УДК 539.3

П.А. Белов

ОАО «Московский машиностроительный экспериментальный завод – композиционные технологии», Москва, Россия

ТЕОРИЯ СРЕД С СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ: ОБЩАЯ И ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ МЕЖФАЗНОГО СЛОЯ

Для моделей сред с полями сохраняющихся дислокаций дается формулировка и доказательство теорем, устанавливающих эквивалентность градиентных моделей и модели классической неоднородной среды. Вводится тензор модулей эквивалентной классической неоднородной среды в виде функции компонентов тензора дислокационной поврежденности и компонентов тензоров модулей, отражающих дислокационные свойства среды. Устанавливается, что области, в которых этот тензор существенно зависит от координат, локализуются вокруг поверхностей, линий и точек возмущения. Такие области трактуются как межфазный слой.

Ключевые слова: механика дефектных сред, поля сохраняющихся дислокаций, межфазный слой, эффективные свойства композитов, неклассические упругие характеристики.

P.A. Belov

JSC «Moscow Experimental Machine building Plant – Composite Technologies», Moscow, Russia

THE THEORY OF MEDIA WITH CONSERVED DISLOCATIONS: GENERAL AND APPLIED THEORIES OF INTERFACE LAYER

This work presents the formulation and the proof of the theorems, establishing equivalence of gradient models and classical model of the non-uniform media, for models of media with fields of conserved dislocations. Tensor of moduli of the equivalent classical non-uniform media is presented in the form of obvious function of components of tensor of dislocation damaging and components of tensors of moduli, reflecting dislocation properties of media. It is shown, that the area, where the this tensor essentially depends on coordinates, is localized around of surfaces, lines and points of indignation. Such area is treatment as the interphase layer.

Key words: damaged media mechanics, fields of conserved dislocations, interface layer, effective properties of composites, nonclassical moduli.

1. Определение тензора поврежденности

Рассмотрим лагранжиан L «простейшей» модели сред с сохраняющимися дислокациями [1–5]:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \left\{ C^{11}_{ijnm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + 2C^{12}_{ijnm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}d^{\Xi}_{nm} + \right.$$

$$\left. + C^{22}_{ijnm}d^{\Xi}_{ij}d^{\Xi}_{nm} + C^{33}_{ijnm}\Xi_{nm}\Xi_{ij} \right\} dV, \qquad (1)$$

$$C^{pq}_{ijnm} = \lambda^{pq}\delta_{ij}\delta_{nm} + \left(\mu^{pq} + \chi^{pq}\right)\delta_{in}\delta_{jm} + \left(\mu^{pq} - \chi^{pq}\right)\delta_{im}\delta_{jn}.$$

Здесь R_i – вектор перемещений, $d^0_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$ – тензор стесненной дисторсии, d^{Ξ}_{ij} – тензор свободной дисторсии, Ξ_{ij} – тензор дислокаций Де Вита, C^{pq}_{ijnm} – тензоры модулей дефектной среды. Введем тензор дислокационной поврежденности t_{ij}, такой, что

$$d^{\Xi}_{ij} = t_{ia}d^0_{aj},$$

$$\Xi_{ij} = \frac{\partial d^{\Xi}_{in}}{\partial x_m}Э_{nmj} = \frac{\partial t_{ia}}{\partial x_m}Э_{nmj}d^0_{an} + t_{ia}\frac{\partial d^0_{an}}{\partial x_m}Э_{nmj} = \frac{\partial t_{ip}}{\partial x_b}Э_{qbj}d^0_{pq} = T_{ijpq}d^0_{pq}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в лагранжиан (1), получим

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint C_{ijnm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}dV,$$

$$C_{ijnm} = C^{11}_{ijnm} + 2C^{12}_{ijqm}t_{qn} + C^{22}_{pjqm}t_{pi}t_{qn} + C^{33}_{abcd}T_{abij}T_{cdnm}. \qquad (3)$$

В результате модель сред с сохраняющимися дислокациями (1) приведена к виду модели классической неоднородной среды (3). В ней тензор модулей C_{ijnm} становится тензорным полем, отличным от постоянного поля там, где существенным является вклад составляющих, содержащих t_{ij}. Такими областями являются окрестности поверхностей, линий и точек возмущения. Эти области можно трактовать как некоторые межфазные слои с переменными по координатам упругими свойствами, что и отражено в структуре тензорного поля C_{ijnm}. Переменные по координатам упругие свойства, определяемые концентрацией сохраняющихся дислокаций, в областях таких межфазных слоев можно описать с помощью двух алгоритмов. Первый: решение связанной задачи механики сред с сохраняющимися дислокациями (1) с искомыми полями R_i и d_{ij}^{Ξ}. Второй: пошаговый пересчет компонентов тензорного поля C_{ijnm} в рамках итерационной процедуры последовательного интегрирования подсистем уравнений относительно R_i и d_{ij}^{Ξ}.

2. Определение модели поврежденного межфазного слоя

Представим лагранжиан (3) модели эквивалентной неоднородной классической среды в следующем виде:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \left[C_{ijnm} - \frac{1}{V}\iiint C_{ijnm}dV\right]\left[\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{V}\iiint \frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}dV\right]dV - \frac{1}{2V}\iiint C_{ijnm}dV \iiint \frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}dV. \tag{4}$$

Введем обозначения:

$$E_{ijnm} = \frac{1}{V}\iiint C_{ijnm}dV,$$
$$\varepsilon_{ijnm} = \frac{1}{V}\iiint \frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}dV. \tag{5}$$

Обратим внимание на то, что компоненты тензора эффективных модулей E_{ijnm}, с одной стороны, не зависят от координат, а с другой стороны, являются функционалами тензорного поля t_{ij} в соответствии с (3) и (5). Пренебрегая в лагранжиане (4) первым слагаемым потенциальной энергии, получим лагранжиан теории межфазного слоя

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint E_{ijnm}\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}dV. \tag{6}$$

Соответствующее уравнение Эйлера выглядит следующим образом:

$$\delta L = \iiint \left(E_{ijnm}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m} + P_i^V\right)\delta R_i dV + \oint\int \times$$
$$\times\left(P_i^F - E_{ijnm}n_j\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\right)\delta R_i dF - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijnm}V\delta E_{ijnm} = 0.$$

Полученное вариационное уравнение распадается на последовательность двух краевых задач.

Первая краевая задача

$$\iiint\left(E_{ijnm}\frac{\partial^2 R_n}{\partial x_j \partial x_m}+P_i^V\right)\delta R_i dV+\oint\int\left(P_i^F-E_{ijnm}n_j\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\right)\delta R_i dF=0 \quad (7)$$

сводится к краевой задаче для однородной эффективной среды, если заданы или вычислены эффективные модули E_{ijnm}. Как уже отмечалось выше, эффективные модули являются функционалами независимого тензорного поля t_{ij} и определяются из второй краевой задачи.

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijnm}\delta\iiint C_{ijnm}dV=$$

$$=\iiint\left(C_{ijqm}^{12}\varepsilon_{ijnm}+C_{pjqm}^{22}\varepsilon_{ijnm}t_{pi}-C_{abqd}^{33}\varepsilon_{ijnm}Э_{bjg}Э_{dmf}\frac{\partial^2 t_{ai}}{\partial x_f \partial x_g}\right)\delta t_{qn}dV+$$

$$+\oint\int C_{abqd}^{33}\varepsilon_{ijnm}Э_{bjg}Э_{dmf}\frac{\partial t_{ai}}{\partial x_g}n_f\delta t_{qn}dF=0.$$

Введем обозначения:

$$C_{ijqm}^{12}\varepsilon_{ijnm}=U_{qn}^{12},\quad C_{pjqm}^{22}\varepsilon_{ijnm}=U_{qnpi}^{22},\quad C_{abqd}^{33}\varepsilon_{ijnm}Э_{bjg}Э_{dmf}=U_{qnfaig}^{33}. \quad (8)$$

Тогда вторая краевая задача принимает следующий окончательный вид:

$$\iiint\left(U_{ij}^{12}+U_{ijnm}^{22}t_{nm}-U_{ijknml}^{33}\frac{\partial^2 t_{nm}}{\partial x_k \partial x_l}\right)\delta t_{ij}dV+\oint\int U_{ijknml}^{33}\frac{\partial t_{nm}}{\partial x_l}n_k\delta t_{ij}dF=0. \quad (9)$$

Эта краевая задача дает возможность определить поврежденность t_{ij} и механические и геометрические свойства межфазных слоев повреждений, если заданы или вычислены тензоры энергий $U_{ij}^{12}, U_{ijnm}^{22}, U_{ijknml}^{33}$.

Для изолированного тела, без адгезионных свойств поверхности, краевая задача (9) сводится к алгебраической:

$$U_{ij}^{12}+U_{ijnm}^{22}t_{nm}=0 \quad\Rightarrow\quad U_{pqij}^{-22}U_{ijnm}^{22}=\delta_{pn}\delta_{qm} \quad\Rightarrow\quad t_{pq}=-U_{pqij}^{-22}U_{ij}^{12}.$$

Это решение определяет единственный макроэффект в дефектных средах – переход от тензора супермодулей C^{11}_{ijnm} к тензору «поврежденных» модулей $E_{ijnm} = \overline{C}_{ijnm}$:

$$\overline{C}_{ijnm} = C^{11}_{ijnm} - 2C^{12}_{ijqm} U^{-22}_{qnab} U^{12}_{ab} + C^{22}_{pjqm} U^{-22}_{picd} U^{12}_{cd} U^{-22}_{qnab} U^{12}_{ab}.$$

Межфазные слои повреждений, как области специфических краевых эффектов, могут появиться только при формулировке контактных задач.

В соответствии с (9) контактная задача для межфазного слоя принимает вид

$$\iiint\limits_{\mathrm{I}} \left(U^{12}_{ij} + U^{22}_{ijnm} t_{nm} - U^{33}_{ijknml} \frac{\partial^2 t_{nm}}{\partial x_k \partial x_l} \right) \delta t_{ij} dV +$$

$$+ \iint\limits_{\mathrm{I}F} U^{33}_{ijknml} \frac{\partial t_{nm}}{\partial x_l} n_k \delta t_{ij} dF + \iint\limits_{C} U^{33}_{ijknml} \frac{\partial t_{nm}}{\partial x_l} (+n_k) \delta t_{ij} dF +$$

$$+ \iiint\limits_{\mathrm{II}} \left(U^{12}_{ij} + U^{22}_{ijnm} t_{nm} - U^{33}_{ijknml} \frac{\partial^2 t_{nm}}{\partial x_k \partial x_l} \right) \delta t_{ij} dV +$$

$$+ \iint\limits_{\mathrm{II}F} U^{33}_{ijknml} \frac{\partial t_{nm}}{\partial x_l} n_k \delta t_{ij} dF + \iint\limits_{C} U^{33}_{ijknml} \frac{\partial t_{nm}}{\partial x_l} (-n_k) \delta t_{ij} dF = 0.$$

Индекс I относится к первому телу, II – ко второму, IF – к свободной поверхности первого тела, IIF – к свободной поверхности второго, C – к поверхности контакта. Переменные, входящие в подынтегральные выражения, не снабжены соответствующими индексами, чтобы не загромождать эти выражения. Энергии контакта для первого и второго тела должны быть записаны для разных сторон поверхности контакта. Единичные векторы нормали к ним коллинеарны, но имеют разные знаки. Стороной с положительным направлением выбрана сторона поверхности контакта первого тела с нормалью $(+n_k)$, тогда сторона поверхности контакта второго тела будет иметь нормаль, противоположную по знаку, и обозначена как $(-n_k)$. Пусть t_{ij} для каждого тела удовлетворяет «статическим» граничным условиям на свободных от контакта поверхностях. Выбор этих условий обусловлен тем, что нет возможности задавать/управлять поврежденностью поверхности, если поверхности контакта адгезионно пассивны [6]. Поэтому $\delta t_{ij} \neq 0$. С учетом этого вариационное уравнение для межфазного слоя поврежденности принимает вид

$$\iint\limits_{C} \left\{ \left(U_{ijknml}^{33}\right)_{\mathrm{I}} \frac{\partial (t_{nm})_{\mathrm{I}}}{\partial x_l} \delta (t_{ij})_{\mathrm{I}} - \left(U_{ijknml}^{33}\right)_{\mathrm{II}} \frac{\partial (t_{nm})_{\mathrm{II}}}{\partial x_l} \delta (t_{ij})_{\mathrm{II}} \right\} n_k dF =$$

$$= \iint\limits_{C} \left\{ \left[\left(U_{ijknml}^{33}\right)_{\mathrm{I}} \frac{\partial (t_{nm})_{\mathrm{I}}}{\partial x_l} - \left(U_{ijknml}^{33}\right)_{\mathrm{II}} \frac{\partial (t_{nm})_{\mathrm{II}}}{\partial x_l} \right] \delta \left[\frac{1}{2} (t_{ij})_{\mathrm{I}} + \frac{1}{2} (t_{ij})_{\mathrm{II}} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(U_{ijknml}^{33}\right)_{\mathrm{I}} \frac{\partial (t_{nm})_{\mathrm{I}}}{\partial x_l} + \left(U_{ijknml}^{33}\right)_{\mathrm{II}} \frac{\partial (t_{nm})_{\mathrm{II}}}{\partial x_l} \right] \delta \left[\frac{1}{2} (t_{ij})_{\mathrm{I}} - \frac{1}{2} (t_{ij})_{\mathrm{II}} \right] \right\} n_k dF = 0.$$

Если варьируемые величины при переходе через поверхность контакта не имеют скачка, условия контакта имеют вид

$$\begin{cases} \left(U_{ijknml}^{33}\right)_{\mathrm{I}} \dfrac{\partial (t_{nm})_{\mathrm{I}}}{\partial x_l} - \left(U_{ijknml}^{33}\right)_{\mathrm{II}} \dfrac{\partial (t_{nm})_{\mathrm{II}}}{\partial x_l} = 0, \\ (t_{ij})_{\mathrm{I}} - (t_{ij})_{\mathrm{II}} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Вариационное уравнение для (6) распадается на два: вариационное уравнение классической эквивалентной однородной среды с эффективным тензором модулей (7) и вариационное уравнение межфазного слоя поврежденности (9). Искомыми функциями в первой из перечисленных моделей являются компоненты вектора перемещений R_i, а параметрами – компоненты тензора эффективных модулей E_{ijnm}, являющиеся функционалами компонентов тензора дислокационной поврежденности t_{ij}. И наоборот, искомыми функциями во второй из перечисленных моделей являются компоненты тензора дислокационной поврежденности t_{ij}, а параметрами – компоненты тензоров энергий $U_{ij}^{12}, U_{ijnm}^{22}, U_{ijknml}^{33}$, являющиеся функционалами компонентов вектора перемещений R_i.

Для эквивалентной среды имеет место теорема Клапейрона

$$A - \iiint E_{ijnm} \frac{\partial R_n}{\partial x_m} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} dV = 0 \quad \textit{или} \quad U = A/2. \tag{11}$$

Теорема Клапейрона (11) позволяет из (6), при поле перемещений, удовлетворяющем (7), сформулировать лагранжиан для межфазного слоя, из которого следует вариационное уравнение (9)

$$
\begin{gathered}
L=\frac{1}{2}\iiint E_{ijnm}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{R_i}{\partial x_j}dV=\frac{1}{2}E_{ijnm}\varepsilon_{ijnm}V= \\
=\frac{1}{2}\iiint\left(C^{11}_{ijnm}\varepsilon_{ijnm}+2U^{12}_{ij}t_{ij}+U^{22}_{ijnm}t_{ij}t_{nm}+U^{33}_{ijknml}\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial t_{nm}}{\partial x_l}\right)dV.
\end{gathered} \tag{12}
$$

Заметим, что первое слагаемое $C^{11}_{ijnm}\varepsilon_{ijnm}$ в данной постановке можно отбросить, так как при заданных перемещениях вариация этого слагаемого обращается в ноль в силу $\delta\varepsilon_{ijnm}=0$.

3. Прикладная теория межфазного слоя

Вариационное уравнение (9) и соответствующий ему лагранжиан (12) приводят в общем случае к системе девяти уравнений второго порядка и соответствующей краевой задаче, решение которой является достаточно сложным. Поэтому представляется целесообразным предложить упрощенную, прикладную, модель, содержащую меньшее количество неизвестных и меньшее количество физических параметров.

Первая цель достигается введением векторного потенциала для тензора дислокационной поврежденности:

$$
t_{ij}=\frac{\partial t_i}{\partial x_j}. \tag{13}
$$

Лагранжиан (12) при этом принимает вид

$$
L=\oint\int U^{12}_{ij}n_j t_i dF+\frac{1}{2}\iiint\left(U^{22}_{ijnm}\frac{\partial t_i}{\partial x_j}\frac{\partial t_n}{\partial x_m}+U^{33}_{ijknml}\frac{\partial^2 t_i}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial^2 t_n}{\partial x_m\partial x_l}\right)dV. \tag{14}
$$

Обозначим $U^{12}_{ij}n_j=-P^t_i$. Тогда с точностью до знака лагранжиан (14) будет совпадать с лагранжианом градиентной модели Тупина [2], если трактовать вектор-потенциал t_i как вектор дополнительных перемещений в межфазном слое, а тензоры энергии $U^{22}_{ijnm}, U^{33}_{ijknml}$ как соответствующие тензоры модулей межфазного слоя.

$$L=\oint\int P_i^t t_i dF-\frac{1}{2}\iiint\left(U_{ijnm}^{22}\frac{\partial t_i}{\partial x_j}\frac{\partial t_n}{\partial x_m}+U_{ijknml}^{33}\frac{\partial^2 t_i}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial^2 t_n}{\partial x_m \partial x_l}\right)dV. \quad (15)$$

Специфика данной постановки заключается в том, что и «внешняя нагрузка» P_i^t, и «тензоры модулей» $U_{ijnm}^{22}, U_{ijknml}^{33}$ межфазного слоя зависят от деформированного состояния тела в целом ε_{ijnm} (5), а также от физических параметров дефектной среды фазы – тензоров модулей $C_{ijnm}^{12}, C_{ijnm}^{22}, C_{ijnm}^{33}$.

Вторая цель достигается введением «гипотезы пропорциональности» тензоров $C_{ijnm}^{12}, C_{ijnm}^{33}$ тензору C_{ijnm}^{22}.

$$C_{ijnm}^{12}=kC_{ijnm}^{22} \qquad C_{ijnm}^{33}=h^2 C_{ijnm}^{22}. \quad (16)$$

Таким образом, физические свойства межфазного слоя для каждой фазы определяются пятью параметрами: тремя компонентами изотропного тензора C_{ijnm}^{22} и введенными параметрами k, h, вместо девяти параметров – компонентов тензоров $C_{ijnm}^{12}, C_{ijnm}^{22}, C_{ijnm}^{33}$. Таким образом, показано, что механические свойства межфазного слоя относятся к разным объектам (тензорам $C_{ijnm}^{12}, C_{ijnm}^{22}, C_{ijnm}^{33}$) и не могут быть объединены. Межфазный слой для каждой фазы является изотропным неклассическим объектом, обладающим неклассическими механическими свойствами, которые в общем случае характеризуются девятью параметрами, а в приближенном (прикладном) варианте – пятью.

Библиографический список

1. Лурье С.А., Белов П.А. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием» / Современные проблемы механики гетерогенных сред: сб. тр. конф.; Ин-т прикл. механики РАН. – М., 2005. – С. 235–268.

2. Lurie S.A., Belov P.A. Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstructure materials. BOOK series «Advances in Mechanics and Mathematics». Generalized Continua. Springer. – N. Y., 2010.

3. Lurie S., Belov P., Tuchkova N. The Application of the multiscale models for description of the dispersed composites // Int. J. Comp Mater Sci, A. – 2005. – Vol. 36(2). – P. 145–152.
4. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials / S.A. Lurie, P.A. Belov, D.B. Volkov-Bogorodsky, N.P. Tuchkova // J. Mat. Sci. – 2006. – 41(20). – P. 6693–6707.
5. Eshelby's inclusion problem in the gradient theory of elasticity. Applications to composite materials / S. Lurie, D. Volkov-Bogorodsky, A. Leontiev, E. Aifantis // International Journal of Engineering Science. – 2011. – Vol. 49. – P. 1517–1525.
6. Белов П.А., Лурье С.А. Континуальная теория адгезионных взаимодействий поврежденных сред // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т. 15, № 4. – С. 610–629.

References

1. Lurie S.A., Belov P.A. The theory of continuums with conserved dislocations. Particular cases: Cosserat and Aero-Kuvshinsky continuums, continuums with porous and twinning [Teorija sred s sohranjajuwimisja dislokacijami. Chastnye sluchai: sredy Kossera i Ajero-Kuvshinskogo, poristye sredy, sredy s "dvojnikovaniem"]. The collection of works of conference «Modern problems of mechanics of heterogeneous environments», 2005, Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, pp. 235–268.
2. Lurie S.A., Belov P.A. Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstruc-tured materials // One hundred years after the Cosserats. Series: Advances in Mechanics and Mathematics. 2010. Vol. 21. Maugin, G.A., Metrikine, A.V. (Eds.).1st Ed. Springer.pp. 223–232.
3. Lurie S., Belov P., Tuchkova N. The Application of the multiscale models for description of the dispersed composites // Int. J. Comp Mater Sci, A. 2005. Vol. 36(2). 145–152.
4. Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D.B., Tuchkova N.P. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // J. Mat. Sci. 2006. 41(20). P. 6693–6707.
5. Lurie S., Volkov-Bogorodsky D., Leontiev A., Aifantis E. Eshelby's inclusion problem in the gradient theory of elasticity. Applications to composite materials // International Journal of Engineering Science. 2011. Vol. 49. P. 1517–1525.

6. Belov P.A., Lurie S.A. The theory of adhesive interactions of the damaged continuums [Kontinual'naja teorija adgezionnyh vzaimodejstvij povrezhdennyh sred] // Mechanics of composite materials and designs. 2009. Vol. 15. No. 4. P. 610–629.

Об авторах

Белов Петр Анатольевич (Москва, Россия) – кандидат физико-математических наук, начальник отдела прочности ОАО «Московский машиностроительный экспериментальный завод – композиционные технологии» гос. концерна «РосТехнологии» (г. Москва, Магистральный проезд, д. 9., e-mail: BelovPA@yandex.ru).

About the authors

Belov Petr Anatolevich (Moscow, Russia) – PhD, Head of Stress and Resource Team JSC «Moscow Experimental Machine building Plant – Composite Technologies» (123290, 9, 1-st Magistralniy passage, Moscow, e-mail: BelovPA@yandex.ru).

Получено 28.10.2011