ТЕОРИЯ СРЕД С СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ: ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ МИНДЛИНА.

Белов П.А.

В работе строится модель среды с полями сохраняющихся дислокаций. Для построения модели используется «кинематический» вариационный принцип. В отличие от модели Миндлина осуществлен учет не только кривизн, связанных с градиентом свободной дисторсии, но и кривизн, связанных с градиентом стесненной дисторсии. В результате, в предположении обратимости процессов деформирования и физической линейности определяющих соотношений, строятся лагранжиан теории, уравнения Эйлера и спектр краевых задач. Доказывается, что все известные градиентные модели сред являются строгими частными случаями сформулированной теории. Доказана теорема об эквивалентности сформулированной теории модели неоднородной среды Тупина. С её помощью дается объяснение переменности механических свойств межфазных слоёв и нестабильности экспериментальных значений неклассических модулей в рамках существующих градиентных моделей.

Ключевые слова: механика дефектных сред, поля сохраняющихся дислокаций, масштабные эффекты, наномеханика, когезионные взаимодействия, адгезионные взаимодействия, теория межфазного слоя, композиты, неклассические упругие характеристики.

THE THEORY OF CONTINUUM WITH CONSERVED DISLOCATIONS: GENERALIZATION OF MINDLIN THEORY.

Belov P.A.

In work the model of continuum with fields of conserved dislocations is constructed. The "kinematic" variation principle is used for theory formulation. Unlike the model of Mindlin the account not only curvatures, connected with a gradient of free distortion, but also curvatures, connected with a gradient of constrained distortion is carried out. As result, in the assumption of convertibility of processes of deformation and physical linearity of Hook’s law, Euler's equations and a spectrum of boundary problems are constructed. It is proved that all known gradient theories are strict special cases of the formulated theory. The theorem about equivalence of the formulated theory and non-uniform model of Toupin continuum is proved. With its help the explanation of variability of mechanical properties of interface layers and instability of experimental values of nonclassical moduli in the framework of existing gradient theories is offered.

Keywords: defectness continuum mechanics, fields of conserved dislocations, multiscale effects, nanomechanics, cohesion, adhesion, interface layer, composites, nonclassical moduli.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА.

Общая теория полей дефектов изложена в [1] и развита в [2]. Здесь будут приведены лишь определения и уравнения, необходимые для дальнейшего построения модели.

Пусть кинематическая переменная третьего ранга D_{ijn} в среде определена следующим образом:

$$D_{ijn} = \frac{\partial^3 D^0}{\partial x_n \partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_n \partial x_j} + \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_n} \tag{1}$$

Здесь D^0, D_i^1, D_{ij}^2 - кинематические переменные нулевого, первого и второго рангов, которые в [1-2] трактовались соответственно как потенциал интегрируемой части перемещений, неинтегрируемая часть перемещений и неинтегрируемая (свободная) дисторсия. Верхние индексы кинематических переменных являются номером «сорта» переменных. «Сорт» - общее свойство кинематических переменных разных рангов. Он равен рангу сохраняющегося («материнского») псевдотензора-источника дефектов.
Можно убедиться, что в соответствии с (1) псевдотензор-источник дефектов третьего сорта T_{ijk} тождественно равен нулю:

$$\frac{\partial D_{ijp}}{\partial x_q} Э_{pqk} = T_{ijk} \equiv 0 \tag{2}$$

Здесь $Э_{pqk}$ - псевдотензор Леви-Чивиты.
Таким образом, (2) является необходимым и достаточным условием отсутствия полей дефектов третьего сорта (обобщенных дисклинаций) в рассматриваемой среде. Сворачивая (1) с тензором Леви-Чивиты, получим ненулевой псевдотензор-источник дефектов второго сорта - сохраняющихся дислокаций:

$$D_{inm} Э_{nmj} = \frac{\partial D_{in}^2}{\partial x_m} Э_{nmj} = T_{ij}^2 \neq 0 \qquad \frac{\partial T_{ij}^2}{\partial x_j} \equiv 0 \tag{3}$$

Таким образом, выяснено, что в среде со связями (1) существуют поля сохраняющихся дислокаций, с ненулевым псевдотензором-источником T_{ij}^2 (тензором Де Вита). Соотношение (2) является необходимым и достаточным условием существования квадратур уравнений (1) $D_{ij} = \int_{M_0}^{M_x} D_{ijn} dx_n$ (где M_0 - начальная, а M_x - конечная точка траектории интегрирования):

$$D_{ij} = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2 \tag{4}$$

Последующая квадратура $D_i = \int_{M_0}^{M_x} D_{ij} dx_j$ дает определение вектора дефектных перемещений D_i и вектора дислокаций D_i^2:

$$D_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1 + D_i^2 \tag{5}$$

Здесь: $D_i^2 = \int_{M_0}^{M_x} D_{ij}^2 dx_j$ - дислокации второго сорта (три типа сохраняющихся дислокаций).
Тип дислокаций определен разложением свободной дисторсии и, следовательно, вектора дислокаций на девиаторную, шаровую и антисимметричную части:

$$D_{ij}^2 = \gamma_{ij}^2 + \frac{1}{3}\theta^2\delta_{ij} - \omega_k^2 Э_{ijk} \tag{6}$$

$$D_i^2 = \int\limits_{M_0}^{M_x} \gamma_{ij}^2 dx_j + \int\limits_{M_0}^{M_x} \frac{1}{3}\theta^2\delta_{ij} dx_j + \int\limits_{M_0}^{M_x} (-\omega_k^2 Э_{ijk}) dx_j \tag{7}$$

Отсюда следует, что вектор дислокаций является суммой трех типов дислокаций, для каждого из которых справедлив свой закон сохранения.
Для γ-дислокаций:

$$(D_i^2)_\gamma = \int\limits_{M_0}^{M_x} \gamma_{ij}^2 dx_j \qquad (T_{ij}^2)_\gamma = \frac{\partial \gamma_{im}^2}{\partial x_n} Э_{mnj} \qquad \frac{\partial (T_{ij}^2)_\gamma}{\partial x_j} \equiv 0 \tag{8}$$

Для θ-дислокаций:

$$(D_i^2)_\theta = \int\limits_{M_0}^{M_x} \frac{1}{3}\theta^2\delta_{ij} dx_j \quad (T_{ij}^2)_\theta = \frac{1}{3}\frac{\partial \theta^2}{\partial x_n} Э_{inj} \quad \frac{\partial (T_{ij}^2)_\theta}{\partial x_j} \equiv 0 \tag{9}$$

Для ω-дислокаций:

$$(D_i^2)_\omega = \int\limits_{M_0}^{M_x} (-\omega_k^2 Э_{ijk}) dx_j \quad (T_{ij}^2)_\omega = -\frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_n} Э_{imk} Э_{mnj} \quad \frac{\partial (T_{ij}^2)_\omega}{\partial x_j} \equiv 0 \tag{10}$$

Поле дефектных перемещений D_i (5) можно представить как сумму непрерывной части перемещений $R_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1$ и поля разрывов перемещений D_i^2, обусловленных сохраняющимися дислокациями.

$$D_i = R_i + D_i^2 \tag{11}$$

Непрерывное поле дисторсии (4) также может быть представлено как сумма двух полей непрерывных дисторсий $D_{ij}^1 = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$ и D_{ij}^2 (соответственно, стесненной и свободной дисторсии):

$$D_{ij} = D_{ij}^1 + D_{ij}^2 \tag{12}$$

И наконец, соотношение (1), которое является общим решением условия отсутствия дефектов третьего сорта (2), представлено в таком же виде:

$$D_{ijk}^1 = \frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j} \quad D_{ijk}^2 = \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \quad D_{ijk} = D_{ijk}^1 + D_{ijk}^2 \tag{13}$$

Таким образом, в качестве непрерывных аргументов лагранжиана формулируемой теории могут быть выбраны: непрерывная часть вектора перемещений R_i в соответствии с (11), дисторсии двух сортов D_{ij}^1, D_{ij}^2 в соответствии с (12) и кривизны двух сортов D_{ijk}^1, D_{ijk}^2 в соответствии с (13). Здесь, также, следует учесть сформулированные выше связи между этими кинематическими переменными:

$$D_{ij}^1=\frac{\partial R_i}{\partial x_j}=R_{i,j}\quad D_{ijk}^1=\frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_k}=R_{i,jk}\quad D_{ijk}^2=\frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \tag{14}$$

Связи (14) являются кинематической моделью формулируемой среды.

2. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА.

В соответствии с «кинематическим» вариационным принципом, сформулированным в [3] и развитым в [4-8], связи (14) полностью определяют и силовую модель среды для физически линейных сред через неопределенные множители Лагранжа, на которых они вводятся в выражение возможной работы внутренних сил. Выражение возможной работы внутренних сил $\delta\overline{U}$ для моделируемой среды имеет вид:

$$\begin{aligned}\delta\overline{U}&=\iiint[\sigma_{ij}^1\delta(D_{ij}^1-\frac{\partial R_i}{\partial x_j})+\sigma_{ijk}^1\delta(D_{ijk}^1-\frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_k})+\sigma_{ijk}^2\delta(D_{ijk}^2-\frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k})]dV+\\&+\oiint[a_{ik}^1\delta(D_{ij}^1-\frac{\partial R_i}{\partial x_j})\delta_{jk}^*+a_{ijq}^1\delta(D_{ijk}^1-\frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_k})\delta_{qk}^*+a_{ijq}^2\delta(D_{ijk}^2-\frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k})\delta_{qk}^*]dF+\\&+\sum\oint[b_i^1\delta(D_{ij}^1-\frac{\partial R_i}{\partial x_j})s_j+b_{ij}^1\delta(D_{ijn}^1-\frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_n})s_n+b_{ij}^2\delta(D_{ijn}^2-\frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_n})s_n]ds=0\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь n_i - орт нормали к поверхности, s_i - орт касательной к ребру поверхности (если таковое существует), $\delta_{ij}^*=\delta_{ij}-n_in_j$ - «плоский» тензор Кронекера, $\sigma_{ij}^1,\sigma_{ijn}^1,\sigma_{ijn}^2$ - неопределенные множители Лагранжа, являющиеся силовыми факторами, обеспечивающими выполнение соответствующих кинематических связей (14) внутри объема среды, $a_{ik}^1,a_{ijk}^1,a_{ijk}^2$ - на поверхности среды, и b_i^1,b_{ij}^1,b_{ij}^2 - на ребрах поверхности среды.

Обратим внимание: так как производные на поверхности определены только в касательной плоскости, а на ребрах – только в направлении орта касательной к ребру s_i, на поверхности используются только те связи, которые содержат «касательные» производные вида $\delta_{ij}^*\partial(...)/\partial x_j$, а на ребрах – производные вдоль ребра $s_i\partial(...)/\partial x_i$.

Следуя алгоритму построения моделей сред в соответствии с «кинематическим» вариационным принципом, выражение возможной работы внутренних силовых факторов (15) преобразуется в линейную вариационную форму:

$$\delta\overline{U} = \iiint [\frac{\partial \sigma_{ij}^1}{\partial x_j}\delta R_i + (\frac{\partial \sigma_{ijk}^1}{\partial x_k} + \sigma_{ij}^1)\delta D_{ij}^1 + \frac{\partial \sigma_{ijk}^2}{\partial x_k}\delta D_{ij}^2 + \sigma_{ijk}^1 \delta D_{ijk}^1 + \sigma_{ijk}^2 \delta D_{ijk}^2]dV +$$

$$+ \oiint [(\frac{\partial a_{ik}^1}{\partial x_j}\delta_{jk}^* - \sigma_{ij}^1 n_j)\delta R_i + (\frac{\partial a_{ijq}^1}{\partial x_k}\delta_{qk}^* + a_{ik}^1\delta_{jk}^* - \sigma_{ijk}^1 n_k)\delta D_{ij}^1 + a_{ijq}^1\delta(D_{ijk}^1\delta_{qk}^*) +$$

$$+ (\frac{\partial a_{ijq}^2}{\partial x_k}\delta_{qk}^* - \sigma_{ijk}^2 n_k)\delta D_{ij}^2 + a_{ijq}^2\delta(D_{ijk}^2\delta_{qk}^*)]dF +$$

$$+ \sum \oint [(\frac{\partial b_i^1}{\partial x_j}s_j - a_{ik}^1 v_k)\delta R_i + (\frac{\partial b_{ij}^1}{\partial x_n}s_n + b_i^1 s_j - a_{ijq}^1 v_q)\delta D_{ij}^1 + b_{ij}^1\delta(D_{ijn}^1 s_n) + \tag{16}$$

$$+ (\frac{\partial b_{ij}^2}{\partial x_n}s_n - a_{ijq}^2 v_q)\delta D_{ij}^2 + b_{ij}^2\delta(D_{ijn}^2 s_n)]ds + \sum [-b_i^1\delta R_i - b_{ij}^1\delta D_{ij}^1 - b_{ij}^2\delta D_{ij}^2] = 0$$

Если полученная линейная вариационная форма интегрируема, то существует такой потенциал (потенциальная энергия), что его вариация равна возможной работе внутренних сил в форме (16). Следовательно, можно выяснить структуру потенциальной энергии U :

$$U = \iiint U_V dV + \oiint U_F dF + \sum \oint U_S ds + \sum U_P \tag{17}$$

Здесь: U_V - объёмная плотность потенциальной энергии,

U_F - поверхностная плотность потенциальной энергии,

U_S - погонная плотность потенциальной энергии ребер (если они есть),

U_P - потенциальная энергия угловых точек (если они есть).

Как уже было неоднократно показано [3-8], вектор перемещений должен быть исключен из списков аргументов плотностей, чтобы в предельном случае бездефектной неградиентной среды потенциальная энергия совпадала с выражением потенциальной энергии классической теории упругости. В соответствии с (16) и этой оговоркой, аргументами плотностей в общем случае являются:

$$U_V = U_V(D_{ij}^1, D_{ij}^2, D_{ijn}^1, D_{ijn}^2) \tag{18}$$

$$U_F = U_F(D_{ij}^1, D_{ij}^2, D_{ijq}^1\delta_{qk}^*, D_{ijn}^2\delta_{qk}^*) \tag{19}$$

$$U_S = U_S(D_{ij}^1, D_{ij}^2, D_{ijn}^1 s_n, D_{ijn}^2 s_n) \tag{20}$$

$$U_P = U_P(D_{ij}^1, D_{ij}^2) \tag{21}$$

Для каждой плотности можно записать свои формулы Грина, определяющие силовые факторы соответственно: в объёме тела, на поверхности, ребрах и угловых точках:

$$\sigma_{ij}^1 = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}^1} \quad \sigma_{ij}^2 = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ij}^2} \quad \sigma_{ijn}^1 = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ijn}^1} \quad \sigma_{ijn}^2 = \frac{\partial U_V}{\partial D_{ijn}^2} \tag{22}$$

Здесь для обозначения двух сортов напряжений $\sigma_{ij}^1, \sigma_{ij}^2$ и моментных напряжений $\sigma_{ijn}^1, \sigma_{ijn}^2$ использованы те же символы, что и для соответствующих множителей Лагранжа, так как множители Лагранжа более нигде не будут использованы. То же самое касается обозначений и адгезионнных напряжений a_{ij}^1, a_{ij}^2 и моментов a_{ijn}^1, a_{ijn}^2:

$$a_{ij}^1 = \frac{\partial U_F}{\partial D_{ij}^1} \quad a_{ij}^2 = \frac{\partial U_F}{\partial D_{ij}^2} \quad a_{ijn}^1 = \frac{\partial U_F}{\partial D_{ijn}^1} \quad a_{ijn}^2 = \frac{\partial U_F}{\partial D_{ijn}^2} \tag{23}$$

По тем же причинам для «реберных» силовых факторов использованы обозначения $b_{ij}^1, b_{ij}^2, B_{ij}^1, B_{ij}^2$:

$$b_{ij}^1 = \frac{\partial U_S}{\partial D_{ij}^1} \quad b_{ij}^2 = \frac{\partial U_S}{\partial D_{ij}^2} \quad B_{ij}^1 = \frac{\partial U_S}{\partial D_{ijn}^1 s_n} \quad B_{ij}^2 = \frac{\partial U_S}{\partial D_{ijn}^2 s_n} \tag{24}$$

Спектр силовых факторов в угловых точках:

$$f_{ij}^1 = \frac{\partial U_P}{\partial D_{ij}^1} \quad f_{ij}^2 = \frac{\partial U_P}{\partial D_{ij}^2} \tag{25}$$

Таким образом, следуя алгоритму построения модели в рамках «кинематического» вариационного принципа, достаточно формально получена структура потенциальной энергии (17)-(21), формулы Грина и силовая модель формулируемой теории (22)-(25), соответствующие выбранной кинематической модели (14).
Далее, в целях упрощения, будут рассматриваться тела, ограниченные гладкой поверхностью (без ребер и угловых точек).

3. УРАВНЕНИЯ ЗАКОНА ГУКА В ОБЪЁМЕ СРЕДЫ.

В предположении физической линейности уравнений закона Гука, объёмная плотность потенциальной энергии U_V должна быть положительно определенной изотропной квадратичной формой своих аргументов.

$$2U_V = C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + C_{ijkmnl}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b \tag{26}$$

Здесь индексы сортности a, b пробегают значения 1, 2 (по количеству сортов дефектов).
Тензоры модулей должны удовлетворять условиям существования потенциальной энергии:

$$C_{ijmn}^{ab} = C_{mnij}^{ba} \qquad C_{ijmn}^{ab} = C_{mnij}^{ab} \tag{27}$$

$$C_{ijkmnl}^{ab} = C_{mnlijk}^{ba} \qquad C_{ijkmnl}^{ab} = C_{mnlijk}^{ab} \tag{28}$$

Тензоры модулей четвертого ранга строятся в виде разложения по базисным тензорам четвертого ранга, которые являются произведениями пары тензоров Кронекера со всеми возможными перестановками индексов:

$$C_{ijmn}^{ab} = \lambda^{ab} \delta_{ij} \delta_{mn} + (\mu^{ab} + \chi^{ab}) \delta_{im} \delta_{jn} + (\mu^{ab} - \chi^{ab}) \delta_{in} \delta_{jm} \tag{29}$$

Первое условие из условий (27) сокращает количество тензоров с четырех до трех. Эти тензоры тождественно удовлетворяют второму из условий (27).
Тензоры модулей шестого ранга строятся в виде разложения по базисным тензорам шестого ранга, которые являются произведениями троек тензоров Кронекера со всеми возможными перестановками индексов:

$$
\begin{aligned}
&C^{ab}_{ijkmnl} = \\
&= C^{ab}_1(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk}) + C^{ab}_2(\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml} + \delta_{mn}\delta_{lj}\delta_{ik}) + \\
&+ C^{ab}_3(\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{ni}\delta_{jk}) + C^{ab}_4(\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{mj}\delta_{nk}\delta_{li}) + \\
&+ C^{ab}_5\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + C^{ab}_6\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} + C^{ab}_7\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + C^{ab}_8\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \\
&+ C^{ab}_9\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{nk} + C^{ab}_{10}\delta_{in}\delta_{mj}\delta_{kl} + C^{ab}_{11}\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mk}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Первое условие из условий (28) сокращает количество тензоров с четырех до трех. Второе из условий (28) сокращает количество модулей в каждом из тензоров с пятнадцати до одиннадцати.

С учетом (29),(30) и (26), уравнения закона Гука для силовых факторов в объеме среды можно получить из обобщенных формул Грина (22):

$$
\begin{aligned}
&\sigma^1_{ij} = C^{11}_{ijmn}\frac{\partial R_m}{\partial x_n} + C^{12}_{ijmn}D^2_{mn} \qquad \sigma^1_{ijk} = C^{11}_{ijkmnl}\frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + C^{12}_{ijkmnl}\frac{\partial D^2_{mn}}{\partial x_l} \\
&\sigma^2_{ij} = C^{21}_{ijmn}\frac{\partial R_m}{\partial x_n} + C^{22}_{ijmn}D^2_{mn} \qquad \sigma^2_{ijk} = C^{21}_{ijkmnl}\frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + C^{22}_{ijkmnl}\frac{\partial D^2_{mn}}{\partial x_l}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

4. УРАВНЕНИЯ ЗАКОНА ГУКА НА ПОВЕРХНОСТИ СРЕДЫ.

Алгоритм построения поверхностной плотности потенциальной энергии U_F аналогичен алгоритму построения объёмной плотности потенциальной энергии U_V.

В предположении физической линейности уравнений закона Гука, поверхностная плотность потенциальной энергии U_F должна быть положительно определенной трансверсально-изотропной квадратичной формой своих аргументов.

$$
2U_F = A^{ab}_{ijmn}D^a_{ij}D^b_{mn} + A^{ab}_{ijkmnl}D^a_{ijk}D^b_{mnl}
\tag{32}
$$

В целях упрощения, здесь не учтены четыре билинейных слагаемых, учитывающих возможное взаимодействие дисторсий с кривизнами. Тензоры модулей должны удовлетворять условиям существования потенциальной энергии:

$$
A^{ab}_{ijmn} = A^{ba}_{ijmn} \qquad A^{ab}_{ijmn} = A^{ab}_{mnij}
\tag{33}
$$

$$
A^{ab}_{ijkmnl} = A^{ba}_{ijkmnl} \qquad A^{ab}_{ijkmnl} = A^{ab}_{mnlijk} \qquad A^{ab}_{ijkmnl}n_l = A^{ab}_{ijkmnl}n_k = 0
\tag{34}
$$

В отличие от изотропных тензоров модулей в объеме, тензоры модулей на поверхности обязаны быть трансверсально-изотропными, так как на поверхности среды существует естественно выделенное направление – нормаль к поверхности. Третье из условий (34) определено тем, что в (32), в соответствии с (19), должны отсутствовать слагаемые, содержащие кривизны с нормальными к поверхности производными.

Тензоры модулей четвертого ранга строятся в виде разложения по базисным тензорам четвертого ранга, которые являются произведениями пар «плоских» тензоров Кронекера $\delta^*_{ij} = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ и/или тензоров вида $(n_i n_j)$ со всеми возможными перестановками индексов:

$$
\begin{aligned}
A^{ab}_{ijmn} &= \lambda^{abF}\delta^*_{ij}\delta^*_{mn} + (\mu^{abF} + \chi^{abF})\delta^*_{im}\delta^*_{jn} + (\mu^{abF} - \chi^{abF})\delta^*_{in}\delta^*_{jm} + \\
&+ \alpha^{qb}(n_i n_n \delta^*_{jm} + n_m n_j \delta^*_{in}) + \beta^{ab}(n_i n_j \delta^*_{mn} + n_m n_n \delta^*_{ij}) + \\
&+ \delta^{abF} n_i n_m \delta^*_{jn} + B^{ab}\delta^*_{im} n_j n_n + + A^{ab} n_i n_j n_m n_n
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Первое из условий (33) сокращает количество тензоров с четырех до трех. Второе сокращает количество модулей в каждом тензоре с десяти до восьми.

Тензоры модулей шестого ранга строятся в виде разложения по базисным тензорам шестого ранга, которые являются произведениями троек «плоских» тензоров Кронекера $\delta^*_{ij} = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ и/или тензоров вида $(n_i n_j)$ со всеми возможными перестановками индексов. Первое из условий (34) сокращает количество тензоров с четырех до трех. Второе сокращает количество модулей в каждом из тензоров с семидесяти шести до сорока восьми, третье – с сорока восьми до двадцати четырех.

$$
\begin{aligned}
A^{ab}_{ijkmnl} &= A^{ab}_1(\delta^*_{ij}\delta^*_{km}\delta^*_{nl} + \delta^*_{mn}\delta^*_{li}\delta^*_{jk}) + A^{ab}_2(\delta^*_{ij}\delta^*_{kn}\delta^*_{ml} + \delta^*_{mn}\delta^*_{lj}\delta^*_{ik}) + \\
&+ A^{ab}_3(\delta^*_{ik}\delta^*_{jm}\delta^*_{nl} + \delta^*_{ml}\delta^*_{ni}\delta^*_{jk}) + A^{ab}_4(\delta^*_{in}\delta^*_{km}\delta^*_{jl} + \delta^*_{mj}\delta^*_{li}\delta^*_{nk}) + \\
&+ A^{ab}_5\delta^*_{ij}\delta^*_{kl}\delta^*_{mn} + A^{ab}_6\delta^*_{ik}\delta^*_{jn}\delta^*_{ml} + A^{ab}_7\delta^*_{im}\delta^*_{kj}\delta^*_{nl} + A^{ab}_8\delta^*_{im}\delta^*_{nj}\delta^*_{kl} + \\
&+ A^{ab}_9\delta^*_{im}\delta^*_{lj}\delta^*_{nk} + A^{ab}_{10}\delta^*_{in}\delta^*_{lk}\delta^*_{jm} + A^{ab}_{11}\delta^*_{il}\delta^*_{km}\delta^*_{nj} + \\
&+ A^{ab}_{12}(n_i n_j \delta^*_{km}\delta^*_{nl} + n_m n_n \delta^*_{li}\delta^*_{jk}) + A^{ab}_{13}(n_i n_j \delta^*_{kn}\delta^*_{ml} + n_m n_n \delta^*_{lj}\delta^*_{ik}) + \\
&+ A^{ab}_{14}(n_i n_j \delta^*_{kl}\delta^*_{mn} + n_m n_n \delta^*_{lk}\delta^*_{ij}) + \\
&+ A^{ab}_{15}(n_i n_n \delta^*_{km}\delta^*_{jl} + n_m n_j \delta^*_{li}\delta^*_{nk}) + A^{ab}_{16}(n_i n_n \delta^*_{ml}\delta^*_{jk} + n_m n_j \delta^*_{ik}\delta^*_{nl}) + \\
&+ A^{ab}_{17}(n_i n_n \delta^*_{lk}\delta^*_{jm} + n_m n_j \delta^*_{kl}\delta^*_{ni}) + \\
&+ A^{ab}_{18} n_i n_m \delta^*_{kj}\delta^*_{nl} + A^{ab}_{19} n_i n_m \delta^*_{nj}\delta^*_{kl} + A^{ab}_{20} n_i n_m \delta^*_{lj}\delta^*_{nk} + \\
&+ A^{ab}_{21} n_j n_n \delta^*_{ik}\delta^*_{ml} + A^{ab}_{22} n_j n_n \delta^*_{im}\delta^*_{kl} + A^{ab}_{23} n_j n_n \delta^*_{il}\delta^*_{km} + A^{ab}_{24}\delta^*_{kl} n_i n_j n_m n_n
\end{aligned}
\tag{36}
$$

С учетом (32), (35) и (36), уравнения закона Гука для силовых факторов на поверхности среды можно получить из обобщенных формул Грина (23):

$$
\begin{aligned}
a^1_{ij} &= A^{11}_{ijmn}\frac{\partial R_m}{\partial x_n} + A^{12}_{ijmn} D^2_{mn} \quad & a^1_{ijn} &= A^{11}_{ijkmnl}\frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + A^{12}_{ijkmnl}\frac{\partial D^2_{mn}}{\partial x_l} \\
a^2_{ij} &= A^{21}_{ijmn}\frac{\partial R_m}{\partial x_n} + A^{22}_{ijmn} D^2_{mn} \quad & a^2_{ijn} &= A^{21}_{ijkmnl}\frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + A^{22}_{ijkmnl}\frac{\partial D^2_{mn}}{\partial x_l}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Сравним уравнения закона Гука в объеме среды (31) и на её поверхности (37). Можно убедиться, что структура уравнений одна и та же. В то же время, есть существенное отличие: тензоры упругих модулей в объеме являются изотропными, в то время как на поверхности среды они обладают трансверсальной изотропией в направлении нормали к поверхности n_i.

5. ЛАГРАНЖИАН И УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА.

Используя формулировки плотностей потенциальной энергии (26) и (32), лагранжиан формулируемой теории можно представить в следующем виде:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [C^{11}_{ijmn}D^1_{ij}D^1_{mn} + 2C^{12}_{ijmn}D^1_{ij}D^2_{mn} + C^{22}_{ijmn}D^2_{ij}D^2_{mn} +$$
$$+ C^{11}_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^1_{mnl} + 2C^{12}_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^2_{mnl} + C^{22}_{ijkmnl}D^2_{ijk}D^2_{mnl}]dV -$$
$$- \frac{1}{2}\oint\!\!\int [A^{11}_{ijmn}D^1_{ij}D^1_{mn} + 2A^{12}_{ijmn}D^1_{ij}D^2_{mn} + A^{22}_{ijmn}D^2_{ij}D^2_{mn} +$$
$$+ A^{11}_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^1_{mnl} + 2A^{12}_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^2_{mnl} + A^{22}_{ijkmnl}D^2_{ijk}D^2_{mnl}]dF \qquad (38)$$

Модель Миндлина. Если в лагранжиане общей теории тензоры «объемных» модулей $C^{11}_{ijkmnl}, C^{12}_{ijkmnl}$ и все тензоры адгезионных модулей положить равными нулю, лагранжиан сформулированной теории совпадет с лагранжианом модели Миндлина [9]:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [C^{11}_{ijmn}D^1_{ij}D^1_{mn} + 2C^{12}_{ijmn}D^1_{ij}D^2_{mn} + C^{22}_{ijmn}D^2_{ij}D^2_{mn} + C^{22}_{ijkmnl}D^2_{ijk}D^2_{mnl}]dV$$

Как было доказано в [8], из модели Миндлина, в свою очередь, следуют как строгие частные случаи: «простейшая» теория сред с сохраняющимися дислокациями [4], теория сред Коссера (теория сред с ω - дислокациями) [10], теория пористых сред (теория сред с θ - дислокациями) [5] и теория сред с γ - дислокациями [5].

Модель Тупина. Пусть все тензоры модулей, содержащие индекс сортности 2, равны нулю. Тогда лагранжиан теории принимает вид, совпадающий с лагранжианом идеальной (бездефектной) среды Тупина с адгезионными свойствами поверхности, а при $A^{11}_{ijmn} = 0$ и $A^{11}_{ijkmnl} = 0$ - с «классической» моделью Тупина [11]:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [C^{11}_{ijmn}D^1_{ij}D^1_{mn} + C^{11}_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^1_{mnl}]dV \qquad (39)$$

Сформулированная теория радикально меняет точку зрения на место модели Тупина в иерархии градиентных моделей. Если раньше модель Тупина трактовалась как приближенная (прикладная) модель, вытекающая из модели Миндлина, благодаря использованию обобщения гипотезы Аэро-Кувшинского, то теперь она занимает, наравне с моделью Миндлина, положение строгого частного случая более общей теории. Из неё, в свою очередь, вытекают как строгие частные случаи: «простейшая» модель когезионного поля [12], модель Аэро-Кувшинского [13] и модель Джеремилло [14].

Математическое обоснование обобщения гипотезы Аэро-Кувшинского. Представим плотности потенциальных энергий в (38) в виде канонических квадратичных форм.

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \{C_{ijmn}D^1_{ij}D^1_{mn} + C^{22}_{ijmn}(D^2_{ij} + C^{-22}_{ijab}C^{21}_{abcd}D^1_{cd})(D^2_{mn} + C^{-22}_{mnfg}C^{21}_{fghk}D^1_{hk}) +$$
$$+ C_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^1_{mnl} + C^{22}_{ijkmnl}(D^2_{ijk} + C^{-22}_{ijkabc}C^{21}_{abcdfg}D^1_{dfg})(D^2_{mnl} + C^{-22}_{mnlpqr}C^{21}_{pqrstu}D^1_{stu})\}dV -$$
$$- \frac{1}{2}\oint\!\!\int \{A_{ijmn}D^1_{ij}D^1_{mn} + A^{22}_{ijmn}(D^2_{ij} + A^{-22}_{ijab}A^{21}_{abcd}D^1_{cd})(D^2_{mn} + A^{-22}_{mnfg}A^{21}_{fghk}D^1_{hk}) +$$
$$+ A_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^1_{mnl} + A^{22}_{ijkmnl}(D^2_{ijk} + A^{-22}_{ijkabc}A^{21}_{abcdfg}D^1_{dfg})(D^2_{mnl} + A^{-22}_{mnlpqr}A^{21}_{pqrstu}D^1_{stu})\}dF$$

Здесь введены тензоры податливостей $C^{-22}_{abcd}, C^{-22}_{abcmnl}, A^{-22}_{abcd}, A^{-22}_{abcmnl}$, как решения линейных алгебраических систем:

$$\begin{cases} C^{22}_{ijab}C^{-22}_{abcd} = \delta_{ic}\delta_{jd} \\ C^{22}_{ijkabc}C^{-22}_{abcmnl} = \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} \end{cases} \qquad \begin{cases} A^{22}_{ijab}A^{-22}_{abcd} = \delta_{ic}\delta_{jd} \\ A^{22}_{ijkabc}A^{-22}_{abcmnl} = \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} \end{cases} \tag{40}$$

Так же как и в [7], даны определения тензоров поврежденных модулей:

$$\begin{cases} C_{ijmn} = C^{11}_{ijmn} - C^{21}_{ijab}C^{-22}_{abcd}C^{21}_{cdmn} \\ C_{ijkmnl} = C^{11}_{ijkmnl} - C^{21}_{ijkpqr}C^{-22}_{pqrabc}C^{21}_{abcmnl} \end{cases} \qquad \begin{cases} A_{ijmn} = A^{11}_{ijmn} - A^{21}_{ijab}A^{-22}_{abcd}A^{21}_{cdmn} \\ A_{ijkmnl} = A^{11}_{ijkmnl} - A^{21}_{ijkpqr}A^{-22}_{pqrabc}A^{21}_{abcmnl} \end{cases} \tag{41}$$

Определим эффективные кинематические переменные D^*_{ij} и D^*_{ijk} следующим образом:

$$(D^2_{ij} + C^{-22}_{ijab}C^{21}_{abcd}D^1_{cd}) = D^*_{ij} \quad D^*_{ijk} = D^*_{ij,k} \tag{42}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} &(D^2_{ijk} + C^{-22}_{ijkabc}C^{21}_{abcdfg}D^1_{dfg}) = D^*_{ij,k} + (C^{-22}_{ijkabc}C^{21}_{abcdfg} - C^{-22}_{ijab}C^{21}_{abdf}\delta_{gk})D^1_{d,fg} \\ &(D^2_{ij} + A^{-22}_{ijab}A^{21}_{abcd}D^1_{cd}) = D^*_{ij} + (A^{-22}_{ijab}A^{21}_{abcd} - C^{-22}_{ijab}C^{21}_{abcd})D^1_{cd} \\ &(D^2_{ijk} + A^{-22}_{ijkabc}A^{21}_{abcdfg}D^1_{dfg}) = D^*_{ij,k} + (A^{-22}_{ijkabc}A^{21}_{abcdfg} - C^{-22}_{ijab}C^{21}_{abdf}\delta_{gk})D^1_{dfg} \end{aligned} \tag{43}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} &a_{ijmn} = C^{-22}_{ijab}C^{21}_{abmn} \qquad && a_{ijkmnl} = C^{-22}_{ijkabc}C^{21}_{abcmnl} - a_{ijmn}\delta_{lk} \\ &b_{ijcd} = A^{-22}_{ijab}A^{21}_{abcd} - a_{ijcd} && b_{ijkdfg} = A^{-22}_{ijkabc}A^{21}_{abcdfg} - a_{ijdf}\delta_{gk} \end{aligned} \tag{44}$$

С учетом введенных определений и обозначений, лагранжиан (38) принимает вид:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2}\iiint &\{C_{ijmn}D^1_{ij}D^1_{mn} + C^{22}_{ijmn}D^*_{ij}D^*_{mn} + \\ &+ C_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^1_{mnl} + C^{22}_{ijkmnl}(D^*_{ij,k} + a_{ijkabc}D^1_{abc})(D^*_{mn,l} + a_{mnlpqr}D^1_{pqr})\}dV - \\ - \frac{1}{2}\oiint &\{A_{ijmn}D^1_{ij}D^1_{mn} + A^{22}_{ijmn}(D^*_{ij} + b_{ijab}D^1_{ab})(D^*_{mn} + b_{mncd}D^1_{cd}) + \\ &+ A_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^1_{mnl} + A^{22}_{ijkmnl}(D^*_{ij,k} + b_{ijkabc}D^1_{abc})(D^*_{mn,l} + b_{mnlpqr}D^1_{pqr})\}dF \end{aligned} \tag{45}$$

Сделаем предположение о том, что модули тензора C^{21}_{abcdfg} таковы, что выполняется условие:

$$a_{ijkmnl} = 0 \tag{46}$$

Тогда разрешающая система уравнений распадается на две подсистемы: относительно перемещений и относительно эффективной дисторсии.

$$C_{ijmn}R_{m,nj} - C_{ijkmnl}R_{m,nlkj} + P^V_i = 0 \qquad C^{22}_{ijmn}D^*_{mn} - C^{22}_{ijkmnl}D^*_{mn,lk} = 0 \tag{47}$$

В случае, когда при этом еще и тензоры A^{21}_{abcd} и A^{21}_{abcdfg} таковы, что выполняются условия:

$$b_{ijcd} = 0 \quad b_{ijkdfg} = 0 \tag{48}$$

разделяются и краевые задачи. Причем, краевая задача на эффективную дисторсию становится однородной и приводит к тривиальному решению. Как следствие, получено математическое обоснование обобщения гипотезы Аэро-Кувшинского:

$$(D^2_{ij} + a_{ijmn} D^1_{mn}) = D^*_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad D^2_{ij} = -a_{ijmn} R_{m,n} \tag{49}$$

Обобщение гипотезы Аэро-Кувшинского эквивалентно утверждению: тензоры модулей C^{21}_{abcmnl}, A^{21}_{abcd} и A^{21}_{abcdfg} выражаются через тензоры модулей C^{22}_{abcmnl}, A^{22}_{abcd} и A^{22}_{abcdfg} формулируемой теории с учетом (44) следующими соотношениями:

$$C^{21}_{pqrmnl} = C^{22}_{pqrijl} a_{ijmn} \quad A^{21}_{pqcd} = A^{22}_{pqij} a_{ijcd} \quad A^{21}_{pqrdfg} = A^{22}_{pqrijg} a_{ijdf} \tag{50}$$

Таким образом, при гипотезах (50), формулируемая теория сводится в соответствии с (45) к теории сред Тупина с тензорами поврежденных дислокациями модулей (41). При этом в соответствии с (49) три типа полей сохраняющихся дислокаций можно построить после решения краевой задачи относительно непрерывной части перемещений

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2} \iiint \{C_{ijmn} D^1_{ij} D^1_{mn} + C_{ijkmnl} D^1_{ijk} D^1_{mnl}\} dV - \\ - \frac{1}{2} \oiint \{A_{ijmn} D^1_{ij} D^1_{mn} + A_{ijkmnl} D^1_{ijk} D^1_{mnl}\} dF \\ D^2_{ij} = -a_{ijmn} R_{m,n} \end{aligned} \tag{51}$$

Сравним идеальную (бездефектную) модель среды Тупина (39) и модель дефектной среды Тупина (51). Из сравнения следует, что при решении одной и той же краевой задачи, предсказывающей деформированное состояние тела в соответствующем эксперименте, величины модулей упругости при фиксированном материале тела могут меняться в модели (51) и не могут меняться в модели (39). В работе [7] дефектная среда рассматривалась как дисперсный композит, где роль матрицы играла идеальная (бездефектная) среда, а роль включений – три определенных выше типа сохраняющихся дислокаций. Таким образом, при одном и том же исходном материале экспериментального образца, его поврежденные модули (41) будут зависеть еще и от технологии изготовления, в процессе которой будут формироваться поля сохраняющихся дислокаций разной концентрации.

Теорема об эквивалентности лагранжиана общей теории (38) и лагранжиана неоднородной среды Тупина. Введем в качестве основных неизвестных вместо компонентов тензора свободной дисторсии D^2_{ij} компоненты тензора относительной поврежденности t_{ij} соотношениями:

$$D^2_{ij} = t_{ip} R_{p,j} \quad D^2_{ijk} = t_{ip} R_{p,jk} + t_{ip,k} R_{p,j} \tag{52}$$

Подставляя (52) в (38), получим:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint\{(C^{11}_{ijmn} + 2C^{12}_{ijan}t_{am} + C^{22}_{ajbn}t_{ai}t_{bm} + C^{22}_{ajkbnl}t_{ai,k}t_{bm,l})R_{i,j}R_{m,n} +$$
$$+ 2[C^{12}_{ijkanl}t_{am,l} + (C^{22}_{bjkanl} + C^{22}_{anlbjk})t_{bi}t_{am,l}/2]R_{m,n}R_{i,jk} +$$
$$+ (C^{11}_{ijkmnl} + 2C^{12}_{ijkanl}t_{am} + C^{22}_{ajkbnl}t_{ai}t_{bm})R_{i,jk}R_{m,nl}\}dV -$$
$$- \frac{1}{2}\oiint\{(A^{11}_{ijmn} + 2A^{12}_{ijan}t_{am} + A^{22}_{ajbn}t_{ai}t_{bm} + A^{22}_{ajkbnl}t_{ai,k}t_{bm,l})R_{i,j}R_{m,n} +$$
$$+ 2[A^{12}_{ijkanl}t_{am,l} + (A^{22}_{bjkanl} + A^{22}_{anlbjk})t_{bi}t_{am,l}/2]R_{m,n}R_{i,jk} +$$
$$+ (A^{11}_{ijkmnl} + 2A^{12}_{ijkanl}t_{am} + A^{22}_{ajkbnl}t_{ai}t_{bm})R_{i,jk}R_{m,nl}\}dF$$

Вводя переменные по координатам тензорные поля упругих свойств $\tilde{C}_{ijmn}, \tilde{C}_{ijkmn}, \tilde{C}_{ijkmnl}$ и $\tilde{A}_{ijmn}, \tilde{A}_{ijkmn}, \tilde{A}_{ijkmnl}$:

$$\begin{cases} \tilde{C}_{ijmn} = C^{11}_{ijmn} + 2C^{12}_{ijan}t_{am} + C^{22}_{ajbn}t_{ai}t_{bm} + C^{22}_{ajkbnl}t_{ai,k}t_{bm,l} \\ \tilde{C}_{ijkmn} = C^{12}_{ijkanl}t_{am,l} + (C^{22}_{bjkanl} + C^{22}_{anlbjk})t_{bi}t_{am,l}/2 \\ \tilde{C}_{ijkmnl} = C^{11}_{ijkmnl} + 2C^{12}_{ijkanl}t_{am} + C^{22}_{ajkbnl}t_{ai}t_{bm} \end{cases} \begin{cases} \tilde{A}_{ijmn} = A^{11}_{ijmn} + 2A^{12}_{ijan}t_{am} + A^{22}_{ajbn}t_{ai}t_{bm} + A^{22}_{ajkbnl}t_{ai,k}t_{bm,l} \\ \tilde{A}_{ijkmn} = A^{12}_{ijkanl}t_{am,l} + (A^{22}_{bjkanl} + A^{22}_{anlbjk})t_{bi}t_{am,l}/2 \\ \tilde{A}_{ijkmnl} = A^{11}_{ijkmnl} + 2A^{12}_{ijkanl}t_{am} + A^{22}_{ajkbnl}t_{ai}t_{bm} \end{cases} \quad (53)$$

можно привести лагранжиан общей теории (38) к лагранжиану неоднородной среды Тупина:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint\{\tilde{C}_{ijmn}R_{i,j}R_{m,n} + 2\tilde{C}_{ijkmn}R_{m,n}R_{i,jk} + \tilde{C}_{ijkmnl}R_{i,jk}R_{m,nl}\}dV -$$
$$- \frac{1}{2}\oiint\{\tilde{A}_{ijmn}R_{i,j}R_{m,n} + 2\tilde{A}_{ijkmn}R_{m,n}R_{i,jk} + \tilde{A}_{ijkmnl}R_{i,jk}R_{m,nl}\}dF \quad (54)$$

Таким образом, теорема доказана.

Учитывая то, что свободная дисторсия D^2_{ij} и, следовательно, относительная поврежденность t_{ij} концентрируются вблизи поверхностей возмущения и носят локальный характер, с точки зрения постановки (54) можно утверждать, что переменность механических свойств, обусловленная тензорными полями $\tilde{C}_{ijmn}, \tilde{C}_{ijkmn}, \tilde{C}_{ijkmnl}$, так же носит локальный характер.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Модели (39), (51) и (54) приводят к объяснению нестабильности экспериментальных значений «моментных» модулей [15]. Объяснение кроется во внутренней структуре тензоров C^{22}_{ijkmnl}, C_{ijkmnl} и $\tilde{C}_{ijkmnl}$. В модели (39) тензор модулей C^{22}_{ijkmnl} трактуется как тензор «моментных супермодулей», не поврежденных полями сохраняющихся дислокаций. В модели (51) тензор C_{ijkmnl} трактуется как тензор «моментных» модулей, поврежденных полями сохраняющихся дислокаций. Проводя аналогию между средой (51) и мелкодисперсным композитом, можно трактовать C_{ijkmnl} как тензор модулей такого композита. Матрицей этого композита служит исходная бездефектная среда, а включениями – три типа сохраняющихся дислокаций. Наконец, в модели (54), тензор модулей $\tilde{C}_{ijkmnl}$ трактуется уже как тензорное поле, переменное по координатам, требующее некоторого осреднения для вычисления и идентификации эффективного тензора «моментных» модулей.

Пространственную структуру тензорного поля $\tilde{C}_{ijkmnl}$ можно трактовать как межфазные слои в мелкодисперсных композитах, которые являются областями переменности механических свойств, обусловленными переменной по координатам концентрацией сохраняющихся дислокаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Белов П.А., Лурье С.А. «Общая теория дефектов сплошных сред», «Механика композиционных материалов и конструкций», 2002, т..9, №4, стр. 471-484.
2. Белов П.А., Лурье С.А. «К общей геометрической теории дефектных сред», «Физическая мезомеханика», 2007, т. 10, №6, стр.
3. Образцов И.Ф., Елпатьевский А.Н., Белов П.А. «Об общем подходе к формулировке линейных моделей сред различной гладкости», », 1988, ДАН, т. 303, 6, стр. 1331-1334.
4. Белов П.А., Лурье С.А. «Континуальная модель микрогетерогенных сред», ПММ, 2009, т.73, №5, стр. 833-848.
5. Лурье С.А., Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием»»», Сб. трудов конференции «Современные проблемы механики гетерогенных сред», 2005, Изд. ИРПИМ РАН, стр. 235-268.
6. Белов П.А., Лурье С.А. «Теория идеальных адгезионных взаимодействий», "Механика композиционных материалов и конструкций", 2007, т.14, N3, стр. 519-536.
7. Белов П.А., Лурье С.А. «Континуальная теория адгезионных взаимодействий поврежденных сред», «Механика композиционных материалов и конструкций», 2009, т.15, №4, , 610-629.
8. Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. «Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstructure materials», BOOK series "Advances in Mechanics and Mathematics". Generalized Continua, 2010, Springer, New York, p.223-234.
9. Mindlin R.D. «Micro-structure in linear elasticity», «Archive of Rational Mechanics and Analysis», 1964, №1, p. 51-78.
10. Cosserat E., Cosserat F., «Theorie des Cops Deformables», 1909, Paris, Hermann.
11. Toupin R.A. «Elastic materials with couple-stresses», 1962, Arch. Ration. Mech. And Analysis.
12. Белов П.А., Бодунов А.М., Лурье С.А., Образцов И.Ф., Яновский Ю. Г. «О моделировании масштабных эффектов в тонких структурах», «Механика композиционных материалов и конструкций», 2002, т.8, №4, стр. 585-598.
13. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. «Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц», 1960, ФТТ, т. 2, вып. 7, 1399-1409.
14. Jaramillo T.J. «A generalization of the energy function of elasticity theory», Dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago, 1929.
15. Адамов А.А. «О гипотезе однородности, масштабных параметрах длины и краевом эффекте для изотропного континуума Коссера», «Механика композиционных материалов и конструкций», 2010, т.16, №3, стр. 329-346.

Сведения об авторе:

Белов Петр Анатольевич,

к.ф.-м.н., нач. отд. прочности, *ГК «Ростехнологии», НПК «Композиционные материалы и технологии», ОАО «Московский Машиностроительный Экспериментальный Завод – Композиционные Технологии»,* г. Москва, Россия, e-mail: *BelovPA@yandex.ru*, *8-915-3358835.*