ТЕОРИЯ СРЕД С СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ: ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ

Белов П.А., Лурье С.А.*

ООО «НИК», г. Жуковский, Россия
**Учреждение Российской академии наук Институт прикладной механики РАН, г. Москва,* Россия

РЕЗЮМЕ.

В работе строится прикладная модель среды с полями сохраняющихся дислокаций, обладающей как когезионными, так и адгезионными свойствами. Исходной моделью является теория сред с полями сохраняющихся дислокаций [1], из которой с помощью обобщения гипотезы Аэро-Кувшинского построена приближенная прикладная модель при дополнительных предположениях о структурах тензоров когезионных и адгезионных модулей. В результате сформулирована теория с всего двумя новыми параметрами среды: когезионным модулем, имеющим размерность (модуль сдвига)/(квадрат длины) и адгезионным, имеющим размерность (модуль сдвига)/(длину). Доказано, что фундаментальными решениями сформулированной теории являются поля «классических» и «когезионных» перемещений. Так же доказано, что в ряде случаев краевые задачи для полей «классических» и «когезионных» перемещений разделяются.

Ключевые слова: механика дефектных сред, поля сохраняющихся дислокаций, когезия, адгезия, неклассические упругие характеристики.

THE THEORY OF MEDIA WITH CONSERVED DISLOCATIONS: APPLIED THEORY.

Belov P.A., Lurie S.A.

Company «NIK», Zukovsky, Russia.
**Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.*

SUMMARY

In the paper an applied model of media with fields of conserved dislocations, with cohesive and adhesive interactions, is proposed. Initial model is the theory of media with fields of conserved dislocations [1]. The generalization of Aero-Kuvshinsky hypotheses is used to construct the applied model. Additional assumptions about structures of tensors of cohesive and adhesive moduli are proposed. As result, the applied theory has only two new parameters: the cohesive module with dimension (the shear module)/(square of length) and adhesive module with dimension (shear module)/(length). It is proved, that fundamental decisions of the formulated theory are the fields of «classical» and «cohesive» displacements. It has been shown, that in some cases the boundary problems for fields of «classical» and «cohesive» displacements can been separated.

Key words: damaged media mechanics, fields of conserved dislocations, cohesion, adhesion, nonclassical moduli.

В работе строится прикладная модель среды с полями сохраняющихся дислокаций, обладающей как когезионными, так и адгезионными свойствами. Исходной моделью является теория сред с полями сохраняющихся дислокаций [1] с «упрощенными» адгезионными свойствами. Лагранжиан исходной модели имеет вид:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [C^{11}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + 2C^{12}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + C^{22}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm}d^{\Xi}_{ij} + C^{33}_{ijnm}\Xi_{nm}\Xi_{ij}]dV -$$
$$- \frac{1}{2}\oiint [A^{11}_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + 2A^{12}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + A^{22}_{ijnm}d^{\Xi}_{nm}d^{\Xi}_{ij}]dF \qquad (1)$$

Здесь:

$$C^{pq}_{ijnm} = \lambda^{pq}\delta_{ij}\delta_{nm} + (\mu^{pq} + \chi^{pq})\delta_{in}\delta_{jm} + (\mu^{pq} - \chi^{pq})\delta_{im}\delta_{jn}$$

- тензоры модулей дефектной среды,

$$A^{pq}_{ijnm} = \lambda^{pqF}(\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{nm} - n_n n_m) + \delta^{pqF} n_i n_n(\delta_{jm} - n_j n_m) +$$
$$+ (\mu^{pqF} + \chi^{pqF})(\delta_{in} - n_i n_n)(\delta_{jm} - n_j n_m) + (\mu^{pqF} - \chi^{pqF})(\delta_{im} - n_i n_m)(\delta_{jn} - n_j n_n)$$

- тензоры адгезионных модулей,

$\frac{\partial R_i}{\partial x_j}$ и d^{Ξ}_{ij} - тензоры стесненной и свободной дисторсий,

$\Xi_{ij} = \frac{\partial d^{\Xi}_{in}}{\partial x_m}Э_{nmj}$ - псевдотензор плотности дислокаций Де Вита.

Для сокращения количества неизвестных, используется обобщение гипотезы Аэро-Кувшинского [2,3], о пропорциональности спинов и вихрей перемещений. Обобщение гипотезы имеет вид:

$$d^{\Xi}_{ij} = a_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} =$$
$$= (3a + 2b)\frac{1}{3}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + 2b(\frac{1}{2}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3}\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij}) - 2c(-\frac{1}{2}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{nmk})Э_{ijk}$$
$$a_{ijnm} = a\delta_{ij}\delta_{nm} + (b + c)\delta_{in}\delta_{jm} + (b - c)\delta_{im}\delta_{jn} \qquad (2)$$

Здесь a, b, c - параметры прикладной модели, являющиеся рациональными функциями компонентов тензоров $C^{12}_{ijnm}, C^{22}_{ijnm}$. Гипотеза Аэро-Кувшинского [3] вытекает из (2) как частный случай при $a = b = 0$. Подставляя (2) в (1), получим «адгезионное» обобщение градиентной модели Тупина [2,5], которая определяется следующим лагранжианом:

$$L = A -$$
$$- \frac{1}{2}\iiint [E_{ijnm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + E_{ijknml}\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m}]dV - \frac{1}{2}\oiint A_{ijnm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}dF \qquad (3)$$

Здесь:

$$E_{ijnm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{nm} + (\mu+\chi)\delta_{in}\delta_{jm} + (\mu-\chi)\delta_{im}\delta_{jn}$$

$$\begin{cases} \lambda = \lambda^{11} + 2[(2\mu^{12} + 3\lambda^{12})a + \lambda^{12}2b] + \\ +[(2\mu^{22} + 3\lambda^{22})a + \lambda^{22}2b](3a+2b) + \mu^{22}4ab \\ \mu = \mu^{11} + \mu^{12}4b + \mu^{22}4bb \\ \chi = \chi^{11} + \chi^{12}4c + \chi^{22}4cc \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_{ijknml} &= \\ &= E_1(\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml} + \delta_{jk}\delta_{il}\delta_{nm} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} + \delta_{jk}\delta_{im}\delta_{nl}) + \\ &+ E_2(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{nm} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{nm} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl}) + \\ &+ E_3\delta_{jk}\delta_{in}\delta_{ml} + \\ &+ E_4(\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}) + \\ &+ E_5(\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}) \end{aligned}$$

$$E_1 = \frac{1}{2}(\mu^{33} - \chi^{33})(b-c)(b-c) - \chi^{33}a(b-c)$$

$$E_2 = \chi^{33}aa + \chi^{33}a(b-c) - \frac{1}{4}(\mu^{33} - \chi^{33})(b-c)(b-c)$$

$$E_3 = -(\mu^{33} - \chi^{33})(b-c)(b-c)$$

$$E_4 = \mu^{33}(b-c)(b-c)$$

$$E_5 = -\frac{1}{2}\mu^{33}(b-c)(b-c)$$

$$\begin{aligned} A_{ijnm} &= \\ &= \lambda^F(\delta_{ij} - n_in_j)(\delta_{nm} - n_nn_m) + \delta^F n_in_n(\delta_{jm} - n_jn_m) + \\ &+ (\mu^F + \chi^F)(\delta_{in} - n_in_n)(\delta_{jm} - n_jn_m) + (\mu^F - \chi^F)(\delta_{im} - n_in_m)(\delta_{jn} - n_jn_n) + \\ &+ \alpha(n_in_m(\delta_{jn} - n_jn_n) + n_nn_j(\delta_{im} - n_in_m)) + \beta(n_in_j(\delta_{nm} - n_nn_m) + n_nn_m(\delta_{ij} - n_in_j)) + \\ &+ An_in_jn_nn_m + B(\delta_{in} - n_in_n)n_jn_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^F &= \lambda^{11F} + 4b\lambda^{12F} + 4bb\lambda^{22F} + 4a(\mu^{12F} + \lambda^{12F}) + \\ &+ 8ab(\mu^{22F} + \lambda^{22F}) + 4aa(\mu^{22F} + \lambda^{22F}) \end{aligned}$$

$$\delta^F = \delta^{11F} + 2(b+c)\delta^{12F} + (b+c)(b+c)\delta^{22F}$$

$$\mu^F = \mu^{11F} + 4b\mu^{12F} + 4bb\mu^{22F}$$

$$\chi^F = \chi^{11F} + 4c\chi^{12F} + 4cc\chi^{22F}$$

$$\alpha = (b-c)\delta^{12F} + (b+c)(b-c)\delta^{22F}/2$$

$$\beta = 2a(\mu^{12F} + \lambda^{12F}) + 4a(a+b)(\mu^{22F} + \lambda^{22F})$$

$$A = 4aa(\mu^{22F} + \lambda^{22F})$$

$$B = (b-c)2b\delta^{22F}$$

При $a = b = 0,\quad c \neq 0$, из (3) вытекает «адгезионное» обобщение теории сред Аэро-Кувшинского [3], которая является [2] прикладной теорией сред Коссера (теорией сред с полем сохраняющихся ω-дислокаций).

Соответственно, при $a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c = 0$ из (3) вытекает «адгезионное» обобщение теории сред Джеремилло [4], которая является [2] прикладной теорией сред с сохраняющимися полями θ- и γ- дислокаций.

Таким образом, параметры $(3a+2b), b, c$ можно трактовать как «выключатели» для трех типов полей дислокаций, соответственно: θ-, γ- и ω-дислокаций. Обратим внимание на то, что в прикладной теории теряется часть «тонких» механических свойств сред с полями сохраняющихся дислокаций. Действительно, исходная модель (1) содержит двенадцать модулей в объеме, и двенадцать модулей на поверхности тела (адгезионных модулей). В работе [1] дана трактовка всем перечисленным модулям и выяснен их физический смысл. Модель (3) содержит уже только шестнадцать модулей: восемь в объеме и восемь на поверхности. К сожалению, и она не пригодна для инженерных приложений, так как предполагает большой объем экспериментальных работ по определению неклассических модулей. Поэтому приходится идти по пути дальнейшего упрощения модели, оставляя лишь самые существенные неклассические характеристики. Такими характеристиками, на наш взгляд, должны быть характерные длины когезионных и адгезионных взаимодействий.

Введем гипотезу о пропорциональности когезионных модулей в форме:

$$E_{ijknml} = \frac{1}{C^V} E_{ijrk} E_{nmrl}$$

Эта гипотеза приводит к следующей зависимости когезионных модулей от единственного нового модуля $C^V = \mu / l_V^2$:

$$E_1 = (\mu+\chi)(\mu+\lambda-\chi)/(2C^V)$$

$$E_2 = (\mu+\lambda-\chi)(\mu+\lambda-\chi)/(4C^V)$$

$$E_3 = (\mu+\chi)(\mu+\chi)/C^V$$

$$E_4 = 0$$

$$E_5 = 0$$

Введем гипотезу о пропорциональности адгезионных модулей в форме:

$$A_{ijnm} = \frac{1}{C^F}(E_{rpij} n_p)(E_{rqnm} n_q)$$

Эта гипотеза приводит к следующей зависимости адгезионных модулей от единственного нового модуля $C^F = \mu / l_F$:

$$\lambda^F = \lambda\lambda / C^F \qquad \alpha = (\mu-\chi)(\mu+\chi)/C^F$$

$$\delta^F = (\mu-\chi)(\mu-\chi)/C^F \qquad \beta = (2\mu+\lambda)\lambda / C^F$$

$$\mu^F = 0 \qquad A = (2\mu+\lambda)(2\mu+\lambda)/C^F$$

$$\chi^F = 0 \qquad B = (\mu+\chi)(\mu+\chi)/C^F$$

Таким образом, поставленная цель достигнута: все многообразие когезионных и адгезионных свойств тел в формулируемой модели сводится к двум характерным длинам l_V и l_F. В целом модель определяет механические свойства сред с сохраняющимися полями дислокаций через пять параметров среды $\mu, \lambda, \chi, l_V, l_F$ для несимметричной теории, и через четыре параметра среды: μ, λ, l_V, l_F для симметричной теории ($\chi = 0$).

Лагранжиан формулируемой теории приобретает вид:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [E_{ijnm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + \frac{1}{C^V}E_{ijrk}E_{nmrl}\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m}]dV -$$
$$- \frac{1}{2}\oiint \frac{1}{C^F}(E_{rpij}n_p)(E_{rqnm}n_q)\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}dF \quad (4)$$

Вариационное уравнение:

$$\delta L = \iiint [E_{ijrk}\frac{\partial^2(...)}{\partial x_j \partial x_k}(R_r - \frac{1}{C^V}E_{nmrl}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m}) + P_i^V]\delta R_i dV +$$
$$+ \oiint [P_i^F - E_{ijrk}n_j\frac{\partial}{\partial x_k}(R_r - \frac{1}{C^V}E_{nmrl}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m})]\delta R_i dF - \quad (5)$$
$$- \oiint [\frac{1}{C^F}(E_{rqnm}n_q)\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + \frac{1}{C^V}E_{rqnm}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_q \partial x_m}]\delta(E_{rpij}n_p\frac{\partial R_i}{\partial x_j})dF = 0$$

Определения классического U_i и когезионного u_i перемещений через полное перемещение R_i:

$$\begin{cases} U_i = R_i - \frac{1}{C^V}E_{ijnm}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} \\ u_i = -\frac{1}{C^V}E_{ijnm}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} \end{cases} \Rightarrow \quad R_i = U_i - u_i \quad (6)$$

Обратим внимание на то, что в любой точке поверхности, где $(E_{rpij}n_p R_{i,j}) = 0$, потенциальная энергия адгезии в соответствии с (4) равна нулю, и в этой точке поверхности адгезионные свойства не проявляются, не смотря на то, что адгезионные модули, связанные с l_F, не равны нулю. Поэтому второй поверхностный интеграл может обращаться в ноль для адгезионно активной поверхности только за счет «статического» слагаемого. Отсюда имеем $E_{ijnm}n_j R_{n,m} = C^F u_i$. Это соотношение можно обобщить и на адгезионно пассивную поверхность полагая, что для каждой точки такой поверхности $u_i = 0$. Действительно, $(E_{ijnm}n_j R_{n,m}) = C^F u_i = 0$. Таким образом, с учетом определений (6) для всей поверхности имеет место «универсальное соотношение»:

$$E_{ijnm}n_j U_{n,m} = E_{ijnm}n_j u_{n,m} + C^F u_i \quad (7)$$

В соответствии с (7), потенциальная энергия адгезии может быть представлена в виде:

$$\frac{1}{2}\oiint \frac{1}{C^F}(E_{rpij}n_p)(E_{rqnm}n_q)\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}dF = \frac{1}{2}\oiint C^F u_i u_i dF$$

Такая форма представления потенциальной энергии адгезии позволяет сделать более наглядной трактовку неклассических естественных граничных условий. Если потенциальная энергия адгезии равна нулю, когезионные перемещения $u_i = 0$, имеет место их «защемление». Следовательно, и $\delta u_i = 0$ для адгезионно пассивной поверхности. Наоборот: для адгезионно активной поверхности чтобы, выполнялось вариационное уравнение (5), следует положить нулю «статический» множитель при произвольной вариации δu_i. Обратим внимание на то, что для изолированного тела с адгезионно пассивной поверхностью при отсутствии внешних объемных сил краевая задача относительно когезионных перемещений приводит к тривиальному решению, и полные перемещения будут равны классическим.

Представим объемный интеграл в вариационном уравнении с учетом определений U_i и u_i (6) в следующем виде:

$$\iiint [E_{ijrk}\frac{\partial^2(...)}{\partial x_j \partial x_k}(R_r-\frac{1}{C^V}E_{nmrl}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m})+P_i^V]\delta R_i dV=$$

$$=\iiint [E_{ijrk}\frac{\partial^2 U_r}{\partial x_j \partial x_k}+P_i^V]\delta U_i dV-\iiint [E_{nmrl}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_l \partial x_m}-C^V u_r+P_i^V]\delta u_i dV$$

Аналогичным образом представим первый поверхностный интеграл:

$$\oiint [P_i^F-E_{ijrk}n_j\frac{\partial}{\partial x_k}(R_r-\frac{1}{C^V}E_{nmrl}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_l \partial x_m})]\delta R_i dF=$$

$$=\oiint [P_i^F-E_{ijrk}n_j\frac{\partial U_r}{\partial x_k}]\delta U_i dF-\oiint [P_i^F-E_{ijrk}n_j\frac{\partial R_r}{\partial x_k}-E_{ijrk}n_j\frac{\partial u_r}{\partial x_k}]\delta u_i dF$$

И, наконец, представим второй поверхностный интеграл в виде:

$$-\oiint [\frac{1}{C^F}(E_{rqnm}n_q)\frac{\partial R_n}{\partial x_m}+\frac{1}{C^V}E_{rqnm}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_q \partial x_m}]\delta(E_{rpij}n_p\frac{\partial R_i}{\partial x_j})dF=$$

$$=-\oiint \frac{1}{C^F}(E_{rqnm}n_q\frac{\partial R_n}{\partial x_m}-C^F u_r)\delta(E_{rpij}n_p\frac{\partial R_i}{\partial x_j}-C^F u_r)dF-$$

$$-\oiint (E_{iqnm}n_q\frac{\partial R_n}{\partial x_m}-C^F u_i)\delta u_i dF$$

Подставляя преобразованные интегралы в исходное вариационное уравнение, получим:

$$\delta L=\iiint (E_{ijrk}\frac{\partial^2 U_r}{\partial x_j \partial x_k}+P_i^V)\delta U_i dV-\iiint (E_{nmrl}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_l \partial x_m}-C^V u_r+P_i^V)\delta u_i dV+$$

$$+\oiint (P_i^F-E_{ijrk}n_j\frac{\partial U_r}{\partial x_k})\delta U_i dF-\oiint (P_i^F-E_{ijrk}n_j\frac{\partial u_r}{\partial x_k}-C^F u_i)\delta u_i dF-$$

$$-\frac{1}{2C^F}\delta\oiint (E_{rqnm}n_q\frac{\partial R_n}{\partial x_m}-C^F u_r)(E_{rpij}n_p\frac{\partial R_i}{\partial x_j}-C^F u_r)dF=0$$

С учетом полученного выше «универсального соотношения» (7), последнее слагаемое обращается в ноль. Таким образом, вариационное уравнение, записанное в терминах U_i и u_i, для первой основной задачи $\delta R_i \neq 0$ распадается на две независимые краевые задачи.

$$\begin{gathered}\iiint (E_{ijrk}\frac{\partial^2 U_r}{\partial x_j \partial x_k}+P_i^V)\delta U_i dV+\oiint (P_i^F-E_{ijrk}n_j\frac{\partial U_r}{\partial x_k})\delta U_i dF-\\-\iiint (E_{nmrl}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_l \partial x_m}-C^V u_r+P_i^V)\delta u_i dV-\oiint (P_i^F-E_{ijrk}n_j\frac{\partial u_r}{\partial x_k}-C^F u_i)\delta u_i dF=0\end{gathered} \quad (8)$$

Если на части или на всей поверхности заданы полные перемещения $\delta R_i=0$, краевые задачи становятся связанными. Чтобы сохранить симметрию между U_i и u_i, введем условие $\delta R_i=\delta(U_i-u_i)=0$ на множителе Лагранжа Q_i:

$$\iiint (E_{ijrk}\frac{\partial^2 U_r}{\partial x_j \partial x_k} + P_i^V)\delta U_i dV +$$

$$+\oiint_P (P_i^F - E_{ijrk} n_j \frac{\partial U_r}{\partial x_k})\delta U_i dF + \oiint_R (Q_i - E_{ijrk} n_j \frac{\partial U_r}{\partial x_k})\delta U_i dF -$$

$$-\iiint (E_{nmrl}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_l \partial x_m} - C^V u_r + P_i^V)\delta u_i dV -$$

$$-\oiint_P (P_i^F - E_{ijrk} n_j \frac{\partial u_r}{\partial x_k} - C^F u_i)\delta u_i dF - \oiint_R (Q_i - E_{ijrk} n_j \frac{\partial u_r}{\partial x_k} - C^F u_i)\delta u_i dF = 0$$

Исключая множитель Лагранжа Q_i, получим все то же «универсальное соотношение» (7) на поверхности.

Контактная задача. Индексами «1» и «2» определяются переменные и физические параметры контактирующих тел. В соответствии с (5) на поверхности контакта должны отсутствовать скачки вектора полных перемещений $R_i^1 - R_i^2 = 0$ и вектора полных напряжений $E_{ijnm}^1 n_j \frac{\partial R_n^1}{\partial x_m} - E_{ijnm}^2 n_j \frac{\partial R_n^2}{\partial x_m} = 0$. В этих связях заключается специфика формулировки контактной задачи для вариационного уравнения (8). С учетом соотношения (7) условие контакта по полным напряжениям можно переписать в виде $C_1^F u_i^1 - C_2^F u_i^2 = 0$ и выделить вариацию этой величины на поверхности контакта. Полная система условий контакта для вариационного уравнения (8), с учетом того, что $n_j^1 = n_j$ и $n_j^2 = -n_j$, принимает вид:

$$\begin{cases} R_i^1 = R_i^2 \\ E_{ijnm}^1 n_j \frac{\partial U_n^1}{\partial x_m} = E_{ijnm}^2 n_j \frac{\partial U_n^2}{\partial x_m} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_{ijnm}^1 n_j \frac{\partial R_n^1}{\partial x_m} = E_{ijnm}^2 n_j \frac{\partial R_n^2}{\partial x_m} (= \sigma_{ij} n_j) \\ \frac{1}{C_1^F}\sigma_{ij} n_j - u_r^1 = \frac{1}{C_2^F}\sigma_{ij} n_j - u_r^2 \end{cases}$$

Эту систему можно записать в симметричном относительно U_i и u_i виде:

$$\begin{cases} U_i^1 - U_i^2 = (\frac{1}{C_1^F} - \frac{1}{C_2^F})\sigma_{ij} n_j \\ E_{ijnm}^1 n_j \frac{\partial U_n^1}{\partial x_m} = E_{ijnm}^2 n_j \frac{\partial U_n^2}{\partial x_m} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_i^1 - u_i^2 = (\frac{1}{C_1^F} - \frac{1}{C_2^F})\sigma_{ij} n_j \\ E_{ijnm}^1 n_j \frac{\partial u_n^1}{\partial x_m} = E_{ijnm}^2 n_j \frac{\partial u_n^2}{\partial x_m} \end{cases} \qquad (9)$$

Таким образом, классические, полные и, значит, когезионные напряжения непрерывны при переходе через поверхность контакта. Непрерывны при переходе через поверхность контакта и полные перемещения. Однако, отдельно классические и когезионные перемещения терпят равный разрыв, пропорциональный вектору полных напряжений на поверхности контакта.

В заключение, сформулируем лагранжиан теории в терминах U_i и u_i. Проводя обратные преобразования от вариационного уравнения к вариации лагранжиана, получим:

$$\delta L = 0$$

Здесь:

$$
\begin{aligned}
&L = L_U - L_u \\
&L_U = (\iiint P_i^V U_i dV + \oiint P_i^F U_i dF) - \frac{1}{2}\iiint E_{ijnm}\frac{\partial U_n}{\partial x_m}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}dV \\
&L_u = (\iiint P_i^V u_i dV + \oiint P_i^F u_i dF) - \\
&-\frac{1}{2}\iiint (E_{ijnm}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + C^V u_i u_i)dV - \frac{1}{2}\oiint C^F u_i u_i dF
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

Вариационная формулировка (8), (10) отличается от традиционных постановок градиентных моделей.

1. Она позволяет рассматривать моментную среду как совокупность двух вложенных друг в друга сред: «классической» и «когезионной».
2. Она позволяет обойтись без понятий моментных напряжений и кривизн.
3. Использовать богатый исследовательский инструментарий классической теории упругости везде, где решатель способен включать во внешние нагрузки винклеровские основания в объеме среды и на поверхности.
4. Позволяет описать масштабные эффекты, привлекая минимальное количество неклассических параметров, в данном случае – два. Один, «когезионный», C^V - в объеме среды, и второй, «адгезионный», C^F - на поверхности среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Белов П.А., Лурье С.А. «Континуальная теория адгезионных взаимодействий поврежденных сред», «Механика композиционных материалов и конструкций», 2009, т.15, №4.
2. Lurie S.A., Belov P.A. «Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstructure materials». BOOK series "Advances in Mechanics and Mathematics". Generalized Continua. Springer, New York, (in print).
3. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. «Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц», 1960, ФТТ, т. 2, вып. 7.
4. Jaramillo T.J. «A generalization of the energy function of elasticity theory», Dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago, 1929.
5. Toupin R.A. «Elastic materials with couple-stresses», 1962, Arch. Ration. Mech. And Analysis, 11.

Сведения об авторах:
Белов Петр Анатольевич, к.ф.м.н., ООО «НИК», г. Жуковский, Россия, e-mail: Petr.A.Belov@boeing.com
Лурье Сергей Альбертович, д.т.н, проф., зав.лаб., Учреждение Российской академии наук Институт прикладной механики РАН, г. Москва, e-mail: lurie@ccas.ru