ISSN 0025-6544, Mechanics of Solids, 2008, Vol. 43, No. 4, pp. 545–557. © Allerton Press, Inc., 2008.
Original Russian Text © P.A. Belov, S.A. Lurie, 2008, published in Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela, 2008, No. 4, pp. 25–41.

Theory of 4D-Media with Stationary Dislocations

P. A. Belov* and S. A. Lurie**

Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, GSP-1, V-334, Leninskii pr-t 32A, Moscow, 117334 Russia

Received March 12, 2008

Abstract—In earlier studies, the authors showed that an application of classical methods of mechanics of deformable media to the study of properties of 4D-space-time continuum permit stating consistent models of nonholonomic media mechanics consistent with the first and second laws of thermodynamics. In the present paper, we show that the classical methods of continuum mechanics are also promising when modeling physical processes. It is shown that, just as in the three-dimensional theory of stationary dislocations, there exist dislocations of three types for a generalized 4D-medium. They correspond to the decomposition of the free distortion tensor into a spherical tensor, a deviator tensor, and a pseudotensor of rotations. We interpret several particular models, thus showing that the proposed model describes the spectrum of known physical interactions: electromagnetic, strong, weak, and gravitational. We show that the resolving equations include the Maxwell equations of electrodynamics and the Yukawa equations for strong interactions as subsystems.

DOI: 10.3103/S0025654408040043

1. INTRODUCTION

In the present paper, we use methods of continuum mechanics to model the properties of the space-time continuum as a 4D-continuum with defects. We consider a model of a medium with a stationary dislocation field, which can be treated as a version of Mindlin's model [1] of a medium with a microstructure. The recent paper [2] presents an example of application of methods of continuum mechanics in 4D, where, to model irreversible processes, one uses a generalized 4D-model of a classical medium that is isotropic in 3D and transversally isotropic with respect to the time coordinate. In [3–5], the general relativity equations are used to construct a geometric theory of elasticity efficient for solving optimization problems for loaded structures. This shows the prospects of taking into account direct analogies between physical processes and deformation processes in continuous media. A version of a mechanical theory of physical fields was analyzed in [6]. In the present paper, we construct a 4D-model of a reversible isotropic physically linear medium with a stationary dislocation field. We present the system of constitutive relations, give a consistent statement of the boundary value problem, and analyze the physical aspects of the model. We also consider several specific models.

To construct the mathematical model and state the corresponding boundary value problem, we use the "kinematic" variational principle developed in [7–10]. The algorithm for constructing the continuum model can be realized in the following steps.

1°. The kinematic constraints of the medium (the kinematic model) are stated.

2°. The kinematic constraints are used to construct the virtual work of internal forces, so that the spectrum of internal forces is determined by the Lagrange multipliers on which the kinematic constraints are imposed.

3°. Integration by parts is used to find the linear variational form for the virtual work of internal forces. The list of arguments is determined.

4°. The integrability conditions for the linear variational form, i.e., the conditions for the existence of potential energy, are written out.

*E-mail: pbelov@yandex.ru
**E-mail: lurie@ccas.ru

ТЕОРИЯ 4D СРЕД С СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ.

П.А. Белов, С.А. Лурье

Аннотация. *В опубликованных ранее исследованиях авторов было установлено, что приложение классических методов механики деформируемых сред к исследованию свойств четырехмерного пространственно-временного континуума позволило сформулировать непротиворечивые модели механики неголономных сред, находящиеся в согласии с первым и вторым законами термодинамики. В данной работе показано, что классические методы механики сплошных сред являются перспективными и для моделирования физических процессов. В статье приводится вариационная постановка линейно-упругой модели 4D-среды с полем сохраняющихся дислокаций. Сформулированы кинематические связи, вариационным путем построены определяющие соотношения, записана полная система уравнений и граничных условий. Показано, что так же, как и в трехмерной теории сохраняющихся дислокаций, для обобщенной 4D-среды с полем сохраняющихся дислокаций имеет место три типа дислокаций. Они соответствуют разложению тензора свободной дисторсии на шаровой тензор, тензор девиатор и псевдотензор поворотов. Построены частные модели сред для каждого из трех типов дислокаций. Даны трактовки частных моделей, показывающие, что предлагаемая модель описывает спектр известных физических взаимодействий: электромагнитных, сильных, слабых и гравитационных. Установлено, что разрешающие уравнения в целом непротиворечивы и включают в качестве подсистем уравнения Максвелла для электродинамики и уравнения Юкавы для сильных взаимодействий.*

Введение. Настоящая работа посвящена приложению методов механики сплошной среды к моделированию свойств пространственно-временного континуума как дефектной сплошной 4D-среды. Рассматривается модель среды с полем сохраняющихся дислокаций, которая может трактоваться и как вариант модели среды с микроструктурой Миндлина [1]. В недавней работе [2] дан пример приложения методов механики сплошных сред в 4D, где для моделирования необратимых процессов была рассмотрена обобщенная 4D модель классической среды с линейным законом Гука, изотропной в 3D и трансверсально-изотропной в отношении временной координаты. В статьях [3-5] уравнения общей теории относительности привлекаются для построения геометрической теории упругости, оказавшейся эффективной для решения задач оптимизации нагруженных конструкций. Эти исследования показывают перспективность учета прямых аналогий между физическими процессами и процессами деформирования сплошных сред. Вариант механистической теории физических полей анализировался в статье [6]. В данной работе будет построена 4D модель обратимой, изотропной, физически - линейной среды с полем сохраняющихся дислокаций. Определяется кинематическая модель среды, устанавливается система определяющих соотношений и формулируется согласованная постановка краевой задачи. Значительное внимание уделяется анализу физической стороны модели. Даются математические постановки частных моделей.

Для построения математической модели и формулировки соответствующей краевой задачи используется «кинематический» вариационный принцип, развитый в работах [7-10]. В соответствии с ним по заданным кинематическим связям находится вид функционала энергии для исследуемой среды и устанавливаются силовые взаимодействия, соответствующие введенным кинематическим связям. Алгоритм построения модели сплошной среды сводится к следующим шагам:

1. Формулируются свойственные среде кинематические связи – кинематическая модель.
2. По кинематическим связям строится возможная работа внутренних сил, причем спектр внутренних сил определяется множителями Лагранжа, на которых вводятся кинематические связи.
3. С помощью интегрирования по частям находится линейная вариационная форма для возможной работы внутренних сил. Определяется список аргументов.

4. Записываются условия интегрируемости линейной вариационной формы, т.е. условия существования потенциальной энергии.
5. В предположении физической линейности из условий интегрируемости линейной вариационной формы устанавливается общий вид определяющих соотношений модели.
6. Строится потенциальная энергия, лагранжиан, вычисляется его вариация.

В результате дается полная математическая формулировка моделей, т.е. определяется вариационное уравнение, включающее уравнения равновесия и весь спектр граничных условий. Таким образом, «кинематический» вариационный принцип дает возможность для каждой кинематической модели среды построить единственную обратимую линейно-упругую физическую модель. Поэтому особое место при построении физических моделей сред уделяется анализу кинематических соотношений и построению кинематической модели.

1. Геометрическая модель. Приведем сначала соотношения, определяющие замкнутую геометрическую трехмерную модель сред с сохраняющимися дислокациями. Эти соотношения являются основой для построения полной вариационной формулировки модели среды с сохраняющимися дислокациями и ряда прикладных континуальных моделей сред, учитывающих масштабные эффекты [7,8,11].

Считаем, что имеют место расширенные соотношения Коши для компонентов тензора дисторсии [7,8,11]:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = d_{ij} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k Э_{ijk} . \qquad (1.1)$$

Здесь по повторяющимся индексам осуществляется свертка; R_i - вектор перемещений; d_{ij} - тензор дисторсии; $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$ – компоненты тензора девиатора деформаций; $\theta = \frac{\partial R_k}{\partial x_k}$ – объемная деформация; $\omega_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}Э_{ijk}$ – вектор поворотов или упругих вращений; $Э_{ijk}$ – компоненты тензора Леви-Чивиты.

Соотношения (1.1) определяют кинематические связи между двенадцатью зависимыми степенями свободы γ_{ij}, θ, ω_k и R_i, которыми наделен произвольно выбранный бесконечно малый параллелепипед. Условия интегрируемости соотношений (1.1) можно представить в виде

$$(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\ \delta_{in} - \omega_k Э_{ink})_{,m}\ Э_{nmj} = 0 . \qquad (1.2)$$

Положим, что для рассматриваемого здесь случая не выполняются условия интегрируемости перемещений, иначе говоря, соотношения (1.2) являются неоднородными:

$$(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\ \delta_{in} - \omega_k Э_{ink})_{,m}\ Э_{nmj} = \Xi_{ij} . \qquad (1.3)$$

Непрерывный тензор "несовместностей" Ξ_{ij} перемещений является тензором плотности дислокаций [12] и подчиняется дифференциальному закону сохранения: $\frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_j} = 0$.

Решение неоднородных уравнений (1.3) представляется в виде суммы решения однородного уравнения: d^0_{ij} ($d^0{}_{in} = \gamma^0{}_{in} + \frac{1}{3}\theta^0\delta_{in} - \omega^0{}_k Э_{ink}$) и частного решения неоднородных уравнений (1.3) d^{Ξ}_{ij}: $d_{ij} = d^0_{ij} + d^{\Xi}_{ij}$. Очевидно, что наряду с d^{Ξ}_{ij} можно рассмотреть как независимые «обобщенные перемещения» следующие величины: γ^{Ξ}_{ij}, ω^{Ξ}_k, θ^{Ξ} $\left(d^{\Xi}_{ij} = \gamma^{\Xi}_{in} + \frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{in} - \omega^{\Xi}_k Э_{ink}\right)$. Эти «обобщенные перемещения» связаны со своей «обобщенной деформацией» – тензором "несовместностей" Ξ_{ij} (аналог соотношений Коши):

$$(\gamma^{\Xi}_{in}+\frac{1}{3}\theta^{\Xi}\delta_{in}-\omega^{\Xi}_{k}Э_{ink})_{,m}\,Э_{nmj}=\Xi_{ij}\,. \tag{1.4}$$

Пользуясь терминологией среды Коссера [12], $\omega^{0}_{k}=-\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}Э_{ijk}$ называют стесненным вращением, а ω^{Ξ}_{k} – свободным вращением или спином. Аналогично будем называть γ^{0}_{ij} и θ^{0} – стесненными деформациями, а γ^{Ξ}_{ij} и θ^{Ξ} – свободным деформациями.

Таким образом, естественным образом вводятся следующие составляющие свободной дисторсии: $\gamma-$дислокации - γ^{Ξ}_{ij}; $\theta-$дислокации - θ^{Ξ} и, соответственно, $\omega-$дислокации - величины ω^{Ξ}_{k}. Такая кинематическая модель среды использовались для построения корректных физических моделей, учитывающих когезионные взаимодействия и связанные с ними масштабные эффекты [10].

Теперь запишем аналогичные соотношения, являющиеся обобщением рассмотренной геометрической модели на случай 4D пространства с четвертой временной координатой. Расширенные соотношения Коши для тензора стесненной дисторсии d^{0}_{ij} имеют вид:

$$d^{0}_{ij}=\frac{\partial R_i}{\partial x_j}=\gamma^{0}_{ij}+\frac{1}{4}\theta^{0}\delta_{ij}-\frac{1}{2}\omega^{0}_{pq}Э_{ijpq}\,, \tag{1.5}$$

где $\gamma^{0}_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}-\frac{1}{4}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$, $\theta^{0}=\frac{\partial R_k}{\partial x_k}$, $\omega^{0}_{pq}=-\frac{1}{2}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{nmpq}$, δ_{ij} - тензор Кронекера, $Э_{ijnm}$ - Леви-Чивиты в 4D.

Соотношения (1.5) определяют кинематические связи между двадцатью независимыми степенями свободы γ_{ij}, θ, ω_{pq} и R_i.

В точном соответствии с трехмерным случаем вводится определение тензора плотности дислокаций и соответствующих тензоров плотностей для трех указанных типов дислокаций:

$$\frac{\partial d^{\Xi}_{in}}{\partial x_m}Э_{nmjk}=\frac{\partial}{\partial x_m}(\gamma^{\Xi}_{in}+\frac{1}{4}\theta^{\Xi}\delta_{in}-\frac{1}{2}\omega^{\Xi}_{pq}Э_{pqin})Э_{nmjk}=\Xi_{ijk}\neq 0 \tag{1.6}$$

$$\Xi_{ijk}=\Xi^{\gamma}_{ijk}+\Xi^{\theta}_{ijk}+\Xi^{\omega}_{ijk}\,,\quad \Xi^{\gamma}_{ijk}=\frac{\partial\gamma^{\Xi}_{in}}{\partial x_m}Э_{nmjk}\,,\quad \Xi^{\theta}_{ijk}=-\frac{1}{4}\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial x_m}Э_{mijk}\,,\quad \Xi^{\omega}_{ijk}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\omega^{\Xi}_{pq}}{\partial x_m}Э_{pqin}Э_{mjkn}\,.$$

Псевдотензоры третьего ранга $\Xi^{\gamma}_{ijk},\Xi^{\theta}_{ijk}$ и Ξ^{ω}_{ijk} являются источниками соответственно трех типов дислокаций: γ - дислокаций, θ-дислокаций и ω-дислокаций. Отметим, что тензоры плотности дислокаций в силу определения обладают свойством антисимметричности при перестановке последних двух индексов.

$$J^{1}_{p}=\Xi_{ijk}(\delta_{ij}\delta_{kp}-\delta_{ik}\delta_{jp})$$

$$J^{2}_{p}=\Xi_{ijk}Э_{ijkp}$$

$$\Xi_{ijk}=\frac{1}{6}J^{1}_{q}(\delta_{ij}\delta_{kq}-\delta_{ik}\delta_{jq})+\frac{1}{6}J^{2}_{q}Э_{ijkq}=\frac{1}{6}J^{1}_{q}Э_{iqrs}Э_{jkrs}+\frac{1}{6}J^{2}_{q}Э_{ijkq}$$

Тензор полной дисторсии записывается здесь как сумма стесненной d^{0}_{ij} и свободной d^{Ξ}_{ij} дисторсий:

$$d_{ij}=\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+d^{\Xi}_{ij}=\gamma_{ij}+\frac{1}{4}\theta\delta_{ij}-\frac{1}{2}\omega_{nm}Э_{nmij}, \tag{1.7}$$

где $d^{\Xi}_{ij}=\gamma^{\Xi}_{ij}+\frac{1}{4}\theta^{\Xi}\delta_{ij}-\frac{1}{2}\omega^{\Xi}_{pq}Э_{ijpq}$ и $\gamma^{\Xi}_{ij}=\frac{1}{2}d^{\Xi}_{ij}+\frac{1}{2}d^{\Xi}_{ji}-\frac{1}{4}d^{\Xi}_{kk}\delta_{ij}$, $\theta^{\Xi}=d^{\Xi}_{kk}$, $\omega^{\Xi}_{pq}=-\frac{1}{2}d^{\Xi}_{nm}Э_{nmpq}$.

Компоненты разложения полной дисторсии на тензор девиатор, шаровой тензор и антисимметричный псевдотензор поворотов представляются в виде суммы:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}d_{ij} + \frac{1}{2}d_{ji} - \frac{1}{4}d_{kk}\delta_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i} - \frac{1}{4}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \gamma_{ij}^{\Xi} = \gamma_{ij}^{0} + \gamma_{ij}^{\Xi}$$

$$\theta = d_{ij}\delta_{ij} = \frac{\partial R_k}{\partial x_k} + d_{kk} = \theta^0 + \theta^{\Xi} \tag{1.8}$$

$$\omega_{nm} = -\frac{1}{2}d_{ij}\mathit{Э}_{nmij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\mathit{Э}_{nmij} - \frac{1}{2}d_{ij}^{\Xi}\mathit{Э}_{nmij} = \omega_{nm}^0 + \omega_{nm}^{\Xi}$$

Дефектное поле перемещений d_i представляет собой суперпозицию двух полей (1.7), (1.8) - непрерывного поля перемещений R_i и поля разрывов перемещений R_i^{Ξ} (дислокаций):

$$d_i = \int_{M_0}^{M_x} d_{ij}dy_j = \int_{M_0}^{M_x} (\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + d_{ij}^{\Xi})dy_j = R_i + \int_{M_0}^{M_x} d_{ij}^{\Xi}dy_j = R_i + R_i^{\Xi}$$

$$R_i^{\Xi} = \int_{M_0}^{M_x} (\gamma_{ij}^{\Xi} + \frac{1}{4}\theta^{\Xi}\delta_{ij} + \omega_{pq}^{\Xi}\mathit{Э}_{pqij})dy_j = \int_{M_0}^{M_x} \gamma_{ij}^{\Xi}dy_j + \frac{1}{4}\int_{M_0}^{M_x} \theta^{\Xi}dy_i + \int_{M_0}^{M_x} \omega_{nm}^{\Xi}dy_j\mathit{Э}_{nmij} = R_i^{\gamma} + R_i^{\theta} + R_i^{\omega}$$

Таким образом, определяется три типа дислокаций [7,8,11] в 4D: R_i^{γ}, R_i^{θ}, R_i^{ω}.

2. Вариационная формулировка модели. В работах [8-10] сформулирован "кинематический" вариационный принцип построения моделей сред. Алгоритм построения моделей среды в соответствии с этим принципом изложен во введении. Для сред с сохраняющимися дислокациями в качестве кинематической модели среды выбраны неоднородные уравнения для свободной дисторсии (1.6) и однородные уравнения (1.6) для стесненной дисторсии. Однородные уравнения (1.6) для стесненной дисторсии могут быть проинтегрированы в общем виде. Их решением являются несимметричные соотношения Коши (1.5). Таким образом, для случая четырехмерного пространственно-временного континуума кинематическими связями являются обобщенные на 4D несимметричные соотношения Коши (1.5) и неоднородные уравнения (1.6). Возможную работу внутренних сил следует представить в виде:

$$\overline{\delta U} = \iiiint [\sigma_{ij}\delta(d_{ij}^0 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) + m_{ijk}\delta(\Xi_{ijk} - \frac{\partial d_{in}^{\Xi}}{\partial x_m}\mathit{Э}_{nmjk})]dV\,. \tag{2.1}$$

Здесь $\overline{\delta U}$ - возможная работа, в общем случае - линейная форма вариаций своих аргументов, не обязательно интегрируемая (для сред с диссипацией); σ_{ij} и m_{ijk} - тензоры множителей Лагранжа, которые имеют физический смысл реактивных силовых факторов, обеспечивающих выполнение соответствующих кинематических связей.

Представим $\overline{\delta U}$ в (2.1) как линейную форму вариаций своих аргументов. Используя интегрирование по частям в слагаемых, содержащих производные, получим:

$$\begin{gathered}\overline{\delta U} = \iiiint [\sigma_{ij}\delta d_{ij}^0 + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta R_i + m_{ijk}\delta\Xi_{ijk} + \frac{\partial m_{ijk}}{\partial x_m}\mathit{Э}_{nmjk}\delta d_{in}^{\Xi}]dV + \\ + \oiiint [-\sigma_{ij}n_j\delta R_i - m_{ijk}n_m\mathit{Э}_{nmjk}\delta d_{is}^{\Xi}(\delta_{sn} - n_s n_n)]dF\end{gathered} \tag{2.2}$$

Ограничимся рассмотрением сред без диссипации энергии (модели сред с диссипацией рассматривались в [2]). Тогда существует такой потенциал U (потенциальная энергия), что возможная работа $\overline{\delta U}$ в (2.2) является вариацией этого потенциала: $\overline{\delta U} = \delta U$,

$$U = \iiiint U_V dV + \oiiint U_F dF\,,\; U_V = U_V(d_{ij}^0; d_{ij}^{\Xi}; \Xi_{ijk}; R_i)\,,\; U_F = U_F(d_{is}^{\Xi}(\delta_{sj} - n_s n_j); R_i)\,.$$

В дальнейшем исключим из списков аргументов для плотностей потенциальной энергии вектор перемещений. При этом мы воспользуемся аналогией с трехмерными моделями среды, в которых вектор перемещений исключается из списков аргументов для плотностей потенциальной энергии, чтобы не противоречить известным экспериментальным данным о существовании, например, однородных напряженных состояний. В результате получаем:

$$U = \iiiint U_V dV + \oiiint U_F dF\,,\ U_V = U_V(d^0_{ij}; d^\Xi_{ij}; \Xi_{ijk})\,,\ U_F = U_F(d^\Xi_{is}(\delta_{sj} - n_s n_j)) \tag{2.3}$$

Учитывая список аргументов в (2.3) и вычисляя вариацию δU в объёме, с очевидностью получим:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial d^0_{ij}},\quad m_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial \Xi_{ijk}},\quad p_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial d^\Xi_{ij}},\qquad M_{ij} = \frac{\partial U_F}{\partial d^\Xi_{is}(\delta_{sj} - n_s n_j)} \tag{2.4}$$

Формулы (2.4) следует трактовать как обобщенные формулы Грина для объемных и поверхностных силовых факторов. Эти соотношения позволяют записать лагранжиан и найти соответствующие уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned}\delta L = \iiiint [(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + P^{4D}_i)\delta R_i + (\frac{\partial m^\Xi_{ijk}}{\partial x_m} Э_{nmjk} - p_{in})\delta d^\Xi_{in}]dV + \\ + \oiiint [(P^F_i - \sigma_{ij} n_j)\delta R_i - (M_{in} + m_{ijk} n_m Э_{nmjk})\delta d^\Xi_{is}(\delta_{sn} - n_s n_n)]dF = 0\end{aligned} \tag{2.5}$$

здесь P^{4D}_i, P^F_i заданные плотности внешних сил в 4D объеме и на гиперповерхности F.

Легко видеть, что имеет место аналогия с вариационной постановкой обобщенной модели сред с микроструктурами [1] и фактически полное совпадение с вариационной формулировкой модели сред с сохраняющимися дислокациями [11].

В дальнейшем будем полагать, что рассматривается модель физического поля, в которой внешние воздействия отсутствуют $P^{4D}_i = P^F_i = 0$, а полная формулировка модели фактически определяет задачу на собственные значения. Так же, в целях упрощения, будем полагать, что 4D-среда, ограниченная гиперповерхностью F не обладает адгезионными свойствами $U_F = 0$.

3. Плотность потенциальной энергии. Плотность потенциальной энергии для физически линейных сред U_V определяется как квадратичная форма своих аргументов:

$$\begin{aligned}2U_V = 2U_V(d^0_{ij}; d^\Xi_{ij}; \Xi_{ij}; R_i) = \\ = C^{11}_{ijnm} d^0_{ij} d^0_{nm} + 2C^{12}_{ijnm} d^0_{ij} d^\Xi_{nm} + C^{22}_{ijnm} d^\Xi_{ij} d^\Xi_{nm} + C_{ijknml} \Xi_{ijk} \Xi_{nml}\end{aligned} \tag{3.1}$$

Первые три слагаемых в записанном выражении (3.1) полностью совпадают по виду с соответствующими выражениями, полученными ранее при трехмерном описании сред с полями дефектов [7,8]. Они описывают взаимное возмущение классического поля перемещений и чисто дислокационных состояний когда $C^{12}_{ijnm} \neq 0$. Структура тензоров модулей упругости C^{pq}_{ijnm}, ($p,q = 1,2$) в (3.1) определяется их разложением по изотропным тензорам четвертого ранга, построенным как произведение пары тензоров Кронекера со всеми возможными перестановками индексов:

$$
\begin{aligned}
&C^{pq}_{ijnm}=[\lambda^{pq}\delta_{ij}\delta_{nm}+(\mu^{pq}+\chi^{pq})\delta_{in}\delta_{jm}+(\mu^{pq}-\chi^{pq})\delta_{im}\delta_{jn}]\\
&C^{pq}_{ijnm}\delta_{ij}=(2\mu^{pq}+4\lambda^{pq})\delta_{nm}\\
&C^{pq}_{ijnm}Э_{ijab}=2\chi^{pq}Э_{nmab}\\
&\frac{1}{2}C^{pq}_{ijnm}+\frac{1}{2}C^{pq}_{jinm}-\frac{1}{4}C^{pq}_{kknm}\delta_{ij}=\\
&=\frac{1}{2}[\lambda^{pq}\delta_{ij}\delta_{nm}+(\mu^{pq}+\chi^{pq})\delta_{in}\delta_{jm}+(\mu^{pq}-\chi^{pq})\delta_{im}\delta_{jn}]+\quad,\quad(p,q=1,2)\\
&+\frac{1}{2}[\lambda^{pq}\delta_{ij}\delta_{nm}+(\mu^{pq}+\chi^{pq})\delta_{im}\delta_{jn}+(\mu^{pq}-\chi^{pq})\delta_{in}\delta_{jm}]-\\
&-\frac{1}{4}(2\mu^{pq}+4\lambda^{pq})\delta_{nm}\delta_{ij}=\\
&=2\mu^{pq}(\frac{1}{2}\delta_{in}\delta_{jm}+\frac{1}{2}\delta_{im}\delta_{jn}-\frac{1}{4}\delta_{nm}\delta_{ij})
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Объёмная плотность потенциальной энергии, связанная с псевдотензором-источником дислокаций $C_{ijknml}\Xi_{ijk}\Xi_{nml}$ определяет быстроменяющуюся, локальную часть потенциальной энергии дислокаций.

Сделаем замечание о свойствах тензора $Э_{ijab}$ в 4D пространстве, которые будут учитываться в дальнейшем при анализе структуры потенциальной энергии и структуры фундаментальных решений. Из определения тензора Леви-Чивиты $Э_{ijab}$ вытекают его следующие свойства:

$$
\begin{aligned}
&Э_{ijnm}Э_{ijnm}=Э_{ijnm}Э_{pjnm}\delta_{ip}=24,\quad Э_{ijnm}Э_{pjnm}=Э_{ijnm}Э_{pqnm}\delta_{jq}=6\delta_{ip},\\
&Э_{ijnm}Э_{pqnm}=Э_{ijnm}Э_{pqrm}\delta_{nr}=2(\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}),\\
&Э_{ijnm}Э_{pqrm}=Э_{ijnm}Э_{pqrs}\delta_{ms}=\delta_{ip}(\delta_{jq}\delta_{nr}-\delta_{jr}\delta_{nq})-\delta_{iq}(\delta_{jp}\delta_{nr}-\delta_{jr}\delta_{np})+\delta_{ir}(\delta_{jp}\delta_{nq}-\delta_{jq}\delta_{np})
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Рассмотрим плотность потенциальной энергии, соответствующую плотности дислокаций для физически линейной теории $U_{\Xi}=\frac{1}{2}C_{ijknml}\Xi_{ijk}\Xi_{nml}$. Во-первых, отметим, что из условий существования потенциальной энергии сразу следует условие симметрии тензора модулей плотности дислокаций C_{ijknml} по тройкам индексов: $C_{ijknml}=C_{nmlijk}$. Во-вторых, в силу (1.6) тензор C_{ijknml} должен дополнительно обладать антисимметричными свойствами: $C_{ijknml}=-C_{ikjnml}$ и $C_{ijknml}=-C_{ijknlm}$.

Исследуем структуру тензора модулей C_{ijknml}, разлагая его по базису единичных изотропных тензоров, образованных произведениями троек тензоров Кронекера со всеми возможными перестановками индексов:

$$
\begin{aligned}
C_{ijknml}=&C_1\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml}+C_2\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl}+C_3\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{nm}+C_4\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml}+C_5\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl}+C_6\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{nm}+\\
&+C_7\delta_{in}\delta_{jk}\delta_{ml}+C_8\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}+C_9\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}+C_{10}\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl}+C_{11}\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}+C_{12}\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}+\\
&+C_{13}\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{nm}+C_{14}\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}+C_{15}\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}
\end{aligned}
$$

Будем называть для простоты индексы i,j,k - левыми индексами, а индексы n,m,l - правыми. Обратим внимание на то, что все базисные тензоры в C_{ijknml} разделяются на две группы. К первой группе базисных тензоров будем относить те, в которые входят тензоры Кронекера, имеющие оба левых индекса или оба правых индекса:

$$
\begin{aligned}
C^{I}_{ijknml}=&C_1\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml}+C_2\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl}+C_3\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{nm}+C_4\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml}+C_5\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl}+C_6\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{nm}+\\
&+C_7\delta_{in}\delta_{jk}\delta_{ml}+C_{10}\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl}+C_{13}\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{nm}
\end{aligned}
$$

Ко второй группе базисных тензоров будем относить те, в которые входят тензоры Кронекера, каждый из которых имеет один левый и один правый индекс:

$$C^{II}_{ijknml}=C_8\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}+C_9\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}+C_{11}\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}+C_{12}\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}+C_{14}\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}+C_{15}\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}$$

Рассмотрим первую группу базисных тензоров и учтем их установленные общие свойства симметрии при перестановке индексов. Получим $C_7=C_{10}=C_{13}=C_1=C_4=0$ и $C_6=-C_3=C_2$. Таким образом, тензор $C^I_{ijknml}=C_2(\delta_{ij}\delta_{kp}-\delta_{ik}\delta_{jp})(\delta_{nm}\delta_{lp}-\delta_{nl}\delta_{mp})$ имеет структуру свертки по одному индексу суммирования двух одинаковых тензоров четвертого ранга, причем свободные индексы первого тензора являются левыми, а свободные индексы второго – правыми. Только такая специфическая структура C^I_{ijknml} дает возможность соответствующую часть потенциальной энергии дислокаций U^I_Ξ: представить в виде квадрата модуля некоторого вектора $J^1_p=\Xi_{ijk}(\delta_{ij}\delta_{kp}-\delta_{ik}\delta_{jp})$:

$$\begin{aligned}U^I_\Xi&=\frac{1}{2}C^I_{ijknml}\Xi_{ijk}\Xi_{nml}=\frac{1}{2}C_2(\delta_{ij}\delta_{kp}-\delta_{ik}\delta_{jp})(\delta_{nm}\delta_{lp}-\delta_{nl}\delta_{mp})\Xi_{ijk}\Xi_{nml}=\\&=\frac{1}{2}C_2[\Xi_{ijk}(\delta_{ij}\delta_{kp}-\delta_{ik}\delta_{jp})][\Xi_{nml}(\delta_{nm}\delta_{lp}-\delta_{nl}\delta_{mp})]=\frac{1}{2}C_2J^1_pJ^1_p\end{aligned}\tag{3.4}$$

Проведем анализ свойств базисных тензоров второй группы. Они должны удовлетворять тем же условиям симметрии, что и базисные тензоры первой группы. Из этих свойств следует $C_8=-C_9=-C_{11}=C_{12}=C_{14}=-C_{15}$. В результате, с учетом (3.3), имеем:

$$\begin{aligned}C^{II}_{ijknml}&=C_8(\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}+\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}+\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}-\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn})=\\&=C_8[\delta_{in}(\delta_{jm}\delta_{kl}-\delta_{jl}\delta_{km})-\delta_{im}(\delta_{jn}\delta_{kl}-\delta_{jl}\delta_{kn})+\delta_{il}(\delta_{jn}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kn})]=C_8Э_{ijkp}Э_{nmlp}\end{aligned}$$

Таким образом, тензор $C^{II}_{ijknml}=C_8Э_{ijkp}Э_{nmlp}$, в отличие от C^I_{ijknml}, имеет структуру свертки двух псевдотензоров четвертого ранга. При этом так же, как и для C^I_{ijknml}, имеет место разделение левых и правых индексов. В результате потенциальную энергию U^{II}_Ξ также можно упростить и представить в форме энергии некоторого 4D-тока $J^2_p=\Xi_{ijk}Э_{ijkp}$:

$$U^{II}_\Xi=\frac{1}{2}C^{II}_{ijknml}\Xi_{ijk}\Xi_{nml}=\frac{1}{2}C_8(Э_{ijkp}\Xi_{ijk})(Э_{nmlp}\Xi_{nml})=\frac{1}{2}C_8J^2_pJ^2_p\tag{3.5}$$

Окончательно, с учетом (3.4), (3.5), выражение потенциальной энергии плотности дислокаций для физически линейной теории приобретает следующий простой вид:

$$U_\Xi=\frac{1}{2}C_2J^1_pJ^1_p+\frac{1}{2}C_8J^2_pJ^2_p\tag{3.6}$$

Отметим свойства токов J^1_p и J^2_p. Ток J^1_p является псевдовектором. Действительно, имеем

$$J^1_p=\Xi_{ijk}(\delta_{ij}\delta_{kp}-\delta_{ik}\delta_{jp})=\frac{\partial d^\Xi_{in}}{\partial x_m}Э_{nmjk}(\delta_{ij}\delta_{kp}-\delta_{ik}\delta_{jp})=2\frac{\partial d^\Xi_{in}}{\partial x_m}Э_{inmp}=4\frac{\partial\omega^\Xi_{pm}}{\partial x_m},\tag{3.7}$$

Следовательно, ток J^1_p обладает свойством соленоидальности: $\frac{\partial J^1_p}{\partial x_p}\equiv 0$. Ток J^2_p в общем случае свойством соленоидальности не обладает ($\frac{\partial J^2_p}{\partial x_p}\neq 0$). Действительно, с учетом (1.7) он имеет вид:

$$J^2_p=\Xi_{ijk}Э_{ijkp}=\frac{\partial d^\Xi_{in}}{\partial x_m}Э_{nmjk}Э_{ijkp}=\frac{\partial d^\Xi_{in}}{\partial x_m}2(\delta_{ni}\delta_{mp}-\delta_{np}\delta_{mi})=-2\frac{\partial\gamma^\Xi_{ip}}{\partial x_i}+\frac{3}{2}\frac{\partial\theta^\Xi}{\partial x_p}+\frac{\partial\omega^\Xi_{nm}}{\partial x_i}Э_{nmip}\tag{3.8}$$

Ток J^2_p является истинным вектором, ибо определяется через свертку двух псевдотензоров (3.8).

4. Вариационное уравнение. Таким образом, для дефектных сред с полями сохраняющихся дислокаций в пространственно-временном континууме сформулирована потенциальная энергия (3.1), (3.6). Запишем соответствующий лагранжиан:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiiint \{C^{11}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - C^{12}_{ijnm}(\frac{\partial R_n}{\partial x_m}d^{\Xi}_{ij} + d^{\Xi}_{nm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}) + C^{22}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm}d^{\Xi}_{ij} + C_1 J^1_p J^1_p + C_2 J^2_p J^2_p\}dV$$

$$J^1_p = 2\frac{\partial d^{\Xi}_{in}}{\partial x_m}Э_{inmp}$$

$$J^2_p = \frac{\partial d^{\Xi}_{in}}{\partial x_m}Э_{nmjk}Э_{ijkp}$$

$$\delta L = -\iiiint \{[C^{11}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} - C^{12}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm}]\delta\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + [-C^{12}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C^{22}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm}]\delta d^{\Xi}_{ij} + C_1 J^1_p \delta J^1_p + C_2 J^2_p \delta J^2_p\}dV =$$

$$= \iiiint \{[C^{11}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} - C^{12}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm}]\delta\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + [-C^{12}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C^{22}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm}]\delta d^{\Xi}_{ij} + [2C_1 J^1_p Э_{ijkp} + C_2 J^2_p Э_{jkqr}Э_{ipqr}]\delta\frac{\partial d^{\Xi}_{ij}}{\partial x_k}\}dV$$

(4.1)

Здесь модули C_2, C_8 переименованы на C_1, C_2. Систему разрешающих уравнений и граничные условия получим так же, как и при описании трехмерных моделей механики. В данном случае вариационное уравнение записывается в виде:

$$\delta L = \iiiint \{[C^{11}_{ijnm}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} - C^{12}_{ijnm}\frac{\partial d^{\Xi}_{nm}}{\partial x_j}]\delta R_i + [C^{12}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} - C^{22}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm} + 2C_1\frac{\partial J^1_p}{\partial x_k}Э_{ijkp} - C_2\frac{\partial J^2_p}{\partial x_k}Э_{jkqr}Э_{piqr}]\delta d^{\Xi}_{ij}\}dV +$$

$$+ \oiiint \{[-C^{11}_{ijnm}n_j\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C^{12}_{ijnm}n_j d^{\Xi}_{nm}]\delta R_i + \oiiint \{[-2C_1 J^1_p Э_{ijkp} + C_2 J^2_p Э_{jkqr}Э_{piqr}]n_k \delta d^{\Xi}_{is}(\delta_{sj} - n_s n_j)\}dF = 0 \quad (4.2)$$

Вариационное уравнение (4.2) дает полную математическую постановку для рассматриваемой модели среды, т.е. позволяет записать и разрешающие уравнения теории 4D-сред с сохраняющимися дислокациями, и соответствующий спектр граничных условий. Запишем систему разрешающих уравнений модели. Из (4.2) найдем уравнения равновесия сил:

$$C^{11}_{ijnm}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} - C^{12}_{ijnm}\frac{\partial d^{\Xi}_{nm}}{\partial x_j} = 0 \quad (4.3)$$

уравнения равновесия моментов:

$$-C^{12}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C^{22}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm} - 2C_1\frac{\partial J^1_p}{\partial x_k}Э_{ijkp} + C_2\frac{\partial J^2_p}{\partial x_k}Э_{jkqr}Э_{piqr} = 0 \quad (4.4)$$

Учитывая соотношения (3.7),(3.8), определяющие токи, уравнения равновесия моментов (4.4) также как и уравнения равновесия сил можно переписать через кинематические переменные R_n, d^{Ξ}_{nm}:

$$-C^{12}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C^{22}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm} - 4C_1[\frac{\partial^2 d^{\Xi}_{ij}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{\partial^2 d^{\Xi}_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 d^{\Xi}_{ji}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 d^{\Xi}_{jk}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 d^{\Xi}_{ki}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 d^{\Xi}_{kj}}{\partial x_k \partial x_i}] +$$

$$+ 2C_2[\frac{\partial^2 d^{\Xi}_{nn}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 d^{\Xi}_{nj}}{\partial x_i \partial x_n} - (\frac{\partial^2 d^{\Xi}_{nn}}{\partial x_m \partial x_m} - \frac{\partial^2 d^{\Xi}_{nm}}{\partial x_n \partial x_m})\delta_{ij}] = 0$$

Таким образом, разрешающие уравнения теории представлены в форме уравнений механики дефектной 4D-среды с сохраняющимися дислокациями.

5. Структура решения и масштабные эффекты. Построим общее решение системы уравнений (4.3),(4.4). Система уравнений равновесия моментов (4.4) может быть разрешена в явном виде. Действительно, используя последовательно свертку уравнений (4.4) с дельтой Кронекера δ_{ij}, тензором Леви-Чивиты Э_{ijab}, применяя операцию симметрирования по свободным индексам, и учитывая (3.3), из уравнений равновесия моментов найдем:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&C^{pq}_{ijnm}\delta_{ij} = (2\mu^{pq} + 4\lambda^{pq})\delta_{nm} \\
&-C^{12}_{ijnm}\delta_{ij}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C^{22}_{ijnm}\delta_{ij}d^{\Xi}_{nm} - 2C_1\frac{\partial J^1_p}{\partial x_k}\delta_{ij}\text{Э}_{ijkp} + C_2\frac{\partial J^2_p}{\partial x_k}\delta_{ij}\text{Э}_{jkqr}\text{Э}_{piqr} = 0 \\
&-(2\mu^{12} + 4\lambda^{12})\frac{\partial R_k}{\partial x_k} + (2\mu^{22} + 4\lambda^{22})d^{\Xi}_{kk} + C_2\frac{\partial J^2_p}{\partial x_k}\text{Э}_{jkqr}\text{Э}_{pjqr} = 0 \\
&\theta^{\Xi} = \frac{(2\mu^{12} + 4\lambda^{12})}{(2\mu^{22} + 4\lambda^{22})}\frac{\partial R_k}{\partial x_k} + 6\frac{C_2}{(2\mu^{22} + 4\lambda^{22})}\frac{\partial J^2_k}{\partial x_k}
\end{aligned}
}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&C^{pq}_{ijnm}\text{Э}_{ijab} = 2\chi^{pq}\text{Э}_{nmab} \\
&-2\chi^{12}\text{Э}_{nmab}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + 2\chi^{22}\text{Э}_{nmab}d^{\Xi}_{nm} - 4C_1\left(\frac{\partial J^1_b}{\partial x_a} - \frac{\partial J^1_a}{\partial x_b}\right) + 2C_2\frac{\partial J^2_p}{\partial x_k}\text{Э}_{kpab} = 0 \\
&4\chi^{12}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\text{Э}_{nmab}\right) - 4\chi^{22}\left(-\frac{1}{2}d^{\Xi}_{nm}\text{Э}_{nmab}\right) - 4C_1\left(\frac{\partial J^1_b}{\partial x_a} - \frac{\partial J^1_a}{\partial x_b}\right) + 4C_2\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial J^2_n}{\partial x_m}\text{Э}_{nmab}\right) = 0 \\
&\omega^{\Xi}_{ab} = \frac{\chi^{12}}{\chi^{22}}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\text{Э}_{nmab}\right) - \frac{C_1}{\chi^{22}}\left(\frac{\partial J^1_b}{\partial x_a} - \frac{\partial J^1_a}{\partial x_b}\right) + \frac{C_2}{\chi^{22}}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial J^2_n}{\partial x_m}\text{Э}_{nmab}\right)
\end{aligned}
}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}C^{pq}_{ijnm} + \frac{1}{2}C^{pq}_{jinm} - \frac{1}{4}C^{pq}_{kknm}\delta_{ij} = 2\mu^{pq}\left(\frac{1}{2}\delta_{in}\delta_{jm} + \frac{1}{2}\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{1}{4}\delta_{nm}\delta_{ij}\right) \\
&-C^{12}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C^{22}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm} - 2C_1\frac{\partial J^1_p}{\partial x_k}\text{Э}_{ijkp} + 2C_2\frac{\partial J^2_p}{\partial x_k}(\delta_{jp}\delta_{ki} - \delta_{ji}\delta_{kp}) = 0 \\
&\gamma^{\Xi}_{ij} = \frac{\mu^{12}}{\mu^{22}}\left(\frac{1}{2}\delta_{in}\delta_{jm} + \frac{1}{2}\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{1}{4}\delta_{nm}\delta_{ij}\right)\frac{\partial R_n}{\partial x_m} - \frac{C_2}{\mu^{22}}\frac{\partial J^2_n}{\partial x_m}\left(\frac{1}{2}\delta_{in}\delta_{jm} + \frac{1}{2}\delta_{im}\delta_{jn} - \frac{1}{4}\delta_{nm}\delta_{ij}\right)
\end{aligned}
}
$$

$$
\begin{aligned}
&\theta^{\Xi} = \frac{(\mu^{12} + 2\lambda^{12})}{(\mu^{22} + 2\lambda^{22})}\frac{\partial R_j}{\partial x_j} + \frac{3C_2}{(\mu^{22} + 2\lambda^{22})}\frac{\partial J^2_j}{\partial x_j} \\
&\omega^{\Xi}_{ab} = \frac{\chi^{12}}{\chi^{22}}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\text{Э}_{nmab}\right) + \frac{C_2}{\chi^{22}}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial J^2_n}{\partial x_m}\text{Э}_{nmab}\right) + \frac{C_1}{\chi^{22}}\left(\frac{\partial J^1_a}{\partial x_b} - \frac{\partial J^1_b}{\partial x_a}\right) \qquad (5.1) \\
&\gamma^{\Xi}_{ij} = \frac{\mu^{12}}{\mu^{22}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i} - \frac{1}{4}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) - \frac{C_2}{\mu^{22}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial J^2_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial J^2_j}{\partial x_i} - \frac{1}{4}\frac{\partial J^2_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)
\end{aligned}
$$

$$\theta^{\Xi}=\frac{(\mu^{12}+2\lambda^{12})}{(\mu^{22}+2\lambda^{22})}\frac{\partial R_j}{\partial x_j}+\frac{3C_2}{(\mu^{22}+2\lambda^{22})}\frac{\partial J_j^2}{\partial x_j}$$

$$\omega_{ab}^{\Xi}=\frac{\chi^{12}}{\chi^{22}}(-\frac{1}{2}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{nmab})+\frac{C_2}{\chi^{22}}(-\frac{1}{2}\frac{\partial J_n^2}{\partial x_m}Э_{nmab})+\frac{C_1}{\chi^{22}}(\frac{\partial J_a^1}{\partial x_b}-\frac{\partial J_b^1}{\partial x_a})$$

$$\gamma_{ij}^{\Xi}=\frac{\mu^{12}}{\mu^{22}}(\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}-\frac{1}{4}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij})-\frac{C_2}{\mu^{22}}(\frac{1}{2}\frac{\partial J_i^2}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial J_j^2}{\partial x_i}-\frac{1}{4}\frac{\partial J_k^2}{\partial x_k}\delta_{ij})=$$

$$=(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i}-\frac{1}{4}\frac{\partial \gamma_k}{\partial x_k}\delta_{ij})\quad\Rightarrow\quad \gamma_i=\frac{\mu^{12}}{\mu^{22}}R_i-\frac{C_2}{\mu^{22}}J_i^2$$

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}=\frac{\mu^{12}}{\mu^{22}}\frac{\partial R_i}{\partial x_i}-\frac{C_2}{\mu^{22}}\frac{\partial J_i^2}{\partial x_i}$$

Подставив полученные соотношения в уравнение, определяющее псевдовектор тока J_p^1 (3.7), найдем, что псевдовектор J_p^1 удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$J_a^1=4\frac{\partial \omega_{ab}^{\Xi}}{\partial x_b}=4\frac{C_1}{\chi^{22}}\frac{\partial^2 J_a^1}{\partial x_b\partial x_b}\ \text{ или }\ l_3^2\frac{\partial^2 J_a^1}{\partial x_b\partial x_b}-J_a^1=0,\quad l_3^2=4\frac{C_1}{\chi^{22}}. \tag{5.2}$$

Соотношения (5.1) позволяют записать тензоры напряжений (напряженности) и тензоры моментов через векторы перемещений и токов. Для этого достаточно воспользоваться формулами Грина (2.4), исключить в них свободные деформации с помощью соотношений (5.1) и учесть соотношения (3.2). Например, тензор напряжений в общем случае принимает следующий вид:

$$\sigma_{ij}=C_{ijnm}^{11}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}-C_{ijnm}^{12}d_{nm}^{\Xi}=$$

$$=[\frac{1}{2}(\mu^{11}+2\lambda^{11}-\frac{(\mu^{12}+2\lambda^{12})(\mu^{12}+2\lambda^{12})}{(\mu^{22}+2\lambda^{22})})\frac{\partial R_k}{\partial x_k}-C_2\frac{3}{2}\frac{(\mu^{12}+2\lambda^{12})}{(\mu^{22}+2\lambda^{22})}\frac{\partial J_k^2}{\partial x_k}]\delta_{ij}+$$

$$+[2(\mu^{11}-\frac{\mu^{12}\mu^{12}}{\mu^{22}})(\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}-\frac{1}{4}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij})+2C_2\frac{\mu^{12}}{\mu^{22}}(\frac{1}{2}\frac{\partial J_i^2}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial J_j^2}{\partial x_i}-\frac{1}{4}\frac{\partial J_k^2}{\partial x_k}\delta_{ij})]+$$

$$+[(\chi^{11}-\frac{\chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}})(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}-\frac{\partial R_j}{\partial x_i})+2C_1\frac{\chi^{12}}{\chi^{22}}\frac{\partial J_a^1}{\partial x_b}Э_{abij}-C_2\frac{\chi^{12}}{\chi^{22}}(\frac{\partial J_i^2}{\partial x_j}-\frac{\partial J_j^2}{\partial x_i})]$$

Чтобы установить структуру фундаментальных решений разрешающих уравнений, поступим следующим образом. Перепишем уравнения равновесия сил (4.3) ($\sigma_{ij},_j=0$) и уравнение, определяющее токи J_i^2 (3.8) в симметрично-сопряженной форме:

$$G(\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j\partial x_j}-\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i\partial x_j})+E\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i\partial x_j}+C_2a(\frac{\partial^2 J_i^2}{\partial x_j\partial x_j}-\frac{\partial^2 J_j^2}{\partial x_j\partial x_i})+C_2b\frac{\partial^2 J_j^2}{\partial x_i\partial x_j}+P_i^{4D}=0 \tag{5.3}$$

$$C_2A^{-1}(\frac{\partial^2 J_i^2}{\partial x_j\partial x_j}-\frac{\partial^2 J_j^2}{\partial x_i\partial x_j})+C_2B^{-1}\frac{\partial^2 J_j^2}{\partial x_i\partial x_j}-J_i^2=a(\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j\partial x_j}-\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i\partial x_j})+b\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i\partial x_j}$$

где

$$G=(\mu^{11}-\frac{\mu^{12}\mu^{12}}{\mu^{22}}+\chi^{11}-\frac{\chi^{12}\chi^{12}}{\chi^{22}}),\ E=(2\mu^{11}-\frac{3}{2}\frac{\mu^{12}\mu^{12}}{\mu^{22}}+\lambda^{11}-\frac{(\mu^{12}+2\lambda^{12})(\mu^{12}+2\lambda^{12})}{2(\mu^{22}+2\lambda^{22})}),$$

$$a=(\frac{\mu^{12}}{\mu^{22}}-\frac{\chi^{12}}{\chi^{22}}),\ b=\frac{3}{2}(\frac{\mu^{12}}{\mu^{22}}-\frac{(\mu^{12}+2\lambda^{12})}{(\mu^{22}+2\lambda^{22})}),\ A^{-1}=(\frac{1}{\mu^{22}}+\frac{1}{\chi^{22}})\ ,\ B^{-1}=\frac{3}{2}[\frac{1}{\mu^{22}}+\frac{3}{(\mu^{22}+2\lambda^{22})}].$$

Сведем систему уравнений (5.3) к одному операторному векторному уравнению и представим его в форме произведения операторов Лапласа и Гельмгольца. Для этого сначала введем вектор потенциал ψ_i такой, чтобы выраженные через него вектор перемещений R_i и ток J_i^2 тождественно удовлетворяли второму из уравнений (5.3).

$$R_i = -C_2 A^{-1}(\Delta\psi_i - \frac{\partial^2\psi_j}{\partial x_i \partial x_j}) - C_2 B^{-1}\frac{\partial^2\psi_j}{\partial x_i \partial x_j} + \psi_i,\; J_i^2 = -a(\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial^2\psi_j}{\partial x_i \partial x_j}) - b\frac{\partial^2\psi_j}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad (5.4)$$

Затем введем вектор фундаментальных решений φ_i

$$\psi_i = (\Delta\varphi_i - \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_j}) + \frac{G}{E}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_j} - l_1^2\Delta(\Delta\varphi_i - \frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_j}) - \frac{G}{E}l_2^2\Delta\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_j}. \qquad (5.5)$$

В результате вместо (5.3) получим одно операторное уравнение относительно φ_i:

$$[\Delta(...)][\Delta(...)][l_1^2\Delta(...) - (...)][l_2^2\Delta(...) - (...)]\varphi_i + P_i^{4D} = 0 \qquad (5.6)$$

где $l_1^2 = C_2\dfrac{(EB^{-1} + bb)}{E}$, $\quad l_2^2 = C_2\dfrac{(GA^{-1} + aa)}{G}$

Общее решение уравнения (5.6) представляется в форме разложения φ_i по системе фундаментальных решений: гармонического вектор-потенциала φ_i^1, ($\Delta\varphi_i^1 = 0$), бигармонического вектор-потенциала φ_i^2 $(\Delta\Delta\varphi_i^2 = 0)$ и двух вектор-потенциалов f_i^1, f_i^2, удовлетворяющих уравнениям Гельмгольца $[l_k^2\Delta(f_i^k) - f_i^k] = 0, \quad k = 1,2; \quad i = 1,4$:

$$\varphi_i = \varphi_i^1 + \varphi_i^2 + f_i^1 + f_i^2 \qquad (5.7)$$

Таким образом, для вектора перемещений R_i и вектора токов J_i^2 построено общее решение в форме Папковича-Нейбера.

$$\begin{aligned} R_i &= \tilde{\varphi}_i^1 + \tilde{\varphi}_i^2 + \tilde{f}_i^1 + \tilde{f}_i^2 \\ J_i^2 &= \hat{\varphi}_i^1 + \hat{\varphi}_i^2 + \hat{f}_i^1 + \hat{f}_i^2 \end{aligned} \qquad (5.8)$$

где $\tilde{\varphi}_i^{1,2} = L_R L_\psi(\varphi_i^{1,2}),\; \tilde{f}_i^{1,2} = L_R L_\psi(f_i^{1,2}),\; \hat{\varphi}_i^{1,2} = L_J L_\psi(\varphi_i^{1,2}),\; \hat{f}_i^{1,2} = L_J L_\psi(f_i^{1,2}),$

$$L_R(...) = \{-C_2 A^{-1}[\Delta(...) - grad\, div(...)] - C_2 B^{-1} grad\, div(...) + (...)\};$$

$$L_J(...) = -a[\Delta(...) - grad\, div(...)] - b\; grad\, div(...)$$

$$L_\psi = [\Delta(...) - grad\, div(...)][(...) - l_1^2\Delta(...)] + \frac{G}{E} grad\, div(...)[(...) - l_2^2\Delta(...)].$$

$$\Delta(\tilde{\varphi}_i^1) = 0,\; \Delta(\hat{\varphi}_i^1) = 0,\; \Delta\Delta(\tilde{\varphi}_i^2) = 0,\; \Delta\Delta(\hat{\varphi}_i^2) = 0,\; [l_k^2\Delta(\tilde{f}_i^k) - \tilde{f}_i^k] = 0,\; [l_k^2\Delta(\hat{f}_i^k) - \hat{f}_i^k] = 0,\; k = 1,2.$$

Разложения (5.8) определяют специальную структуру решений для теории 4D-сред с сохраняющимися дислокациями. Гармонические и бигармонические составляющие решения определяют «глобальные», медленно меняющиеся решения, характерные для полей излучения. Составляющие решения, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца, определяют локальные поля, и их можно определить как изолированную частицу, со свойственной ей внутренней пространственно-временной структурой. При этом параметры l_1, l_2 и l_3 в операторах Гельмгольца (5.2) и (5.6), характеризующие протяженность локальных эффектов, определяют эту структуру.

6. Модель θ-дислокаций. Рассмотрим частный случай теории 4D-сред с сохраняющимися дислокациями – теорию сред с θ-дислокациями. В работах [7,8], на основе геометрической модели: $\omega_k^\Xi = 0$, $\gamma_{ij}^\Xi = 0$, $\theta^\Xi \neq 0$, получена теория такой среды для трехмерного тела, установлена вариационная математическая модель. В данной работе вариант теории θ-дислокаций также строится как частный случай теории сред с сохраняющимися дислокациями в 4D пространстве на основе аналогичной кинематической модели: $\omega_{ij}^{\Xi} = 0$, $\gamma_{ij}^{\Xi} = 0$, $\theta^{\Xi} \neq 0$. В этом случае тензор свободной дисторсии и тензор плотности дислокаций принимают вид:

$$d_{in}^{\Xi} = \frac{1}{4}\theta^{\Xi}\delta_{in}, \quad \Xi_{ijk} = \frac{\partial d_{in}^{\Xi}}{\partial x_m} Э_{nmjk} = \frac{1}{4}\frac{\partial \theta^{\Xi}}{\partial x_m} Э_{imjk}\,. \tag{6.1}$$

Для рассматриваемой модели, в соответствии с (3.7), (3.8), имеем следующие определения токов:

$$J_i^1 = 0, \quad J_i^2 = \frac{3}{2}\frac{\partial \theta^{\Xi}}{\partial x_i}. \tag{6.2}$$

В данном случае ток J_i^2 имеет скалярный потенциал и не имеет вихревой составляющей.

Будем рассматривать более частную модель среды, для которой, кинематика среды определяется и для стесненного тензора дисторсии только сферическим тензором. Дополнительно потребуем равенства нулю всех модулей, которые не связаны с θ-взаимодействиями, т.е. $\mu^{pq} = 0$ и $\chi^{pq} = 0$. Это необходимо для того, чтобы напряженности поля соотвествовали бы только θ-взаимодействиям. Физические свойства модели θ-взаимодействий определяются следующими тензорами модулей упругости $C_{ijnm}^{pq}\delta_{nm} = 4\lambda^{pq}\delta_{ij}$, а вариационное уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta L = \int_{4D} \{ (\lambda^{11}\frac{\partial^2 R_k}{\partial x_i \partial x_k} - \lambda^{12}\frac{\partial \theta^{\Xi}}{\partial x_i})\delta R_i + (\lambda^{12}\frac{\partial R_k}{\partial x_k} - \lambda^{22}\theta^{\Xi} + \frac{3}{2}C_2\frac{\partial J_k^2}{\partial x_k})\delta\theta^{\Xi} \} dV - \\ - \oiiint_{4D} \{ (\lambda^{11}\frac{\partial R_k}{\partial x_k} - \lambda^{12}\theta^{\Xi})\delta(R_i n_i) + \frac{3}{2}C_2 (J_i^2 n_i)\delta\theta^{\Xi} \} dF = 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Уравнения Эйлера в (6.3) дают уравнения равновесия сил и моментов и являются частным случаем уравнений (4.3), (4.4). Уравнение равновесия сил запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} = \frac{1}{4}\lambda^{12}\frac{\partial \theta^{\Xi}}{\partial x_i}, \qquad \text{где} \qquad \sigma_{ij}^0 = \frac{1}{4}\lambda^{11}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

Учитывая соотношение (6.2), последнее равенство переписывается в форме, аналогичной форме уравнений Ампера [13], которое в электродинамике связывает напряженности и токи:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} = \frac{1}{\varepsilon_\theta} J_i^2 \ \text{или}\ \frac{\partial \sigma^0}{\partial x_i} = \frac{1}{\varepsilon_\theta} J_i^2 \tag{6.4}$$

где $\dfrac{1}{\varepsilon_\theta} = \dfrac{1}{6}\lambda^{12}$, $\sigma^0 = \sigma_{ij}^0\delta_{ij} = \lambda^{11}\theta^0$, ε_θ - постоянная, аналогичная постоянной $\varepsilon_0 = \varepsilon_\omega$ - диэлектрической проницаемости вакуума электродинамики.

Рассматриваемая здесь модель взаимодействий определяется скаляром θ^{Ξ}, являющимся амплитудой сферической части тензора свободной дисторсии d_{ij}^{Ξ}. Такую модель следует, вероятно, связывать с моделированием сильных взаимодействий, так как именно сильные взаимодействия по Фейнману [13] имеют скалярный характер. Поэтому соотношения (6.4) следует понимать как уравнения Ампера для напряженностей «сильных» взаимодействий. Представленный вариант теории является замкнутым и позволяет определить ток J_i^2 в уравнении Ампера, используя уравнения равновесия моментов. Убедимся в этом и покажем одновременно, что в рамках данной теории ток «сильных» взаимодействий удовлетворяет уравнению Юкавы [13]. Исключим из уравнений равновесия моментов величину θ^0. Для этого выразим её из уравнений равновесия сил $\theta^0 = \dfrac{\lambda^{12}}{\lambda^{11}}(\theta^{\Xi} + Const)$ и исключим из уравнения равновесия моментов. Тогда для θ^{Ξ} с учетом (6.2) получим следующее уравнение Гельмгольца:

$$C_2 \frac{9\lambda^{11}}{4(\lambda^{11}\lambda^{22} - \lambda^{12}\lambda^{12})}\frac{\partial^2 \theta^{\Xi}}{\partial x_k \partial x_k} - \theta^{\Xi} = 0 \tag{6.5}$$

Величина θ^{Ξ}, определяющая «сильные» взаимодействия, удовлетворяет уравнению Гельмгольца (6.5). Оно и является уравнением Юкавы [13] с характерной длиной «сильных» взаимодействий $l_\theta^2 = C_2 \dfrac{9\lambda^{11}}{4(\lambda^{11}\lambda^{22} - \lambda^{12}\lambda^{12})}$. Дифференцируя (6.5) и учитывая (6.2) получим уравнение «сильных» токов:

$$l_\theta^2 \frac{\partial^2 J_i^2}{\partial x_k \partial x_k} - J_i^2 = 0 \tag{6.6}$$

Таким образом, показано, что представленная теория описывает как «сильные» взаимодействия (6.4), так и «сильные» токи (6.6). Для получения «уравнения Юкавы» для «сильных» токов не потребовалось вводить никаких дополнительных предположений, ибо оно следует непосредственно из уравнения равновесия моментов.

7**. Обобщенная модель сред Коссера.** Общая теория сред с сохраняющимися дислокациями в 3D позволяет получить в качестве частного случая полную вариационную постановку теории сред Коссера [7], в которой свободные деформации определяются только псевдовектором свободных поворотов: $\omega_k^{\Xi} \neq 0$, $\gamma_{ij}^{\Xi} = 0$, $\theta^{\Xi} = 0$. Построим теорию 4D-сред Коссера. В силу антисимметричности классической электродинамики можно полагать, что именно теория 4D-сред Коссера позволяет моделировать электромагнитные взаимодействия в рамках единого подхода. Кинематическая модель такой 4D-среды Коссера определяется равенствами: $\omega_{ij}^{\Xi} \neq 0$, $\gamma_{ij}^{\Xi} = 0$, $\theta^{\Xi} = 0$. В этом случае, в соответствии с равенствами (1.6)-(1.8),(3.7)(3.8) имеют место следующие равенства:

$$d_{ij}^{\Xi} = (-\frac{1}{2}\omega_{pq}^{\Xi}Э_{pqij}),\ \ \Xi_{ijk} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \omega_{pq}^{\Xi}}{\partial x_m}Э_{pqin}Э_{nmjk},\ J_i^1 = 6\frac{\partial \omega_{ik}^{\Xi}}{\partial x_k},\ \ J_i^2 = \frac{\partial \omega_{mn}^{\Xi}}{\partial x_k}Э_{mnki}. \tag{7.1}$$

Будем рассматривать частную модель 4D-среды, для которой, кинематика среды определяется только псевдовектором поворотов и для свободного тензора обобщенных деформаций (ω-дислокации) и для стесненного тензора обобщенных деформаций. Поскольку рассматривается модель антисимметричной среды в отношении и геометрической и физической стороны задачи дополнительно потребуем равенства нулю всех модулей, которые не связаны с ω-взаимодействиями, т.е. $\mu^{pq} = 0$ и $\lambda^{pq} = 0$. Физические свойства изучаемой модели определяются тогда следующими тензорами модулей упругости $C_{ijnm}^{pq} = \chi^{pq}(\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn})$. Нетрудно убедиться, что вариационное уравнение модели приобретает вид:

$$\begin{aligned}\delta L = \int_{4D} \{&[\chi^{11}(\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j}) - \chi^{12}\frac{\partial \omega_{mn}^{\Xi}}{\partial x_k}Э_{mnki}]\delta R_i - \\ &-[-\chi^{12}(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i}) - \chi^{22}\omega_{pq}^{\Xi}Э_{pqij} - 2C_1\frac{\partial J_p^1}{\partial x_k}Э_{ijkp} + 2C_2(\frac{\partial J_j^2}{\partial x_i} - \frac{\partial J_k^2}{\partial x_k}\delta_{ij})]\delta\omega_{ij}^{\Xi}\}dV + \\ &+ \oiiint_{4D}\{[\chi^{11}(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i})n_j - \chi^{12}\omega_{pq}^{\Xi}Э_{pqij}n_j]\delta R_i + \frac{1}{2}[2C_1 J_p^1 Э_{ijkp} - C_2 J_p^2 Э_{jkqr}Э_{piqr}]Э_{pqij}n_k\delta\omega_{pq}^{\Xi}\}dF = 0\end{aligned} \tag{7.2}$$

Уравнения Эйлера в (7.2) дают уравнения равновесия сил и моментов и являются частным случаем уравнений (4.3), (4.4). Запишем уравнение равновесия сил в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} = \chi^{12}\frac{\partial \omega_{mn}^{\Xi}}{\partial x_k}Э_{mnki}\ ,\qquad \text{где}\ \ \sigma_{ij}^0 = \chi^{11}(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i}) \tag{7.3}$$

Учтем (3.8) и перепишем уравнение равновесия сил (7.3) в форме уравнений Ампера [13]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} = \frac{1}{\varepsilon_0}J_i^2 \tag{7.4}$$

Уравнение (7.4) связывает напряженности и токи. Введем векторный потенциал для напряженностей $\sigma^0_{ij} = \sqrt{\chi^{11}}(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i})$ и перепишем уравнение (7.4) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{J_i^2}{\varepsilon_0 \sqrt{\chi^{11}}} \tag{7.5}$$

Вектор потенциал A_i входит во все соотношения только через вихревую часть и, поэтому определен с точностью до градиента произвольного скаляра. Этой неопределенностью в определении A_i можно воспользоваться, потребовав, чтобы выполнялось дополнительное скалярное равенство $div\, A_i = 0$, которое, по-существу, является калибровкой Лоренца []. Тогда соотношение (7.4) и (7.5) можно записать в форме уравнений Ампера классической электродинамики [], связывающих векторный потенциал напряженности и традиционный электрический ток j_i: $\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{1}{\varepsilon_0} j_i$, где $j_i = \frac{J_i^2}{\sqrt{\chi^{11}}}$.

Заметим, что уравнение на ток в рамках классической электродинамики не сформулировано, и ток задается произвольно. В возможности построения замкнутой теории можно увидеть различие между предлагаемой здесь моделью и классической электродинамикой. Действительно, предлагаемый вариант теории 4D-сред с несимметричным тензором напряжений является замкнутым. Он позволяет не только установить связь между напряжениями (напряженностями) и вектором J_i^2 (уравнения Ампера), но и найти уравнения для тока J_i^2. Учитывая уравнения равновесия моментов, равенства (5.1), (7.1), (7.3), получим:

$$2C_2 \frac{\chi^{11}}{(\chi^{11}\chi^{22} - \chi^{12}\chi^{12})} \frac{\partial^2 J_i^2}{\partial x_k \partial x_k} - J_i^2 = 0 \tag{7.6}$$

Аналогичное уравнение найдем для псевдо-вектора J_i^1 из уравнения равновесия моментов:

$$4C_1 \frac{\partial^2 J_i^1}{\partial x_j \partial x_j} - \chi^{22} J_i^1 = 0 \tag{7.7}$$

Уравнения (7.6), (7.7) указывают на локальную природу векторов тока J_i^2 и J_i^1. Отметим, что в данном варианте электромагнетизма появляются две, а не одна характерная длина взаимодействий:

$$l_3^2 = \frac{4C_1}{\chi^{22}}, \quad l_\omega^2 = 2C_2 \frac{\chi^{11}}{(\chi^{11}\chi^{22} - \chi^{12}\chi^{12})}$$

Записанное выше вариационное уравнение (7.2) и уравнения (7.3)-(7.6) соответствуют постановке задачи в перемещениях.

Рассмотрим постановку в напряжениях и покажем, что основные уравнения для рассматриваемой модели среды с полем ω-дислокаций в точности совпадают с уравнениями электродинамики Максвелла [13]. Введем следующие определения для векторов E_i и B_p

$$E_i = ic\sigma^0_{ij} N_j, \quad B_p = \frac{1}{2}\sigma^0_{ij} N_k Э_{ijpk} \tag{7.8}$$

Из (7.8) сразу следует, что вектора E_i и B_p не имеют проекций на временную координату, т.е. являются трехмерными объектами: $E_i N_i \equiv 0$, $B_p N_p = \frac{1}{2}\sigma^0_{ij} N_p N_k Э_{ijpk} \equiv 0$. Тензор напряжений σ^0_{ij} перепишем в форме разложения через вектора E_i и B_p:

$$\sigma^0_{ij} = -B_n N_m Э_{nmij} - \frac{i}{c}(E_i N_j - E_j N_i) \tag{7.9}$$

Разложим ток J_i^2 в правой части (7.4):

$$J_i^2 = I_j\left(\delta_{ij} - N_i N_j\right) + ic\rho N_i, \;\; \rho = -\frac{i}{c} J_i^2 N_i, \;\; I_i = J_j^2\left(\delta_{ij} - N_i N_j\right). \qquad (7.10)$$

Подставляя в уравнение равновесия (7.4) тензор σ_{ij}^0 с помощью разложения (7.9), и учитывая (7.10) получим:

$$\frac{i}{c}\left[\frac{\partial E_i}{\partial x_j}(\delta_{ij} - N_i N_j) - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right] N_r + \frac{1}{c^2}\left[c^2 \frac{\partial B_n}{\partial x_j} Э_{njim} N_m - \frac{\partial E_i}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_0} I_i\right]\left(\delta_{ir} - N_i N_r\right) = 0$$

Последнее уравнение в векторной форме приме традиционный вид для векторов напряженностей электрического $\overline{E}$ и магнитного $\overline{B}$ полей:

$$div\overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad c^2 rot\,\overline{B} - \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \frac{\overline{I}}{\varepsilon_0}. \qquad (7.11)$$

Аналогично, рассматривая уравнения совместности (уравнения Фарадея) $\frac{\partial \omega_{ij}^0}{\partial x_j} = 0$, и подставляя в них тензор σ_{ij}^0 с помощью разложения (7.9), найдем:

$$\left[\frac{\partial B_i}{\partial x_j}\left(\delta_{ij} - N_i N_j\right)\right] N_r + \frac{i}{2}\left[\frac{\partial B_i}{\partial t} - \frac{\partial E_m}{\partial x_n} Э_{mnik} N_k\right]\left(\delta_{ir} - N_i N_r\right) = 0 \qquad (7.12)$$

Последние соотношения нетрудно представить в векторной форме:

$$div\overline{B} = 0, \;\; \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + rot\overline{E} = 0 \qquad (7.13)$$

Совокупность уравнений (7.11) и (7.13) образуют полную систему уравнений Максвелла.

8. Модель γ-дислокаций Рассмотрим модель сред с γ-дислокациями, являющуюся частным случаем общей модели (4.2). В работе [7] теория сред с γ-дислокациями определяется как частная модель, в которой $\omega_k^{\Xi} = 0$, $\gamma_{ij}^{\Xi} \neq 0$, $\theta^{\Xi} = 0$. В 4D варианте теории с γ-дислокациями так же полагаем: $\omega_{ij}^{\Xi} = 0$, $\gamma_{ij}^{\Xi} \neq 0$, $\theta^{\Xi} = 0$. Будем рассматривать взаимодействия только γ-типа. Поэтому дополнительно положим $\chi^{pq} = 0$ и $\lambda^{pq} = -\frac{1}{2}\mu^{pq}$. Тогда напряжения будут определяться только девиаторами свободной и стесненной дисторсий. Ранее было показано, что модель θ-дислокаций определяет сильные взаимодействия, а антисимметричная модель ω-дислокаций соответствует электромагнитным взаимодействиям. Так как в теории физических полей известны только три типа взаимодействий, то будем соотносить модель γ-дислокаций со слабыми взаимодействиями. Для рассматриваемой модели из (1.6)-(1.8),(3.7)(3.8) имеем:

$$d_{in}^{\Xi} = \gamma_{in}^{\Xi}, \;\; \Xi_{ijk} = \frac{\partial d_{in}^{\Xi}}{\partial x_m} Э_{nmjk} = \frac{\partial \gamma_{in}^{\Xi}}{\partial x_m} Э_{nmjk}, \;\; J_i^1 = 0, \;\; J_p^2 = -2\frac{\partial \gamma_{pk}^{\Xi}}{\partial x_k}$$

Из определения токов следует, что в 4D теории γ-дислокаций ток J_i^2 содержит как вихревую, так и потенциальную части. Т.е. токи слабых взаимодействий J_i^2 с одной стороны индуцируются и сильными и электромагнитными полями, а с другой стороны порождают одновременно и сильные и электромагнитные поля. Полная вариационная модель γ-дислокаций имеет вид:

$$\delta L=\int\limits_{4D}\{[\mu^{11}(\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j\partial x_j}-\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i\partial x_j})+\frac{3}{2}\mu^{11}\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i\partial x_j}-2\mu^{12}\frac{\partial\gamma_{ij}^{\Xi}}{\partial x_j}+P_i^{4D}]\delta R_i+$$

$$+[2\mu^{12}(\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}-\frac{1}{4}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij})-2\mu^{22}\gamma_{ij}^{\Xi}-C_2(\frac{1}{2}\frac{\partial J_i^2}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial J_j^2}{\partial x_i}-\frac{1}{4}\frac{\partial J_k^2}{\partial x_k}\delta_{ij})]\delta\gamma_{ij}^{\Xi}\}dV+$$

$$+\oiiint\limits_{4D}\{[P_i^{3D}-2\mu^{11}(\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}-\frac{1}{4}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij})n_j+2\mu^{12}\gamma_{ij}^{\Xi}n_j]\delta R_i+C_2J_j^2n_i\delta\gamma_{ij}^{\Xi}\}dF=0$$

$$J_i^2=-2\frac{\partial\gamma_{ij}^{\Xi}}{\partial x_j}$$

Для данной модели нетрудно получить и «уравнения Ампера» и уравнение на токи.

$$\sigma_{ij}^0=2\mu^{11}(\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i}-\frac{1}{4}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij})\qquad \frac{\partial\sigma_{ij}^0}{\partial x_j}=-\frac{1}{\varepsilon_\gamma}J_i^2\qquad l_\gamma^2(\frac{\partial^2 J_i^2}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_j^2}{\partial x_i\partial x_j})-J_i^2=0$$

$$\frac{1}{\varepsilon_\gamma}=\mu^{12}\qquad l_\gamma^2=C_2\frac{\mu^{11}}{2(\mu^{11}\mu^{22}-\mu^{12}\mu^{12})}$$

Обратим внимание на то, что характерные длины взаимодействий частных теорий l_θ, l_ω и l_γ отличаются от характерных длин взаимодействий единой теории $l_1^2=C_2\dfrac{(EB^{-1}+bb)}{E}$, $l_2^2=C_2\dfrac{(GA^{-1}+aa)}{G}$ из-за гипотез частных теорий об отсутствии двух из трех возможных типов взаимодействий.

9. Физическая трактовка геометрии сред с полем дефектов. По найденным значениям свободной дисторсии (1.7), (1.8) и перемещениям найдем линейное приближение метрического тензора [14] в данной теории:

$$g_{ij}=(\delta_{ij}+\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\frac{\partial R_j}{\partial x_i})+(2\gamma_{ij}^{\Xi}+\frac{1}{2}\theta^{\Xi}\delta_{ij})=g_{ij}^0+g_{ij}^{\Xi},\tag{9.1}$$

$$g_{ij}^0=(\delta_{ij}+\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\frac{\partial R_j}{\partial x_i}),\ \ g_{ij}^{\Xi}=(2\gamma_{ij}^{\Xi}+\frac{1}{2}\theta^{\Xi}\delta_{ij})$$

Рассмотрим тензор Риччи $R_{ij}=\dfrac{\partial^2 g_{an}}{\partial x_b\partial x_m}Э_{abci}Э_{nmcj}$. Следуя А.Эйнштейну [14], гравитационное поле отсутствует, если тензор Риччи тождественно равен нулю. Пусть поле перемещений непрерывно $g_{ij}^{\Xi}=0$. Тогда в линейном приближении имеем:

$$g_{ij}=\delta_{ij}+\frac{\partial R_i}{\partial x_j}+\frac{\partial R_j}{\partial x_i}=g_{ij}^0\ ,$$

$$R_{ij}^0=(\frac{\partial^2 g_{nn}^0}{\partial x_m\partial x_m}-\frac{\partial^2 g_{nm}^0}{\partial x_n\partial x_m})\delta_{ij}-\frac{\partial^2 g_{kk}^0}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2 g_{ik}^0}{\partial x_j\partial x_k}+\frac{\partial^2 g_{jk}^0}{\partial x_i\partial x_k}-\frac{\partial^2 g_{ij}^0}{\partial x_k\partial x_k}=$$

$$=(2\frac{\partial^3 R_n}{\partial x_m\partial x_m\partial x_n}-(\frac{\partial^3 R_n}{\partial x_n\partial x_m\partial x_m}+\frac{\partial^3 R_m}{\partial x_n\partial x_m\partial x_n}))\delta_{ij}-$$

$$-2\frac{\partial^3 R_k}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}+(\frac{\partial^3 R_i}{\partial x_j\partial x_k\partial x_k}+\frac{\partial^3 R_k}{\partial x_j\partial x_k\partial x_i})+(\frac{\partial^3 R_j}{\partial x_i\partial x_k\partial x_k}+\frac{\partial^3 R_k}{\partial x_i\partial x_k\partial x_j})-(\frac{\partial^3 R_i}{\partial x_k\partial x_k\partial x_j}+\frac{\partial^3 R_j}{\partial x_k\partial x_k\partial x_i})\equiv 0.$$

Таким образом, прямым вычислением показано, что непрерывному полю перемещений соответствует случай отсутствия гравитационного поля.

Рассмотрим теперь определение метрического тензора для случая дефектной среды (9.1). Вычислим тензор Риччи в этом случае. Прямой подстановкой можно убедиться, что тензор Риччи отличен от нуля:

$$R_{ij}^{\Xi} = \left(\frac{\partial^2 g_{nn}^{\Xi}}{\partial x_m \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{nm}^{\Xi}}{\partial x_n \partial x_m}\right)\delta_{ij} - \frac{\partial^2 g_{kk}^{\Xi}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 g_{ik}^{\Xi}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 g_{jk}^{\Xi}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{ij}^{\Xi}}{\partial x_k \partial x_k} \neq 0$$

Так как тензор Риччи не обращается тождественно в ноль, то представленный вариант теории с полями дислокаций описывает и гравитационные взаимодействия.

10. Заключение. Одна из целей данной работы состояла в том, чтобы показать эффективность обобщений моделей механики сплошных сред не только с точки зрения изучения сред с усложненными свойствами (масштабными эффектами), но и с точки зрения моделирования физических полей. Развитие подобных подходов позволяет устанавливать общие свойства и прямые аналогии между полями механических взаимодействий и физическими полями, указывает на их перспективность с точки зрения более тонкого изучения поведения сред на различных масштабных уровнях, более обоснованного анализа трансформации свойств материалов при предельных переходах между различными масштабными уровнями. С другой стороны, в последнее время можно слышать высказывания о второстепенной роли методов механики сплошной среды по сравнению с методами квантовой механики и квантовой теории поля, использующимися в теоретической физике. Приведенные примеры, напротив, показывают эффективность использования методов механики сплошных сред при моделировании физических процессов и указывают на их основополагающую роль. В работе фактически предложена механистическая модель физических полей. Показана роль каждой из трех частных моделей, соответствующих трем типам дислокаций в теории дефектных сред. Предложены математически непротиворечивые физические трактовки частных моделей 4D-сред. Так, установлена аналогия 4D-среды Коссера с электродинамикой. Показано, что теория ω-дислокаций трактуется как обобщенная электродинамика и включает в качестве подсистемы уравнения Максвелла. Помимо уравнений Максвелла, теория ω-дислокаций содержит уравнения для токов, что замыкает задачу и позволяет трактовать локальные решения для электромагнитного поля как частицы. Классическая электродинамика является примером среды с антисимметричным тензором напряжений и с точки зрения механики сплошных сред дает экспериментально подтвержденный факт существования среды с антисимметричным тензором напряжений. При этом нетрудно показать, что электродинамика остается средой с антисимметричным тензором напряжений, даже если отсутствуют дефекты в среде (токи и заряды), т.е. даже для немоментных сред тензор напряжений может оставаться антисимметричным.

Теория θ-дислокаций трактуется как теория сильных взаимодействий и содержит аналог уравнений Ампера для напряженностей «сильных» взаимодействий и уравнение Юкавы для потенциала «сильных» токов. Такую же структуру уравнений дает и теория γ-дислокаций, которая трактуется как теория «слабых» взаимодействий со своими аналогами уравнений Ампера для напряженностей и уравнением для токов. Показано, что теория 4D-сред с сохраняющимися дислокациями естественным образом может использоваться и для моделирования гравитации, т.к. метрический тензор для дефектной среды не интегрируем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity Arch. Ration. Mech. And Analysis, 1, 51-78 (1964)
2. Белов П.А., Горшков А.Г., Лурье С.А. Вариационная модель неголономных 4D сред //Механика твердого тела, N6, 2006, с.29-46
3. Васильев В.В. Напряженное состояние твердых тел и некоторые геометрические эффекты //Механика твердого тела, N5, 1989, с.30-34.

4. Васильев В.В., Федоров Л.В. Геометрическая теория упругости и оптимизация формы твердых тел //Механика твердого тела, N1, 2006, с.16-27.
5. Васильев В.В., Федоров Л.В. Плоская осесимметричная задача геометрическая теория упругости и оптимизация дисков //Механика твердого тела, N6, 2006, с.47-60.
6. Белов П.А., Лурье С.А. Модели деформирования твердых тел и их аналоги в теории поля// Мех. Тв. Тела Изв. РАН, 1998, № 3 С. 157-166
7. Лурье С.А., Белов П.А., Бабешко А.В., Яновский Ю. Масштабные эффекты в моделях сплошных сред// Механика композитных конструкций №8 т.1 2002 стр.71-82
8. Белов П.А., Лурье С.А. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с "двойникованием".//Сборник трудов конференции "Современные проблемы механики гетерогенных сред", Издание РАН, 2005, с. 235-268
9. Лурье С.А., Белов П.А. Вариационная формулировка математических моделей сред с микроструктурами //Математическое моделирование систем и процессов, 2006, №14, Пермь, с. 114-132.
10. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. (2006). Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials//J. of Mat. Scs, Springer, v.41, № 20, pp. 6693-6707.
11. П.А.Белов, Лурье С.А. К общей геометрической теории дефектных сред //Физическая мезомеханика, т 10, N 6, 2007, с. 49-61.
12. De Wit R., The Continual Theory of the Stationary Dislocations. Solid State Physics, Vol. 10, 249 p., N. Y., 1960.
13. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 6, М.: , Мир, 1977, .347
14. Эйнштейн А. К общей теории относительности // Собрание научных трудов, том 2, Наука, 1966, с134-141.