F)=(\mu+\chi)l_U\frac{\sqrt{c_1^2-c_U^2}}{2\pi c_2} \tag{38}$$

Рассуждения о единственности для длины волны и частоты U-волны, вытекающие из соотношения (38), аналогичны изложенным выше рассуждениям для W-волны и соотношения (28):

Длина волны U-волны является единственной для выбранной среды:

$$l_U=\frac{2\pi c_2}{\sqrt{c_1^2-c_U^2}}\frac{(\mu^F+\chi^F)}{(\mu+\chi)} \tag{39}$$

Частота/период колебаний U-волны:

$$\omega_U=\frac{2\pi}{l_U}c_U \tag{40}$$

Очевидно, что для U-волны должен существовать резонансный эффект, аналогичный эффекту капиллярной ряби для W-волны.

6. θ-волны. Пусть в (21) вектор перемещений будет иметь только две компоненты, лежащие в плоскости, параллельной поверхности полупространства: $R_i=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\delta_{ij}-Z_iZ_j)$. Тогда уравнения движения могут быть записаны только относительно изменения объема $\theta=\frac{\partial R_i}{\partial x_i}=(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2})=\theta(x,z,t)$:

$$(2\mu+\lambda)(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2})-\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0 \tag{41}$$

с соответствующим «разделенным» первым граничным условием (12) на плоской поверхности полубесконечной среды:

$$(\mu+\chi)\frac{\partial\theta}{\partial z}=(2\mu^F+\lambda^F)\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \tag{42}$$

При $(2\mu^F+\lambda^F)=0$ не существует нетривиального решения краевой задачи (41)-(42) для поверхностной волны расширения. При $(2\mu^F+\lambda^F)\neq 0$ нетривиальное решение существует:

$$\theta=\theta_a e^{-2\pi a_\theta\frac{z}{l_\theta}}Sin\frac{2\pi}{l_\theta}(x-c_\theta t)$$

Здесь l_θ - длина волны, $a_\theta=2\pi\frac{(2\mu^F+\lambda^F)}{(\mu+\chi)l_\theta}$ - безразмерный параметр затухания волны по глубине, $c_\theta=c_1\sqrt{1-a_\theta^2}$ - скорость движения фронта волны.

Будем называть такую волну θ-волной.

Если в эксперименте удастся реализовать θ-волну, измеряя длину волны и скорость движения ее фронта, можно вычислить адгезионный модуль $(2\mu^F+\lambda^F)$ для поверхности данной среды:

$$(2\mu^F+\lambda^F)=(\mu+\chi)l_\theta\frac{\sqrt{c_1^2-c_\theta^2}}{2\pi c_1} \tag{43}$$

Рассуждения о единственности для длины волны и частоты θ-волны, вытекающие из соотношения (43), аналогичны изложенным выше рассуждениям для W-волны и соотношения (28):

Длина волны θ-волны является единственной для выбранной среды:

$$l_\theta = \frac{2\pi c_1}{\sqrt{c_1^2 - c_\theta^2}} \frac{(2\mu^F + \lambda^F)}{(\mu + \chi)} \qquad (44)$$

Частота/период колебаний θ-волны:

$$\omega_\theta = \frac{2\pi}{l_\theta} c_\theta \qquad (45)$$

Очевидно, что для θ-волны должен существовать резонансный эффект, аналогичный эффекту капиллярной ряби для W-волны.

7. ω-волны. Пусть в (21) вектор перемещений будет иметь только две компоненты, лежащие в плоскости, параллельной поверхности полупространства: $R_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_m} Z_n Э_{nmi}$. Тогда уравнения движения могут быть записаны только относительно проекции псевдовектора поворотов на ось OZ $\omega = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} Э_{ijk} Z_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_m} Z_n Z_k Э_{nmi} Э_{ijk} = (\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}) = \omega(x,z,t)$:

$$(\mu + \chi)(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}) - \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0 \qquad (46)$$

с соответствующим «разделенным» первым граничным условием (12) на плоской поверхности полубесконечной среды:

$$(\mu + \chi)\frac{\partial \omega}{\partial z} = (\mu^F + \chi^F)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \qquad (47)$$

При $(\mu^F + \chi^F) = 0$ не существует нетривиального решения краевой задачи (46)-(47) для поверхностной волны расширения. При $(\mu^F + \chi^F) \neq 0$ нетривиальное решение существует:

$$\theta = \theta_a e^{-2\pi a_\omega \frac{z}{l_\omega}} Sin\frac{2\pi}{l_\omega}(x - c_\omega t)$$

Здесь l_ω - длина волны, $a_\omega = 2\pi \frac{(\mu^F + \chi^F)}{(\mu + \chi) l_\omega}$ - безразмерный параметр затухания волны по глубине, $c_\omega = c_2\sqrt{1 - a_\omega^2}$ - скорость движения фронта волны.

Будем называть такую волну ω-волной.

Если в эксперименте удастся реализовать ω-волну, измеряя длину волны и скорость движения ее фронта, можно вычислить адгезионный модуль $(\mu^F + \chi^F)$ для поверхности данной среды:

$$(\mu^F + \chi^F) = (\mu + \chi) l_\omega \frac{\sqrt{c_2^2 - c_\omega^2}}{2\pi c_2} \qquad (48)$$

Рассуждения о единственности для длины волны и частоты ω-волны, вытекающие из соотношения (48), аналогичны изложенным выше рассуждениям для W-волны и соотношения (28):

Длина волны ω-волны является единственной для выбранной среды:

$$l_\omega = \frac{2\pi c_2}{\sqrt{c_2^2 - c_\omega^2}} \frac{(\mu^F + \chi^F)}{(\mu + \chi)} \qquad (44)$$

Частота/период колебаний ω-волны:

$$\omega_\omega = \frac{2\pi}{l_\omega} c_\omega \qquad (45)$$

Очевидно, что для ω-волны должен существовать резонансный эффект, аналогичный эффекту капиллярной ряби для W-волны.

Итак, получены решения, описывающие пять типов поверхностных волн, свойства которых обусловлены адгезионными свойствами поверхности.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Образцов И.Ф., Белов П.А., Елпатьевский А.Н. «Об общем подходе к формулировке линейных сред различной гладкости», 1988, ДАН, т. 303, 6.
2. Лурье С.А., Белов П.А. «Математические модели механики сплошной среды и физических полей», 2000, ВЦ РАН, М.
3. Lurie S.A., Belov P.A. Volkov-Bogorodsky «Multiscale Modeling in the Mechanics of Materials: Cohesion, Interfacial Interactions, Inclusions and Defects», 2003, in book “Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics”, Analysis and Simulation of Multifield Problems, vol. 12, Springer.
4. Белов П.А., Бодунов А.М., Лурье С.А., Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г. «О моделировании масштабных эффектов в тонких структурах»,
«Механика композиционных материалов и конструкций», 2002 г., том 8, №4.
5. Белов П.А., Лурье С.А. «Общая теория дефектов сплошных сред»,
«Механика композиционных материалов и конструкций», 2003 г., том 9, №4.
6. Гохштейн «Поверхностные явления в твердых телах».
7. Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А., Волков-Богородский Д.Б., Яновский Ю.Г., Кочемасова Е.И., Дудченко А.А., Потупчик Е.М., Шумова Н.П. «Основы теории межфазного слоя», «Механика композиционных материалов и конструкций», 2004, том 10, №4.