ИДЕАЛЬНАЯ НЕСИММЕТРИЧНАЯ 4D-СРЕДА КАК МОДЕЛЬ ОБРАТИМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Белов П.А.*, Лурье С.А.**

**ООО «НИК», Petr.A.Belov@boeing.com*
***Институт прикладной механики РАН (Москва), lurie@ccas.ru*

Резюме. В работе строится модель обратимой динамической термоупругости как теория упругости идеальной (бездефектой), несимметричной, трансверсально-изотропной в направлении времени 4D-среды. В этой модели четвертой компонентой 4D-вектора перемещений является локальное неравномерное время R. Кинематическая модель объединяет 3D-тензор дисторсии, 3D-вектор скоростей, 3D-вектор-градиент локального неравномерного времени и энтропию в единый тензорный объект – несимметричный 4D-тензор дисторсии второго ранга. Соответственно, силовая модель объединяет 3D-тензор напряжений, 3D-вектор импульсов, 3D-вектор теплового потока и температуру в единый тензорный объект – несимметричный 4D-тензор напряжений второго ранга. Сформулированы уравнения закона Гука, связывающие компоненты несимметричных 4D-тензоров напряжений и дисторсии. Даны физические трактовки всех компонент тензоров термомеханических свойств сформулированной среды. Таким образом, в работе предпринята попытка сформулировать общековариантную модель обратимой динамической термоупругости, в которой основные кинематические и силовые переменные являются компонентами единых тензорных объектов. Построен лагранжиан теории, стационарное значение которого дает уравнения Эйлера (три уравнения движения и одно уравнение теплопроводности), и весь спектр начально-краевых задач. Дано математическое обоснование гипотез Дюамеля-Неймана, Максвелла-Катанео, Фурье как строгих частных случаев. Показано, что теория может описывать масштабные эффекты в тепловых процессах. В отличие от градиентных моделей, уравнение теплопроводности связанной динамической термоупругости, имеет обычный дифференциальный порядок.

1. ВВЕДЕНИЕ.

В статье развивается модель связанной динамической термоупругости [1-6]. Предыдущая модель строилась как симметричная теория упругости четырехмерной среды. При этом было показано [4-5], что формулировка любой термодинамической модели (обратимой или необратимой) как модели 4D-среды требует отказа от ставшего уже традиционным представления о физической изотропности 4D-сред. Оно было заменено представлением о трансверсальной изотропности 4D-сред в направлении времени t.

В настоящей работе формулируется модель обратимой динамической термоупругости как несимметричной теории упругости идеальной (бездефектной) 4D-среды. Необходимость такой доработки модели следует из факта различных физических свойств 3D-векторов классического импульса и теплового потока, в то время как парность 4D-напряжений требует их идентичности.

2. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ.

Кинематическая модель была сформулирована в работах [3-5]. Система координат 4D-пространства была определена пространственными координатами x_1, x_2, x_3 и четвёртой координатой x_4. В качестве четвёртой координаты определено нормированное время ($x_4 = i\nu t$, $i = \sqrt{-1}$, ν - нормировочный коэффициент, t - время). 4D-вектор обобщенных смещений R_i был определен следующим образом: первые три компоненты 4D-вектора обобщенных смещений являются традиционными компонентами трехмерного вектора перемещений исследуемой среды: $r_i = R_j(\delta_{ij} - N_i N_J)$, где N_i - орт времени. Четвёртая компонента равна проекции 4D-вектора перемещения на орт N_i и определяла некоторое обобщённое смещение: $R_i N_i = i\nu R$. Были даны трактовки R как меры накопленной энтропии или локального неравномерного времени. Окончательно, 4D-вектор перемещений R_i представлен в виде:

$$R_j = r_j + i\nu RN_j\,, \qquad r_k = R_j(\delta_{kj} - N_k N_j)\,, \qquad r_j N_j = 0 \qquad (2.1)$$

Компоненты векторного поля 4D-перемещений R_i выбраны в качестве независимых определяющих параметров модели. Наряду с векторным полем 4D-перемещений R_i было введено и тензорное поле 4D-деформаций, компоненты которого являются для рассматриваемой модели зависимыми определяющими параметрами модели. Симметричный тензор обобщенных деформаций был определен по вектору обобщённых 4D-перемещений R_i с помощью обобщенных на 4D-пространство соотношений Коши. В настоящей работе в этой части и делается обобщение – 4D-соотношения Коши записываются относительно тензора стесненной дисторсии d^0_{ij}, а не только относительно его симметричной части – тензора деформаций:

$$d^0_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$$

Обобщение на несимметричный случай, как будет показано ниже, вызвано необходимостью разделить физические свойства классического импульса и теплового потока. Представим тензор 4D-дисторсии d^0_{ij} в виде разложения на следующие действительные компоненты:

- "3D -тензор" обычный тензор деформаций изменения формы γ^0_{ij},

- "3D -псевдовектор" поворотов ω^0_k,

- "3D -вектор" скоростей v^0_k (четвертый вектор-столбец $i = 1,2,3;\ j = 4,\ i \neq 4,$),

- "3D -вектор-градиент" локального времени s^0_k (четвертая вектор-строка $i = 4,\ j = 1,2,3;\quad j \neq 4)$,

- "скаляр" θ^0 - амплитуду «шарового 3D-тензора» изменения объема,

- "скаляр" S^0 (последний диагональный элемент в матрице 4D-дисторсии $i=4$, $j=4$).

$$d_{ij}^0 = \gamma_{ij}^0 + \theta^0 \delta_{ij}^* / 3 - \omega_k^0 Э_{ijkr} N_r + v_i^0 N_j /(iv) + (iv) s_j^0 N_i + S^0 N_i N_j \qquad (2.2)$$

Здесь $Э_{ijkr}, \delta_{ij}$ - тензор Леви-Чивиты и тензор Кронекера в 4D-пространстве ($\delta_{ij}\delta_{ij}=4$), $\delta_{ij}^* = (\delta_{ij} - N_i N_j)$ - тензор Кронекера в 3D-пространстве ($\delta_{ij}^*\delta_{ij}^* = 3$),

$$\gamma_{ij}^0 = \frac{\partial R_n}{\partial x_m}(\delta_{in}^*\delta_{jm}^*/2 + \delta_{im}^*\delta_{jn}^*/2 - \frac{1}{3}\delta_{ij}^*\delta_{nm}^*/3) \qquad \theta^0 = \frac{\partial R_n}{\partial x_m}\delta_{nm}^* = \frac{\partial r_m}{\partial x_m}$$

$$\omega_k^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} Э_{nmkq} N_q = -\frac{1}{2}\frac{\partial r_n}{\partial x_m} Э_{nmkq} N_q$$

$$v_k^0 = iv \frac{\partial R_n}{\partial x_m}\delta_{nk}^* N_m = \frac{\partial r_k}{\partial t} = \dot{r}_k \qquad s_k^0 = \frac{1}{(iv)}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} N_n \delta_{mk}^* = \frac{\partial R}{\partial x_m}\delta_{mk}^*$$

$$S^0 = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} N_i N_j = \frac{\partial R}{\partial t} = \dot{R}$$

Соответственно, матрица 4D-дисторсии d_{ij}^0 имеет следующий вид:

$$\left\| d_{ij}^0 \right\| = \left\| \begin{matrix} \gamma_{11}^0 + \frac{1}{3}\theta^0 & \gamma_{12}^0 - \omega_3^0 & \gamma_{13}^0 + \omega_2^0 & v_1^0/(iv) \\ \gamma_{21}^0 + \omega_3^0 & \gamma_{22}^0 + \frac{1}{3}\theta^0 & \gamma_{23}^0 - \omega_1^0 & v_2^0/(iv) \\ \gamma_{31}^0 - \omega_2^0 & \gamma_{32}^0 + \omega_1^0 & \gamma_{33}^0 + \frac{1}{3}\theta^0 & v_3^0/(iv) \\ (iv)s_1^0 & (iv)s_2^0 & (iv)s_3^0 & S^0 \end{matrix} \right\| \qquad (2.3)$$

Отметим, что «3D-тензоры» γ_{ij}^0 и $\theta^0\delta_{ij}^*$, "3D-векторы" v_k^0 и s_k^0, "3D-псевдовектор" ω_k^0, "3D-скаляры" S^0 и θ^0 в соотношениях (2.2) и (2.3) являются соответственно тензорами, векторами и скалярами только для преобразований координат в гиперплоскости изотропии. При произвольных преобразованиях координат они ведут себя как соответствующие компоненты единого объекта - несимметричного 4D-тензора второго ранга d_{ij}^0. С этой оговоркой они быдут называться и в дальнейшем тензорами, векторами и скалярами.

3. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА.

Как уже отмечалось выше, при симметричном тензоре 4D-напряжений в силу парности касательных напряжений, 3D-вектор импульса p_k и 3D-вектор теплового потока q_k коллинеарны. Напомним, что 3D-вектор импульса p_k определялся через компоненты 4D-напряжений как $p_k = \sigma_{ij}\delta^*_{ik}N_j/(iv)$. В то же время 3D-вектор теплового потока q_k определялся через компоненты 4D-напряжений как $q_k = (iv)\sigma_{ij}N_i\delta^*_{jk}$. Из $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ следует, что поле импульсов p_k совпадает с полем $-q_k/v^2$. Из гипотезы парности 4D-напряжений следует, что в покоящейся среде не могут существовать тепловые потоки и, наоборот, при термодинамическом равновесии точки среды могут иметь только общую скорость. Более того, вектор теплового потока в соответствии с гипотезой Фурье, должен быть потенциальным, в то время как вектор импульсов в общем случае может иметь 3D-вихри. Чтобы примирить эти противоречия, приходится отказаться от гипотезы парности (симметрии тензора 4D-напряжений). Отказ от гипотезы парности 4D-напряжений приведет к иной, более богатой структуре тензоров термомеханических свойств:

$$
\begin{aligned}
&C^{pq}_{ijnm} = C^{pq}_{nmij} = \\
&= C^{pq^1}\delta^*_{ij}\delta^*_{nm} + C^{pq^2}(N_iN_j\delta^*_{nm} + \delta^*_{ij}N_nN_m) + C^{pq^4}N_iN_jN_nN_m + \\
&+ C^{pq^5}\delta^*_{in}\delta^*_{jm} + C^{pq^8}\delta^*_{im}\delta^*_{jn} + \\
&+ C^{pq^6}N_iN_n\delta^*_{jm} + C^{pq^7}\delta^*_{in}N_jN_m + C^{pq^9}(N_iN_m\delta^*_{jn} + \delta^*_{im}N_jN_n)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Модель физически трансверсально-изотропной несимметричной идеальной 4D-среды в данной работе формулируется в виде следующего лагранжиана:

$$
L = A - \frac{1}{2}\int_V [C^{11}_{ijnm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + 2C^{12}_{ijnm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}R_nN_m + C^{22}_{ijnm}R_iN_jR_nN_m]dV \tag{3.2}
$$

Уравнения закона Гука:

$$
\sigma_{ij} = C^{11}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C^{12}_{ijnm}R_nN_m \tag{3.3}
$$

Силовая модель определяется матрицей 4D-напряжений:

$$\left\|\sigma_{ij}\right\| = \left\| \begin{matrix} \tau_{11} + p/3 & \tau_{12} - \tau_3 & \tau_{13} + \tau_2 & (iv)p_1 \\ \tau_{21} + \tau_3 & \tau_{22} + p/3 & \tau_{23} - \tau_1 & (iv)p_2 \\ \tau_{31} - \tau_2 & \tau_{32} + \tau_1 & \tau_{33} + p/3 & (iv)p_3 \\ q_1/(iv) & q_2/(iv) & q_3/(iv) & T \end{matrix} \right\| \qquad (3.4)$$

Отметим, что аналогично (2.3) «3D-тензоры» τ_{ij} и $p\delta^*_{ij}$, "3D-векторы" p_i и q_i, "3D-псевдовектор" τ_k, "3D-скаляры" p и T в соотношениях (3.3) и (3.4) являются соответственно тензорами, векторами и скалярами только для преобразований координат в гиперплоскости изотропии. При произвольных преобразованиях координат они ведут себя как соответствующие компоненты единого объекта - несимметричного 4D-тензора второго ранга σ_{ij}. С этой оговоркой так же, как и для кинематических переменных, к ним будут применяться термины тензор, вектор и скаляр.

Уравнения Эйлера и начально-краевая задача получены стандартным способом из условия стационарности сформулированного лагранжиана $\delta L = 0$.

$$\begin{aligned} &\int_V [C^{11}_{ijnm} \frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} + (C^{12}_{imnj} - C^{12}_{nmij}) N_j \frac{\partial R_n}{\partial x_m} - C^{22}_{ijnm} N_j N_m R_n + P^V_i] \delta R_i dV + \\ &+ \int_F [P^F_i - (C^{11}_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} + C^{12}_{ijnm} N_m R_n) n_j] \delta R_i dF = 0 \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Связанная система $E_i = 0$ представляет собой три уравнения движения, являющихся пространственными проекциями уравнений Эйлера $E_k \delta^*_{ik} = 0$, и уравнение теплопроводности, являющееся временной проекцией уравнений Эйлера $E_i N_i = 0$. Три уравнения движения:

$$\begin{aligned} &[C^{11^5} \Delta r_j + (C^{11^8} + C^{11^1}) \frac{\partial^2 r_k}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{1}{v^2} C^{11^7} \ddot{r}_j - C^{22^7} r_j + \\ &+ (C^{11^2} + C^{11^9}) \frac{\partial \dot{R}}{\partial x_j} + (iv)(C^{12^2} - C^{12^9}) \frac{\partial R}{\partial x_j} + P^*_j] \delta^*_{ij} = 0 \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Здесь $\Delta(...) = (\delta_{ij} - N_i N_j)\dfrac{\partial^2(...)}{\partial x_i \partial x_j}$ - 3D-оператор Лапласа, $P_i^V = P_i^* + PN_i/(iv)$, $P_i^* N_i = 0$. Уравнение теплопроводности:

$$C^{11^6}\Delta R - \frac{C^{11^4}}{v^2}\ddot{R} - C^{22^4}R - \frac{(C^{11^2}+C^{11^9})}{v^2}\frac{\partial \dot{r}_k}{\partial x_k} - \frac{(C^{12^2}-C^{12^9})}{(iv)}\frac{\partial r_k}{\partial x_k} + P = 0 \quad (3.7)$$

Таким образом, в общем случае уравнения связанной динамической термоупругости содержат 14 модулей:

$$C^{11^1}, C^{11^2}, C^{11^4}, C^{11^5}, C^{11^6}, C^{11^7}, C^{11^8}, C^{11^9}\ C^{12^2}, C^{12^4}, C^{12^7}, C^{12^9}\ C^{22^4}, C^{22^7}$$

Концепция построения модели. В дальнейшем будем строить «максимально приближенный к классическому» вариант обратимой динамической термоупругости с минимумом новых, подлежащих экспериментальному определению, модулей термомеханических свойств.

1. Уравнения закона Гука для 3D-девиатора напряжений τ_{pq} имеют классический вид:

$$\tau_{pq} = (C^{11^5} + C^{11^8})\gamma_{pq}^0 \quad (3.8)$$

Коэффициент пропорциональности между 3D-девиаторами напряжений τ_{pq} и деформаций изменения формы γ_{pq}^0 является удвоенным модулем сдвига, его величина известна и экспериментально определена:

$$(C^{11^5} + C^{11^8}) = 2\mu \quad (3.9)$$

2. Пространственная непарность касательных напряжений вытекает как следствие из несимметричности 4D-напряжений $\sigma_{ij} - \sigma_{ji} \neq 0$. Соответственно, можно ввести псевдовектор τ_k пространственно непарной части касательных 4D-напряжений:

$$\tau_k = (C^{11^5} - C^{11^8})\omega_k^0 \quad (3.10)$$

Непарность касательных напряжений определяется «третьим коэффициентом Ламе» χ, введенным в работах [1,2,6]. В этих же работах устанавливаются требования, которые следует выполнить для обеспечения физической объективности уравнений закона Гука для несимметричных напряжений.

$$C^{11^5} - C^{11^8} = 2\chi \tag{3.11}$$

В соответствии с концепцией построения модели будем полагать справедливость «гипотезы парности для пространственных компонент 4D-напряжений», полагая

$$\chi = 0 \tag{3.12}$$

3. Часть непространственных компонент непарных касательных напряжений естественным образом объединяются в 3D-вектор теплового потока q_k. Для теплового потока нет общепризнанного уравнения закона Гука. Роль уравнения закона Гука для теплового потока играет математическая формулировка гипотезы Фурье. Но с точки зрения закона Гука гипотеза Фурье противоречива, так как связывает два силовых фактора, а не силовой и кинематический/кинематические. Если принять идею потенциальности q_k как экспериментально доказанный факт, было бы последовательным искать некий кинематический потенциал, входящий в выражения для q_k и T, при исключении которого получалось бы некое соотношение между ними, соответствующее в той или иной мере утверждению гипотезы Фурье. Уравнения закона Гука (3.3) для q_k дают:

$$q_k = (iv)^2 C^{11^6} \frac{\partial R}{\partial x_m} \delta^*_{mk} + C^{11^9} \dot{r}_k + (iv) C^{12^9} r_k \tag{3.13}$$

Как видно из (3.13), таким кинематическим потенциалом может служить R - четвертая компонента 4D-вектора перемещений. Поэтому в соответствии с концепцией построения модели, «ослабленная гипотеза Фурье» позволяет упростить уравнение закона Гука для теплового потока, если положить модули при скорости и перемещении равными нулю.

$$C^{11^9} = C^{12^9} = 0 \tag{3.14}$$

И наоборот, полагая справедливость (3.14), утверждение «ослабленной гипотезы Фурье» является строгим частным случаем уравнений закона Гука для теплового потока в формулируемой теории, что и доказано как теорема. Действительно, тепловой поток потенциален, так как становится пропорциональным градиенту R и не может иметь вихрей. В развиваемой модели при «ослабленной гипотезе Фурье» тепловой поток пропорционален другому скаляру, и, значит, коэффициент пропорциональности не будет являться коэффициентом теплопроводности. Будем называть его пока «термомеханическим модулем для теплового потока». Естественным образом определение «термомеханического модуля для теплового потока» среды β вводится благодаря соотношению:

$$C^{11^6} = \beta / v^2 \tag{3.15}$$

Уравнение закона Гука для теплового потока (3.13) приобретает вид:

$$q_k = -\beta \frac{\partial R}{\partial x_m} \delta^*_{mk} \tag{3.16}$$

4. Оставшаяся часть непространственных компонент непарных касательных напряжений естественным образом объединяется в 3D-вектор импульса p_k. В классической механике уравнением закона Гука для импульса является его определение через скорость. В данном случае уравнение закона Гука (3.3) для импульса имеет более общий вид:

$$p_k = \frac{C^{11^7}}{(iv)^2} \dot{r}_k + C^{11^9} \frac{\partial R}{\partial x_m} \delta^*_{mk} + \frac{C^{12^7}}{(iv)} r_k \tag{3.17}$$

В соответствии с концепцией построения модели, введем «гипотезу классического импульса», полагая нулю модули при градиенте R и перемещении r_k:

$$C^{11^9} = C^{12^7} = 0 \tag{3.18}$$

Здесь естественным образом может быть дано определение плотности среды ρ:

$$C^{11^7} = \rho v^2 \tag{3.19}$$

Уравнение закона Гука для импульса (3.17) приобретает вид:

$$p_k = -\rho \dot{r}_k \tag{3.20}$$

5. Уравнение закона Гука для гидростатического давления p имеет неклассический вид:

$$p = (\frac{2\mu}{3} + C^{11^1})\theta^0 + C^{11^2}\dot{R} + (iv)C^{12^2}R \qquad (3.21)$$

Однако два новых слагаемых в нем отражают связанность механических и термических процессов. Продифференцировав это уравнение по времени, можно обнаружить, что неклассическая поправка в нем является линейным дифференциальным оператором от энтропии $\dot{R}$. Значит, при адиабатических процессах ($\dot{R} = 0$) коэффициент пропорциональности между скоростью давления $\dot{p}$ и скоростью изменения объема $\dot{\theta}^0$ равен адиабатическому модулю объемного сжатия K, его величина экспериментально определена:

$$K = \frac{2\mu}{3} + C^{11^1} = \frac{2\mu}{3} + \lambda \qquad (3.22)$$

6. Уравнения закона Гука для температуры T имеет неклассический вид, аналогичный уравнению закона Гука для давления:

$$T = C^{11^2}\theta^0 + C^{11^4}\dot{R} + (iv)C^{12^4}R \qquad (3.23)$$

Как было доказано в работах [4,5], между p, θ^0, T существует единственный случай линейной алгебраической связи. Таким образом была доказана «теорема Дюамеля-Неймана». Условием, при котором утверждение *гипотезы Дюамеля-Неймана* является строгим следствием неклассических уравнений закона Гука для давления и температуры, является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов в линейных дифференциальных операторах первого порядка над R в уравнениях закона Гука для p и T:

$$C^{11^2}(iv)C^{12^4} - C^{11^4}(iv)C^{12^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C^{12^2} = C^{12^4}(C^{11^2} / C^{11^4}) \qquad (3.24)$$

В соответствии с «теоремой Дюамеля-Неймана» (3.24), уравнения закона Гука для p и T приобретают вид:

$$\begin{cases} p = K\theta^0 - \dfrac{1}{\tau}\dfrac{(K - K_T)}{K_T\alpha}(\tau\dot{R} + R) \\ T = -\dfrac{(K - K_T)}{K_T\alpha}\theta^0 + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{1}{K_T\alpha}\dfrac{(K - K_T)}{K_T\alpha}(\tau\dot{R} + R) \end{cases} \Rightarrow \quad p = K_T(\theta^0 - \alpha T) \qquad (3.25)$$

Здесь модули C^{11^2}, C^{11^4} выражены через известные термомеханические параметры – изотермический модуль объемного сжатия K_T и коэффициент температурного расширения α:

$$C^{11^2} = -\frac{(K - K_T)}{K_T \alpha} \qquad C^{11^4} = \frac{1}{K_T \alpha}\frac{(K - K_T)}{K_T \alpha} \tag{3.26}$$

Соответственно, модули C^{12^2}, C^{12^4} выражены с учетом (3.24) через один, пока произвольный, параметр τ:

$$C^{12^2} = -\frac{1}{(iv)\tau}\frac{(K - K_T)}{K_T \alpha} \qquad C^{12^4} = \frac{1}{(iv)\tau}\frac{1}{K_T \alpha}\frac{(K - K_T)}{K_T \alpha} \tag{3.27}$$

7. Закон Гука для теплового потока неудобен для экспериментального определения модуля β в силу того, что пока не понятно, какова может быть технология измерения R и его пространственного градиента. Поэтому продифференцируем уравнение закона Гука для температуры по координатам, образуя 3D-градиент температуры, домножим полученное уравнение на $-\beta/(ivC^{12^4})$ с учетом (3.27) и воспользуемся уравнением закона Гука для теплового потока.

$$q_k + \tau\dot{q}_k = -\frac{\beta\tau(K_T\alpha)^2}{(K - K_T)}\frac{\partial T}{\partial x_m}\delta^*_{mk} - \beta\tau K_T\alpha\frac{\partial \theta^0}{\partial x_m}\delta^*_{mk} \tag{3.28}$$

Соотношение (3.28) является обобщением утверждения гипотезы Максвелла-Катанео [7,8]:

$$q_k + \tau\dot{q}_k = -k\frac{\partial T}{\partial x_m}\delta^*_{mk} \tag{3.29}$$

Здесь τ - время релаксации теплового потока, k - коэффициент теплопроводности. Отметим, что при $\tau \to 0$ гипотеза Максвелла-Катанео переходит в гипотезу Фурье. При изохорических $\theta^0 = 0$ процессах (3.28) совпадает с математической формулировкой гипотезы Максвелла-Катанео (3.29) и дает определение «изохорического коэффициента теплопроводности» k_V:

$$k_V = \beta\tau(K_T\alpha)^2/(K - K_T) \tag{3.30}$$

При изобарических $p=0$ процессах (3.28) также совпадает с математической формулировкой гипотезы Максвелла-Катанео, но дает определение другого, «изобарического коэффициента теплопроводности» $k_P = k_V(K/K_T)$:

$$q_k + \tau\dot{q}_k = -(k_V \frac{K}{K_T})\frac{\partial T}{\partial x_m}\delta^*_{mk}$$

Таким образом, анализ уравнений закона Гука позволил дать трактовки модулей термомеханических свойств, за исключением модулей C^{22^4}, C^{22^7}, и определить их через известные термомеханические характеристики сред. В качестве теоретических результатов можно отметить математическое обоснование гипотез Дюамеля-Неймана, Максвелла-Катанео, Фурье как строгих частных случаев формулируемой здесь динамической термоупругости.

5. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА.

Уравнения движения в 4D-перемещениях (3.6) с учетом осуществленных трактовок модулей приобретут вид:

$$\mu\Delta r_j + (\mu+\lambda)\frac{\partial^2 r_k}{\partial x_j \partial x_k} - \rho\ddot{r}_j - C^{22^7} r_j - \frac{1}{\tau}\frac{(K-K_T)}{K_T\alpha}\frac{\partial(\tau\dot{R}+R)}{\partial x_j} + P^*_j]\delta^*_{ij} = 0 \qquad (4.1)$$

В дальнейшем потребуется 3D-дивергенция этих уравнений при $\partial P^*_k / \partial x_k = 0$:

$$(2\mu+\lambda)\Delta\frac{\partial r_k}{\partial x_k} - \rho\frac{\partial \ddot{r}_k}{\partial x_k} - \frac{1}{\tau}\frac{(K-K_T)}{K_T\alpha}\Delta(\tau\dot{R}+R) = 0 \qquad (4.2)$$

Чтобы преобразовать уравнения движения (4.1) к традиционному смешанному виду (3D-перемещения+температура), достаточно воспользоваться уравнением обратного закона Гука для температуры. С его помощью уравнения движения (4.1) приобретают вид:

$$[\mu\Delta r_j + (\mu+\lambda_T)\frac{\partial^2 r_k}{\partial x_j \partial x_k} - \rho\ddot{r}_j - C^{22^7} r_j - K_T\alpha\frac{\partial T}{\partial x_j} + P^*_j]\delta^*_{ij} = 0$$

Таким образом, первые три уравнения Эйлера являются уравнениями движения обратимой термоупругости и с точностью до винклеровского слагаемого $-C^{22^7} r_i$ совпадают с известными уравнениями движения. При дополнительной упрощающей «гипотезе отсутствия пространственных винклеровских оснований»

$$C^{22^7} = 0 \tag{4.3}$$

уравнения движения совпадают с классическими полностью.

Уравнение теплопроводности (3.7) при $P = 0$ так же получено в виде, записанном относительно компонент 4D-перемещений.

$$\Delta R - \frac{\tau}{k_V}\ddot{R} - \frac{1}{l_0^2}R + \frac{1}{k_V}K_T\alpha\frac{\partial(\tau\dot{r}_k - r_k)}{\partial x_k} = 0 \tag{4.4}$$

Здесь вместо модуля C^{22^4} введен более удобный термомеханический параметр l_0. Можно выразить время релаксации τ теплового потока через характерную скорость распространения температуры v_V:

$$\frac{\tau}{k_V} = \frac{1}{v_V^2} \quad \Rightarrow \quad v_V = \sqrt{\frac{k_V}{\tau}} \tag{4.5}$$

При изохорических процессах уравнение теплопроводности (4.4) перестает быть частью связанной системы и становится независимым.

$$\Delta T - \frac{1}{v_V^2}\ddot{T} - \frac{1}{l_0^2}T = 0$$

Здесь следует обратить внимание на то, что пренебрежение в уравнении теплопроводности слагаемым с линейным дифференциальным оператором по времени от изменения объема приводит к тому, что температура удовлетворяет уравнению второго порядка. В точной постановке это не так. Введем некоторый скаляр ψ таким образом, чтобы дивергенция уравнений движения тождественно удовлетворялось:

$$\frac{\partial r_k}{\partial x_k} = \frac{1}{\tau}\frac{(K - K_T)}{K_T\alpha}\Delta(\tau\dot{\psi} + \psi) \qquad R = (2\mu + \lambda)\Delta\psi - \rho\ddot{\psi} \tag{4.6}$$

Подставляя локальное время R и изменение объема θ^0, выраженные через потенциал ψ, в (4.6) получим:

$$(2\mu+\lambda)\Delta\Delta\psi-[\rho+\frac{\tau}{k_V}(2\mu+\lambda_T)]\Delta\ddot{\psi}+\rho\frac{\tau}{k_V}\ddddot{\psi}-[\frac{1}{l_0^2}(2\mu+\lambda)+\frac{1}{k_V\tau}(\lambda-\lambda_T)]\Delta\psi+\frac{1}{l_0^2}\rho\ddot{\psi}=0 \quad (4.7)$$

Подставляя R и θ^0, выраженные через потенциал ψ, приведем уравнение закона Гука для температуры к виду:

$$T=\frac{(2\mu+\lambda_T)}{K_T\alpha}\frac{1}{\tau}\frac{(K-K_T)}{K_T\alpha}\Delta(\tau\dot{\psi}+\psi)-\frac{1}{\tau}\frac{1}{K_T\alpha}\frac{(K-K_T)}{K_T\alpha}\rho(\tau\dddot{\psi}+\ddot{\psi}) \quad (4.8)$$

Действуя оператором температуры (4.8) на уравнение (4.7), получим уравнение, записанное относительно только температуры:

$$(2\mu+\lambda)\Delta\Delta T-[\rho+\frac{\tau}{k_V}(2\mu+\lambda_T)]\Delta\ddot{T}+\rho\frac{\tau}{k_V}\ddddot{T}-[\frac{1}{l_0^2}(2\mu+\lambda)+\frac{1}{k_V\tau}(\lambda-\lambda_T)]\Delta T+\frac{1}{l_0^2}\rho\ddot{T}=0 \quad (4.9)$$

Рассмотрим стационарные поля температур, когда производными по времени от температуры можно пренебречь:

$$\Delta\Delta T-(\frac{1}{l_0^2}+\frac{1}{k_V\tau}\frac{(\lambda-\lambda_T)}{(2\mu+\lambda)})\Delta T=0 \quad \Rightarrow \quad [\Delta(...)-(\frac{1}{l_0^2}+\frac{1}{k_V\tau}\frac{(\lambda-\lambda_T)}{(2\mu+\lambda)})(...)]\Delta T=0$$

Отсюда следует, что теория определяет не только классическое стационарное температурное поле, как фундаментальное решение, соответствующее второму оператору (оператору Лапласа), но и неклассическое локальное температурное поле, как фундаментальное решение, соответствующее первому оператору (оператору Гельмгольца). Единственному новому термомеханическому параметру l_0 можно дать трактовку характерной длины по аналогии с теорией когезионного поля. Но здесь эта характерная длина фигурирует не в уравнениях движения повышенного дифференциального порядка, что характерно для градиентных теорий, а в уравнении теплопроводности связанной термоупругости, имеющей обычный дифференциальный порядок. Таким образом, сформулированная теория может описывать масштабные эффекты в тепловых процессах.

Теперь рассмотрим противоположный случай – случай нестационарных, пространственно однородных температурных полей. Тогда лапласианом от температуры можно пренебречь по сравнению с производными по времени, в результате получим:

$$\frac{1}{v_V^2}\ddddot{T}+\frac{1}{l_0^2}\ddot{T}=0 \quad \Rightarrow \quad [\frac{1}{v_V^2}\frac{d^2(...)}{dt^2}+\frac{1}{l_0^2}(...)]\frac{d^2(...)}{dt^2}T=0$$

Здесь так же, как и для пространственного стационарного случая, можно выделить относительно медленно меняющуюся часть решения, соответствующую классическим температурным полям. Классическое решение определяется как фундаментальное решение, соответствующее второму оператору (второй производной по времени) в общем операторе теории. В то же время общий оператор содержит еще один оператор второго порядка, определяющий неклассические периодические температурные поля. Этот эффект с неизбежностью приводит к утверждению о существовании терморезонансных явлений и открывает широкие перспективы экспериментальных исследований на его основе масштабных эффектов в связанной динамической термоупругости.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Симметричность тензора 4D-напряжений, приводящая к противоречиям в свойствах импульса и теплового потока, послужившая причиной доработок модели, изложенных в настоящей работе, привела к формулировке несимметричной модели в двух вариантах. Первый характеризуется тем, что его формулировка представлена в максимально общем виде (3.3). Второй вариант, напротив, характеризуется тем, что его формулировка предельно упрощена и «приближена» к модели классической термоупругости. Для этого введены пять упрощающих гипотез. Шесть модулей определены упрощающими гипотезами, а остальные выражены через семь известных термомеханических параметра среды:

$\mu, \lambda, \rho, \lambda_T, \alpha, k_V, \tau$ и один новый l_0. В качестве теоретических результатов можно отметить следующее:

1. Дано математическое обоснование гипотез Дюамеля-Неймана, Максвелла-Катанео, Фурье как строгих частных случаев формулируемой здесь динамической термоупругости.

2. Сформулированная теория может описывать масштабные эффекты в тепловых процессах. В отличие от градиентных моделей, уравнение теплопроводности связанной динамической термоупругости, имеет обычный дифференциальный порядок, что является несомненным достоинством теории.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Образцов И.Ф., Елпатьевский А.Н., Белов П.А. Об общем подходе к формулировке линейных моделей сред различной гладкости. ДАН СССР, 1988 г., том 303, №6, стр.1331-1334.

2. Белов П.А., Лурье С.А. Теория идеальных адгезионных взаимодействий. Механика композиционных материалов и конструкций, 2007 г., том 13, №4, 519-.

3. Лурье С.А., Белов П.А., Яновский Ю.Г. О моделировании теплопереноса в динамически деформируемых средах. Механика композиционных материалов и конструкций, 2000 г., том 6, №3, стр. 436-

4. Лурье С.А., Белов П.А. Вариационная модель неголономных сред. Механика композиционных материалов и конструкций, 2001 г., том 7, №2, стр. 436-444.

5. Белов П.А., Горшков А.Г., Лурье С.А. Вариационная модель неголономных 4D-сред. Механика Твердого Тела, 2006 г., №6, стр.41-58.

6. Лурье С.А., Белов П.А., Математические модели механики сплошной среды и физических полей. М.: Изд-во ВЦ РАН.- 2000. – 151с.

7. J.C. Maxwell, Philos.Trans.Roy.Soc. London 157 (1867) 49.

8. C.Cattaneo, Atti Seminario Univ. Modena 3 (1948) 33.