

УДК 539.3

С.А. Лурье<sup>1</sup>, П.А. Белов<sup>2</sup>, Ю.О. Соляев<sup>1</sup>,  
1. ИПРИМ РАН (Москва), 2. ООО «НИК».

### **Адгезионные взаимодействия в механике сплошных сред.**

В недавних работах [1-5] построена теория сред со спектром масштабных эффектов в объеме деформируемого тела и на его поверхности. Результаты этих исследований используются в данной работе для развития варианта континуальной теории адгезионных взаимодействий. Впервые в рамках континуального описания дается моделирование известных эффектов, связанных с адгезионными свойствами (смачиваемость и мениск, капиллярность), а также сравнительно недавно экспериментально обнаруженных эффектов образования волн на свободной поверхности твердых тел, которые опять же являются проявлением адгезионных свойств. В отличие от работы [5], где главным образом указаны новые адгезионные эффекты, требующие тщательного экспериментального изучения и подтверждения, в данной работе дается новый подход к моделированию известных экспериментально подтвержденных явлений, которые предлагается использовать для решения проблемы идентификации адгезионных параметров модели. Это представляется весьма важным для успешного решения различного рода прикладных проблем.

### **Введение**

В последнее время получены значительные достижения в моделировании масштабных эффектов в деформируемых телах [1-12], которые особенно актуальны с точки зрения приложений к новым материалам, а также при моделировании новых эффектов, обнаруженных экспериментальным путем. Многие практически важные феноменологические модели в теории деформируемых сред были значительно пересмотрены и модифицированы в исследованиях последнего времени [6-8]. Значительное развитие получили градиентные теории упругости и пластичности [9-12]. Показано, что градиентные теории достаточно эффективны при моделировании сред на нано- и микро- уровнях [2,3,5].

Варианты такой теории были сформулированы в работах [3,4] как частные теории достаточно общей теории сред с сохраняющимися дислокациями [1,2]. С их помощью, на основе тех или иных упрощающих гипотез удалось объяснить многие из известных неклассических эффектов механики сплошных сред, связанных с масштабными эффектами. Основой для построения моделей здесь является «кинематический» вариационный принцип, который дает возможность построить замкнутую модель среды по выбранной кинематической модели. Кинематической моделью является фиксированный набор кинематических связей для исследуемой среды. После выбора кинематической модели с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа постулируется возможная работа внутренних сил  $\overline{\delta U}$  как возможная работа реактивных силовых факторов на этих связях. Возможная работа внутренних сил представляется в виде линейной формы вариаций своих аргументов. Эта форма может быть проинтегрирована для консервативных сред. В результате определяется потенциальная энергия. Для линейных сред потенциальная энергия является квадратичной формой своих аргументов. Таким образом, для каждой

кинематической модели среды, «кинематический» вариационный принцип дает возможность построить единственную обратимую физически линейную модель.

Приведем некоторые примеры:

1. Постулируем непрерывность среды. Тогда следует ввести в качестве кинематических связей между двенадцатью зависимыми кинематическими переменными: деформациями, поворотами и перемещениями, девять несимметричных соотношений Коши [1]:

$$\overline{\delta U} = \iiint \sigma_{ij} \delta \left( d_{ij}^0 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right) dV \quad (1)$$

где  $d_{ij}^0 = \varepsilon_{ij} - \omega_k \mathcal{E}_{ijk}$  - тензор стеснённой дисторсии,  $\varepsilon_{ij}$  - тензор деформаций,  $\omega_k$  - псевдовектор поворотов,  $\mathcal{E}_{ijk}$  - псевдотензор Леви-Чивиты,  $\sigma_{ij}$  - неопределенные множители Лагранжа. Для обратимых физически линейных процессов выбор кинематической модели (1) приводит к лагранжиану простейшей несимметричной теории упругости, а при гипотезе парности касательных напряжений – к классической теории упругости.

2. Постулируем непрерывность среды - отсутствие дислокаций - как в 3D (т.е. в объеме), так и в 2D (т.е. на поверхности тела). Тогда в качестве кинематических связей следует ввести девять несимметричных соотношений Коши в 3D и шесть несимметричных соотношений Коши, не содержащих нормальных производных от перемещений, в 2D [5]:

$$\overline{\delta U} = \iiint \sigma_{ij} \delta \left( d_{ij}^0 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right) dV + \iint a_{ik} \delta \left( d_{ij}^0 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right) (\delta_{jk} - n_j n_k) dF \quad (2)$$

Для обратимых физически линейных процессов кинематическая модель (2) приводит к лагранжиану простейшей несимметричной/классической теории упругости сред с идеальными адгезионными свойствами поверхности [5]. Как показано в работе [5] теория предсказывает существование четырех типов адгезионных взаимодействий поверхностей идеальных (без дислокаций) сред.

3. Постулируем в 3D наличие дефектов – сохраняющихся дислокаций [1,2]. Тогда в качестве кинематических связей следует ввести девять несимметричных соотношений Коши для стесненной дисторсии и девять неоднородных уравнений Папковича для свободной дисторсии в объеме среды:

$$\overline{\delta U} = \iiint \left[ \sigma_{ij} \delta \left( d_{ij}^0 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right) + m_{ij} \delta \left( \Xi_{ij} - \frac{\partial d_{in}^{\Xi}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj} \right) \right] dV \quad (3)$$

В последнем равенстве псевдотензор  $\Xi_{ij}$  является тензором "несовместностей" и является характеристикой дефектной среды с полем дефектов- дислокаций [1,2]. Если дисторсия  $d_{ij}$  не имеет непрерывного векторного потенциала, условия интегрируемости перемещений не выполняются. Тогда соотношения Папковича являются неоднородными:  $d_{in,m} \mathcal{E}_{nmj} = [\gamma_{in} + 1/3]\theta \delta_{in} - \omega_k \mathcal{E}_{ink}$ ,  ${}_{,m} \mathcal{E}_{nmj} = \Xi_{ij}$ . Если  $\Xi_{ij} \neq 0$  - дисторсия не интегрируема. Непрерывный тензор  $\Xi_{ij}$  перемещений является псевдотензором плотности дислокаций [13] и подчиняется дифференциальному закону сохранения:  $\Xi_{ij,j} = 0$ .

Для обратимых физически линейных процессов кинематическая модель (3) приводит к лагранжиану простейшей теории сред с сохраняющимися дислокациями [1-4]. В этом случае теория предсказывает существование четырех типов адгезионных взаимодействий поверхностей сред с сохраняющимися дислокациями. Отметим, что эти адгезионные взаимодействия отсутствуют, если сохраняющиеся дислокации

отсутствуют. С другой стороны, существует как раз четыре типа адгезионных взаимодействий поверхностей идеальной (без дислокаций) среды. Это противоречие привело к более тщательному анализу постановок этих теорий и пониманию необходимости последовательного учета кинематических связей в 3D, 2D и 1D областях исследуемых сред.

### Обобщенная кинематическая модель среды

В отличие от изложенных выше моделей кинематики учтем дополнительно и связи между стесненной дисторсией и перемещениями не только в объеме среды и на поверхности, но и в 1D. Новым моментом является и учет связей между свободной дисторсией и тензором-источником дислокаций в 2D. В таком случае будут учтены все возможные кинематические связи для сред с сохраняющимися дислокациями как в 3D, так и в 2D и в 1D.

Итак, предлагаем в общем случае кинематическую модель со следующим набором кинематических связей:

- в объёме среды: девять неоднородных уравнений Папковича для свободной дисторсии:  $d_{in,m}^{\Xi} \mathcal{E}_{nmj} = [\gamma_{in}^{\Xi} + (1/3)\theta^{\Xi} \delta_{in} - \omega_k^{\Xi} \mathcal{E}_{ink}]_m \mathcal{E}_{nmj} = \Xi_{ij}$ , ( $d_{ij} = d_{ij}^0 + d_{ij}^{\Xi}$ ) и девять несимметричных соотношений Коши для стесненной дисторсии;

- на поверхности, ограничивающей объём тела: шесть соотношений Коши, не содержащих нормальных производных к поверхности, а также три неоднородных уравнения Папковича, также не содержащих нормальных производных к поверхности;

- на рёбрах, ограничивающих кусочно-гладкие поверхности тела: три несимметричных соотношения Коши, содержащих производные только вдоль ребра. Неоднородных уравнений Папковича, содержащих производные только в одном направлении, не существует, поэтому на ребре нельзя сформулировать ни одной такой связи.

Таким образом, в соответствии с "кинематическим" вариационным принципом возможную работу внутренних сил следует представить в виде:

$$\begin{aligned} \overline{\delta U} = & \iiint [\sigma_{ij} \delta(d_{ij}^0 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) + m_{ij} \delta(\Xi_{ij} - \frac{\partial d_{in}^{\Xi}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj})] dV + \\ & + \iint [a_{ik} \delta(d_{ij}^0 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j})(\delta_{jk} - n_j n_k) + m_i \delta(\Xi_{ij} - \frac{\partial d_{in}^{\Xi}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{nmj}) n_j] dF + \sum \int a_i \delta(d_{ij}^0 - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}) s_j ds \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\overline{\delta U}$  - возможная работа, в общем случае - линейная форма вариаций своих аргументов;  $\sigma_{ij}$ ,  $m_{ij}$ ,  $a_{ik}$ ,  $m_i$  и  $a_i$  - тензоры множителей Лагранжа, которые имеют физический смысл реактивных силовых факторов, обеспечивающих выполнение соответствующих кинематических связей.

Приведенная формулировка возможной работы внутренних сил (4) является обобщением всех перечисленных выше формулировок и содержит последние как частные случаи. Следовательно, излагаемая здесь теория будет содержать все перечисленные выше теории как частные случаи. Соответствующая модель является наиболее общей и требует тщательного анализа. В данной работе будет дан анализ наиболее простой модели адгезионных взаимодействий, кинематика которой определяется равенством (2). Будем называть эту модель моделью идеальных адгезионных взаимодействий [5].

## Вариационная постановка модели идеальных адгезионных взаимодействий [5].

Кратко сформулируем математическую постановку модели идеальных адгезионных взаимодействий и отметим главные особенности физических свойств модели. Кинематическая модель (2) приводит к следующему лагранжиану [5]:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint C_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dV - \frac{1}{2} \iint A_{ipnq}^* \left[ \frac{\partial R_n}{\partial x_m} (\delta_{mq} - n_m n_q) \right] \left[ \frac{\partial R_i}{\partial x_j} (\delta_{jp} - n_j n_p) \right] dF$$

Тензор объемных модулей является изотропным и имеет следующую структуру:

$C_{ijnm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{nm} + \mu (\delta_{in} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jn})$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  - классические модули – коэффициенты Ламе, тензор адгезионных взаимодействий является плоским и имеет вид  $A_{ijnm} = A_{ipnq}^* (\delta_{mq} - n_m n_q) (\delta_{jp} - n_j n_p)$ , тензоры модулей  $C_{ijnm}$  и  $A_{ijnm}$  имеют свойство симметрии при перестановке первой и второй пары индексов:  $C_{ijnm} = C_{nmij}$ ,  $A_{ijnm} = A_{nmij}$ .

В общем случае тензор адгезионных модулей несимметричен [5]:

$$A_{ijnm} = [\lambda^F (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + \delta^F n_i n_n (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^F + \chi^F) (\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^F - \chi^F) (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n)],$$

и определяется четырьмя постоянными, характеризующими четыре типа взаимодействий: поверхностное натяжение  $(\mu^F + \lambda^F)$ , симметричное  $\mu^F$  и несимметричное  $\chi^F$  формоизменение поверхности, которые также связаны с поверхностным натяжением и модуль  $\delta^F$ , который идентифицируется как постоянная Лапласа для капиллярного давления.

Поверхностная плотность потенциальной энергии может быть записана в виде:

$$2U_F(\Theta, \Gamma, \Omega, A) = (\mu^F + \lambda^F) \Theta \Theta + 2\mu^F \Gamma \Gamma + 2\chi^F \Omega \Omega + \delta^F A A$$

где введены скалярные меры деформации для каждого типа адгезионных взаимодействий:

$$\Theta = \sqrt{2\theta^2 \theta} \quad \Gamma = \sqrt{2\gamma_{ij}^2 \gamma_{ij}} \quad \Omega = \sqrt{2\omega_{ij}^2 \omega_{ij}} \quad A = \sqrt{2\alpha_k^2 \alpha_k},$$

Симметричный тензор адгезионных модулей содержит только два независимых адгезионных модуля и имеет структуру:

$$A_{ijnm} = \lambda^F (\delta_{ij} - n_i n_j) (\delta_{nm} - n_n n_m) + \mu^F [(\delta_{in} - n_i n_n) (\delta_{jm} - n_j n_m) + (\delta_{im} - n_i n_m) (\delta_{jn} - n_j n_n)]$$

Видно, что такая структура адгезионных модулей не позволяет описать явление капиллярного давления. В дальнейшем будем принимать, что  $\chi^F = 0$ .

## Вариационная формулировка краевой задачи

Варьируя лагранжиан и приравнивая вариацию нулю, получим вариационное уравнение:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iiint [C_{ijnm} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} + P_i^V] \delta R_i dV + \iint [P_i^F - C_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} n_j + A_{ijnm} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m}] \delta R_i dF - \\ & - \sum \int A_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} v_j \delta R_i ds = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь суммирование производится по всем контурам, ограничивающим гладкие поверхности, составляющие кусочно-гладкую поверхность  $F$ .

Таким образом, теория сред с идеальной адгезией поверхностей имеет те же уравнения равновесия, что и классическая теория упругости (при  $\chi=0$ ), но краевая задача содержит другие статические граничные условия.

Заметим, что записанная краевая задача имеет повышенный порядок краевых условий и относится к классу некорректных задач. Поэтому решение этой задачи может натолкнуться на некоторые трудности. При этом более полная краевая задачи для когезионно - адгезионной модели с оператором разрешающего уравнения не второго, а четвертого порядка является корректной.

Запишем частные постановки краевой задачи, которые будут использоваться для решения конкретных задач. Рассмотрим обобщенные плоские задачи, в которых принимается, что отлична от нуля только одна компонента перемещений. В результате из общей постановки (5) получим выражения для функционалов в декартовой системе координат. Для двумерной краевой задачи (2D постановки) лагранжиан ( $L = A - U$ ) имеет вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iint \left\{ (2\mu + \lambda) \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} + \mu \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial R}{\partial y} \right\} dF - \left\{ \frac{1}{2} \int_{-b}^b \delta^F \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial R}{\partial y} dy \right\}_{x=\pm h} - \left\{ \frac{1}{2} \int_{-h}^h (\lambda^F + 2\mu^F) \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial x} dx \right\}_{y=\pm b} \quad (6)$$

$R_i(x, y) = X_i R(x, y)$ ,  $R$  - скалярная функция координат, определяющая поле перемещений точек среды в направлении оси  $OX$ .  $A$  - работа внешних сил,  $U$  - потенциальная энергия деформации.

Для 3D постановки имеем ( $L = A - U$ ):

$$L = -\frac{1}{2} \iiint \left\{ (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 + \mu \left( \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 \right) \right\} dV - \frac{1}{2} \iint_{Z_i=1} \delta^F \left( \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 \right) dF - \frac{1}{2} \iint_{Z_i=0} (2\mu^F + \lambda^F) \left( \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 dF, \quad (7)$$

$R_i(x, y, z) = Z_i R(x, y, z)$ ,  $R$  - скалярная функция координат, определяющая поле перемещений точек среды в направлении оси  $OZ$ , задаваемом вектором с координатами  $Z_i$  ( $X_i Z_i = 0, Y_i Z_i = 0, Z_i Z_i = 1$ ),

### Некоторые краевые задачи по моделированию адгезионных взаимодействий.

1. Рассмотрим задачу о деформировании упругого слоя, находящегося между жесткими вертикальными стенками (Рис.1) при отсутствии контакта в отношении касательных напряжений (полное проскальзывание).

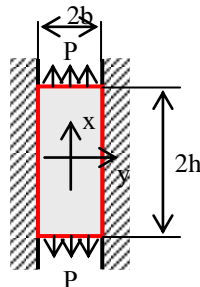


Рис.1. Задача о деформировании слоя в канале

Задача симметрична в отношении координаты  $y$ . Слой нагружен давлением  $P$ , приложенным в направлении оси  $OX$ . В этом случае из функционала (6) следует следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} \delta L = & \left\{ \int_{-1}^1 P \delta R dy \right\}_{x=\pm 1} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{(\lambda + 2\mu)}{h^2} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\mu}{b^2} \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right\} b h \delta R dx dy - \\ & - \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \frac{(\lambda + 2\mu)}{h} \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\delta^F}{b^2} \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right) b \delta R dy \right\}_{x=\pm 1} - \\ & - \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \frac{\mu}{b} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{(\lambda^F + 2\mu^F)}{h^2} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right) h \delta R dx \right\}_{y=\pm 1} - \\ & - \left\{ \sum \left( \frac{\delta^F}{b} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{(\lambda^F + 2\mu^F)}{h} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} \right) \delta R \right\}_{(x=\pm 1, y=\pm 1)} \end{aligned} \quad (8)$$

В эквивалентной форме эта краевая задача записывается для уравнения равновесия

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{h^2} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\mu}{b^2} \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = 0,$$

с граничными условиями:

$$x = \pm 1: \pm P \mp \frac{(\lambda + 2\mu)}{h} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\delta^F}{b^2} \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = 0,$$

$$y = \pm 1: \frac{\mu}{b} \frac{\partial R}{\partial y} \mp \frac{(\lambda^F + 2\mu^F)}{h^2} \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = 0$$

В угловых точках  $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$  должно выполняться условие согласования:

$$\pm \frac{\delta^F}{b} \frac{\partial R}{\partial y} \pm \frac{(\lambda^F + 2\mu^F)}{h} \frac{\partial R}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

В отличие от классической постановки здесь учитываются адгезионные свойства и в зоне контакта с поверхностью канала и на свободной от контакта границе. При этом с помощью последнего соотношения можно оценивать величину изгиба свободной поверхности в точке контакта трёх сред, т.е. величину угла мениска:

$$\left. \frac{\partial R}{\partial y} \right|_{(1,1)} = - \frac{b}{h} \frac{(\lambda^F + 2\mu^F)}{\delta^F} \left. \frac{\partial R}{\partial x} \right|_{(1,1)}$$

Необходимо отметить, что на свободной поверхности адгезионные свойства определяются параметром  $\delta^F$ . Считая, что контакт осуществляется с вакуумом, параметр  $\delta^F$  определяет собственные свойства поверхности среды и поэтому  $\delta^F \geq 0$ . Напротив, на границе контакта со стенками канала параметр  $(\lambda^F + 2\mu^F)$  определяет поверхностное натяжение границы контакта двух сред (упругой среды и жесткой стенки), а поэтому может быть меньше нуля ( $\lambda^F + 2\mu^F \leq 0$ ) и больше нуля ( $\lambda^F + 2\mu^F \geq 0$ ), ибо можно показать, что адгезионные свойства зоны контакта сред с разными свойствами определяется как разность собственных адгезионных свойств контактируемых сред. Это непосредственно следует из вариационной постановки контактных задач.

Решение задачи (6), (8) строится приближенным методом Рунца в виде разложения по полиномам:  $R(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} C_{ij} x^{2i-1} y^{2j}$ , коэффициенты в котором находятся путем прямой минимизации лагранжиана. На рисунке 2. дана качественная картина перемещений среды, полученных в результате решения задачи. Показано, что полученное решение успешно моделирует эффекты смачиваемости и несмачиваемости в зависимости от знака параметров адгезии  $\lambda^F + 2\mu^F$ . Случай  $\lambda^F + 2\mu^F > 0$  соответствует несмачиваемости, случай  $\lambda^F + 2\mu^F \leq 0$  - смачиваемости.

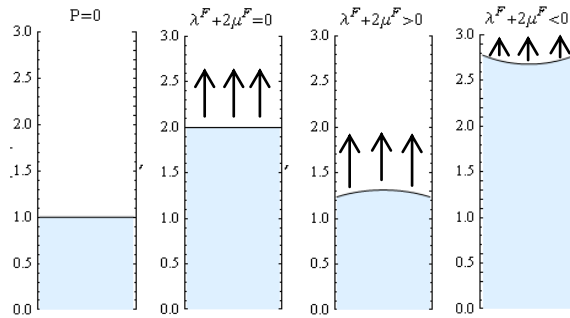


Рис.2. Характерные распределения перемещений в зависимости от параметров адгезии  $\lambda^F + 2\mu^F$  (при  $\delta^F = 0.5$ )

Случаю  $\lambda^F + 2\mu^F > 0$  можно дать трактовку, в соответствии с которой адгезионные свойства увеличивают эффективную жесткость упругого слоя среды. И наоборот, в случае  $\lambda^F + 2\mu^F < 0$  эффективная жесткость упругого слоя уменьшается. Случай  $\lambda^F + 2\mu^F = 0$  соответствует классическому решению.

При увеличении параметра  $\delta^F$  «изгибная жесткость» адгезионного слоя увеличивается, что приводит к уменьшению угла мениска (рис 3), что вполне соответствует соотношению (9).

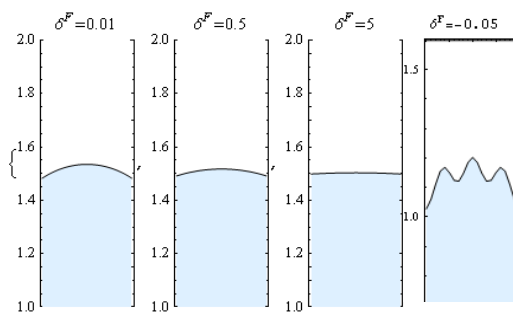


Рис.3. Зависимость угла мениска от значения параметра  $\delta^F$

Если предположить, что параметр  $\delta^F$  может быть отрицательным (контакт не с вакуумом, а с некоторой газообразной средой, влияющей на адгезионные свойства контакта), то расчеты показывают возможность волнообразования на «свободной» поверхности. Отметим, что эффекты волнообразования на поверхности твердых тел наблюдаются в экспериментах [14,15].

График рисунка 4. показывает на существенную зависимость эффекта капиллярности от ширины канала (для несмачиваемости).

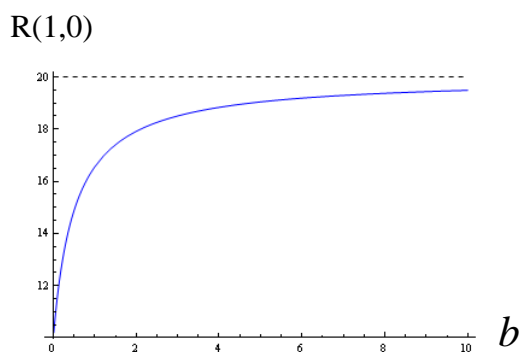


Рис.4. Зависимости эффекта капиллярности от ширины канала  
( $\lambda^F + 2\mu^F = 0.5$ ,  $\delta^F = 0.1$ ,  $h = 10$ ).

2. Рассмотрим упругое полупространство с адгезионно-активной поверхностью (Рис.5.).

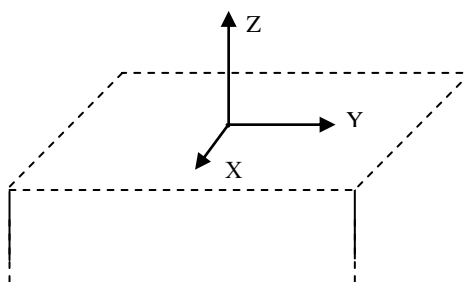


Рис.5. Полупространство

Покажем, что модель «идеальной адгезии», позволяет качественно моделировать эффект волнообразования свободной поверхности в деформированных телах [14,15]. Воспользуемся приближённым описанием деформирования, при котором только одна компонента перемещений в направлении оси  $Z$  (перпендикулярно поверхности) отлична от нуля. Вариационная постановка такой задачи определяется функционалом (7), и приводит к следующей однородной краевой задаче:

$$\delta L = \iiint \left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right) \right\} \delta R dV - \left\{ \iint_{z=0} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - \delta^F \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right) \right) \delta R dF \right\}_{z=0} \quad (10)$$

Формулировка (10) фактически определяет однородную задачу на собственные значения. Моделируются поверхностные волны, затухающие при удалении от поверхности тела,  $z \rightarrow -\infty$ . Решение представим в виде:

$$R(x, y, z) = e^{az} \cos(nx) \cos(my),$$

здесь параметры  $n$ ,  $m$  являются параметрами волнообразования.

Фактически собственные формы задаются выражением  $\cos(nx) \cos(my)$ , а собственные параметры  $n$ ,  $m$  находятся из условия существования нетривиального решения однородной задачи.

Из уравнения равновесия следует, что:

$$a^2 = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} (n^2 + m^2)$$



Однородное граничное условие при  $z=0$ :  $(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \delta^F \left( \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \right) = 0$ ,

приводит к следующему выражению:

$$n^2 + m^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)\mu}{(\delta^F)^2} \quad (11)$$

Из соотношения (11) следует, что параметры волнообразования связаны с адгезионным параметром  $\delta^F$ .

Положим  $m = \alpha n$ , тогда решение рассматриваемой проблемы (моделирование волнообразования) даётся выражением:

$$n = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)\mu}{(1 + \alpha^2)(\delta^F)^2}} \quad (12)$$

Следовательно, длина волны пропорциональна адгезионному параметру, но уменьшается, с увеличением жёсткости тела.

Возможный характер волнообразования при  $\alpha=1$  для различных параметров  $\delta^F$  показан на рисунке 6.

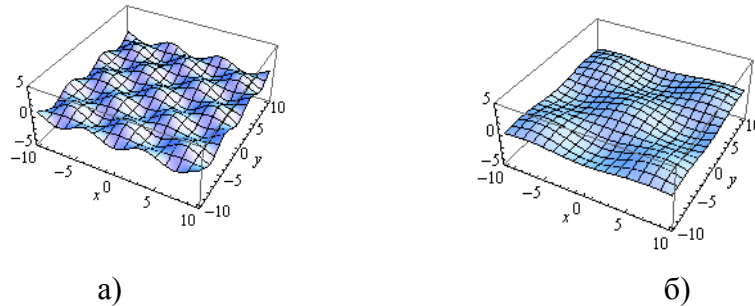


Рис.6. Волнообразование при  $\alpha=1$

а)  $\delta^F = 0.5$ , б)  $\delta^F = 1$

На рисунке 7. показаны возможные формы свободной поверхности для различных параметров  $\alpha$ .

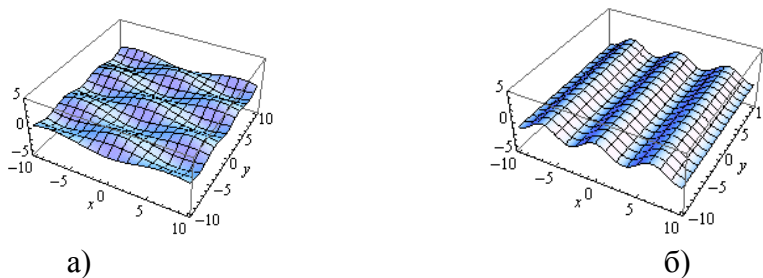


Рис.7. Возможные формы свободной поверхности,  $\delta^F = 0.65$ ,

а)  $\alpha = 2$ , б)  $\alpha = 0$

В работе [15] приведены экспериментальные данные по измерению параметров «ячеистой» (волнообразной) структуры на поверхности меди, для различных случаев термообработки при  $T = 200^\circ\text{C}$  и  $T = 300^\circ\text{C}$ . Будем предполагать, что параметры волнообразования соответствуют меди и характеризуются её адгезионными

свойствами. Используем эти данные для идентификации характеристики адгезии  $\delta^F$ , в предложенной модели идеальной адгезии.

Для термической обработки  $T = 200^\circ\text{C}$ , в соответствии с экспериментом, образующаяся структура имеет один размер равный 3-4 мкм (т.е. длина волны в направлении оси Y равна  $\lambda_y = 3500$  нм), а другой равный 400-600 нм (по оси X длина волны  $\lambda_x = 500$  нм).

Соответственно получаем  $m = \frac{2\pi}{\lambda_y} \approx 0.0018$  1/нм и  $n = \frac{2\pi}{\lambda_x} \approx 0.0125$  1/нм. Отсюда

находим, что параметр  $\alpha = \frac{1}{7}$ .

Из формулы (12) находим:

$$\delta^F = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)\mu}{n^2(1 + \alpha^2)}} \approx 0.0005 \text{ Кг/нм}$$

При этом было принято, что для меди:  $\lambda + 2\mu = 10^{-5} \text{ Кг/нм}^2$ , а  $\mu = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Кг/нм}^2$ .

Эксперименты показывают, что для случая  $T=300^\circ\text{C}$ , образуется не ячеистая, а складчатая структура,  $\alpha = 0$  и  $m \approx 0.00028$  1/нм. Таким образом, термообработка увеличивает «изгибную жёсткость» поверхности. Параметр адгезии находится также по формуле (12) и равен следующей величине  $\delta^F = 0.022$  Кг/нм.

### Заключение

В работе развит вариант континуальной модели адгезионных взаимодействий, построенный в предположении, что тело внутри объёма подчиняется классической модели теории упругости, а на поверхности обладает спектром определённых адгезионных свойств. Приведённые примеры показали, что такая модель обобщает понятие поверхностного натяжения и позволяет моделировать известные поверхностные эффекты. Известные поверхностные эффекты волнообразования, обнаруженные сравнительно недавно экспериментально, ранее моделировались путём введения дополнительных предположений о наличии поверхностного слоя с определёнными геометрическими и жесткостными характеристиками. Предлагаемая в работе модель позволяет моделировать эти эффекты без введения дополнительных предположений в рамках единого описания. Подобные тонкие экспериментальные исследования могут быть использованы для определения адгезионных параметров модели, которые фактически являются основными параметрами поверхности, реализуемой при тех или иных технологических процессах, и существенно влияют, например, на свойства многокомпонентных сред. В связи с этим проблема идентификации параметров модели представляется весьма актуальной.

### Литература

1. Лурье, С.А. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с "двойникованием" / Лурье С.А., Белов П.А. //Сб. тр. конф. "Современные проблемы механики гетерогенных сред", Инст. Прикл. Мех. РАН. – 2005. – Т.1. – С. 235-268.
2. Лурье, С.А. Вариационная формулировка математических моделей сред с микроструктурами / Лурье С.А., Белов П.А. // Сб. Математическое моделирование систем и процессов. – 2006. – Т.14. – С.114-132.

3. Lurie, S. The Application of the multiscale models for description of the dispersed composites / Lurie S., Belov P., Tuchkova N. // *Int. Journal Computational Materials Science A.* – 2005. – V.36. – N2. – P.145-152.
4. Lurie, S. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials. / Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. // *Int J of Materials Science.* Springer. – 2006. – V.41. – N.20. – P. 6693-6707.
5. Белов, П.А. Теория идеальных адгезионных взаимодействий / Белов П.А., Лурье С.А. // *Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2007. – Т.13. – В.3.
6. Трусов, П.В. Моделирование формирования текстуры в пластически деформируемом поликристалле / Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Волегов П.С // *Упругость и неупругость.* Сб. научн. тр. М.:МГУ. – 2006. – С.242–248.
7. Трусов, П.В. О физических теориях пластичности и их применении для описания эволюции микроструктуры / Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Волегов П.С., Швейкин А.И. // *Совр. проблемы термовязкопластичности. Тр. II школы-семинара.* М.: МАМИ. – 2007. – С.128-147.
8. Еремеев, В.А. О локальной группе материальной симметрии в механике микрополярных сред / Еремеев В.А. // *Сб. Математическое моделирование систем и процессов.* – 2006. – В.14. – С.62-68.
9. Aifantis, E.C. Strain gradient interpretation of size effects. / Aifantis E.C. // *Int. J. Fracture.* – 1999. – V.95. – P.299-314.
10. Гуткин, М.Ю. Предел текучести и пластическая деформация нанокристаллических материалов / Гуткин М.Ю. // *Успехи механики.* – 2003. – В.1. – С.68-125.
11. Gutkin, M.Y. Nanoscopies of dislocations and disclinations in gradient elasticity / Gutkin M.Y. // *Reviews of Advanced in Materials Science.* – 2000. – V.1. – N.1. – P.27-60.
12. Fleck, N.A. Strain gradient plasticity / Fleck N.A., Hutchinson J.W. // *Advanced in Applied Mechanics.* – 1997. – V.33. – P.295-361.
13. De Wit, R. The Continual Theory of the Stationary Dislocations. / De Wit R. // *Solid State Physics.* N. Y. –1960. – V.10. – P.249.
14. Панин, В.Е. Эффект «шахматной доски» в распределении напряжений и деформаций на интерфейсах в нагруженном твёрдом теле / Панин В.Е., Панин А.В., Моисеенко Д.Д., Елсукова Т.Ф., Кузина О.Ю., Максимов П.В. // *Доклады академии наук.* – 2006. – Т.409. – В.5. – С.606-610.
15. Панин, А.В. Мезомеханика поведения тонких плёнок Си на подложке при одноосном растяжении и термическом отжиге. Многоуровневый подход. / Панин А.В., Шугуров А.Р., Оскомов К.В., Сидоренко А.И. // *Физическая мезомеханика.* – 2005. – Т.8. – В.4. – С.27-35.