ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ ИЛИ НАНОМЕХАНИКА. ЧТО ЗАЛОЖЕНО В РЕШАТЕЛЬ?

Белов П.А., к.ф.-м.н.,
ГК «Ростехнологии», НПК «Композиционные материалы и технологии»,
ОАО «Московский Машиностроительный Экспериментальный Завод – Композиционные Технологии»,
г. Москва, Россия, BelovPA@yandex.ru

Имеется достаточно большой ряд экспериментальных фактов, фиксирующих существование неклассических (масштабных) эффектов в сплошных средах. При этом, несмотря на значительные усилия, можно констатировать, что фактически отсутствует последовательная континуальная теория механики деформируемых сред с масштабными эффектами, которая бы позволила установить общие закономерности внутренних взаимодействий на неоднородностях субатомного уровня, связанных с микро- и наноструктурами. С этой точки зрения методы механики сплошной среды представляются наиболее последовательными и корректными, и могут служить основой для построения моделей механики дефектных сред. Более точно: должны быть развиты модели деформирования сред с учетом масштабных эффектов, связанных с существованием в сплошной среде неоднородностей масштаба 10^{-9} м. В основание таких моделей должен быть заложен факт существования дефектов сплошности, таких как дислокации, дисклинации и дефекты более высокого ранга. При этом, конечно, описание громадного количества изолированных дефектов типа дислокаций имеет смысл заменить полевым представлением. Реализация такого подхода, даже в рамках линейных моделей, позволяет развить механику дефектных сред как некоторое естественное обобщение классической механики деформируемых сред – континуальную наномеханику.

Объективные свойства дефектных сред намного сложнее и многообразнее свойств сплошных (бездефектных) сред. Градиентные теории Миндлина [1] и Тупина [2] являются общепризнанным инструментом изучения свойств дефектных сред и масштабных эффектов, характерных для них. Обе эти теории описываются дифференциальными уравнениями повышенного порядка и наличием большого количества неклассических модулей. Для инженерных приложений требуются корректно упрощенные модели, содержащие минимум новых модулей, подлежащих экспериментальному определению. Прежде, чем строить корректно упрощенные модели, следует убедиться в том, что исходная модель обладает всеми присущими дефектной среде свойствами. К сожалению, ни модель Миндлина, ни модель Тупина не отражают этой полноты свойств. Действительно, модель Миндлина учитывает только кривизны $D^2_{ij,k}$, связанные с градиентом неинтегрируемой дисторсии D^2_{ij}, а модель Тупина – только кривизны $D^1_{ij,k}$, связанные с градиентом интегрируемой дисторсии $D^1_{ij} = R_{i,j}$, и обе эти теории естественным образом исключают возможность взаимодействия между кривизнами этих двух сортов. Сделать обоснованный выбор между этими двумя общепризнанными теориями для построения прикладных инженерных моделей в рамках существующей иерархии градиентных моделей невозможно.

Доклад представляет формулировку модели, обобщающей упомянутые выше модели и содержащей их как строгие частные случаи. Лагранжиан модели имеет вид:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [C^{pq}_{ijmn} D^p_{ij} D^q_{mn} + C^{pq}_{ijkmnl} D^p_{ijk} D^q_{mnl}]dV -$$
$$-\frac{1}{2}\oiint [A^{pq}_{ijmn} D^p_{ij} D^q_{mn} + 2A^{pq}_{ijmnl} D^p_{ij} D^q_{mnl} + A^{pq}_{ijkmnl} D^p_{ijk} D^q_{mnl}]dF +$$
$$+\sum \oint U_S ds + \sum U_P \tag{1}$$

Здесь в целях лаконичности не приводятся структуры потенциальных энергий ребер поверхности и их угловых точек. D^p_{ij}, D^p_{ijk} - тензоры дисторсии и кривизн двух сортов (индексы сортности p, q пробегают значения от 1 до 2), $C^{pq}_{ijmn}, C^{pq}_{ijkmnl}$ - тензоры «объемных» модулей, $A^{pq}_{ijmn}, A^{pq}_{ijmnl}, A^{pq}_{ijkmnl}$ - тензоры «поверхностных» модулей, отражающих адгезионные свойства поверхности.

В отличие от «классических» моделей Миндлина и Тупина, представляемая модель учитывает в объемной плотности потенциальной энергии не только кривизны $D^2_{ij,k}$, связанные с градиентом свободной дисторсии, но и кривизны $D^1_{ij,k}$, связанные с градиентом стесненной дисторсии, а также их взаимодействие. Вторым отличием является учет в лагранжиане (1) потенциальных энергий поверхности (энергии адгезионных взаимодействий), ребер поверхности и угловых точек ребер поверхности.

$$U = \iiint U_V dV + \oiint U_F dF + \sum \oint U_S ds + \sum U_P$$

Здесь плотности потенциальных энергий являются квадратичными формами своих аргументов с учетом соответствующей анизотропии: $U_V = U_V(D^p_{ij}, D^p_{ijn})$, $U_F = U_F(D^p_{ij}, D^p_{ijq}\delta^*_{qk})$, $U_S = U_S(D^p_{ij}, D^p_{ijn}s_n)$, $U_P = U_P(D^p_{ij})$, δ_{ij} - дельта Кронекера, $\delta^*_{ij} = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ - «плоская» дельта Кронекера, определенная на гладкой поверхности тела, n_i - орт нормали к поверхности среды, s_i - орт касательной к ребру поверхности.

Модель Миндлина. Если в лагранжиане (1) тензоры «моментных» модулей $C^{11}_{ijkmnl}, C^{12}_{ijkmnl}$ и все тензоры адгезионных модулей положить равными нулю, лагранжиан сформулированной теории совпадет с лагранжианом модели Миндлина:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [C^{11}_{ijmn} D^1_{ij} D^1_{mn} + 2C^{12}_{ijmn} D^1_{ij} D^2_{mn} + C^{22}_{ijmn} D^2_{ij} D^2_{mn} +$$
$$+ C^{22}_{ijkmnl} D^2_{ijk} D^2_{mnl}]dV$$

Как было доказано в [3], из модели Миндлина, в свою очередь, следуют как строгие частные случаи: «простейшая» теория сред с сохраняющимися дислокациями [4], теория сред Коссера (теория сред с ω - дислокациями) [5], теория пористых сред (теория сред с θ - дислокациями) [6] и теория сред с γ - дислокациями [6].

Модель Тупина. Пусть все тензоры модулей, содержащие индекс сортности 2, равны нулю. Тогда лагранжиан (1) принимает вид, совпадающий с лагранжианом идеальной (бездефектной) среды Тупина с адгезионными свойствами поверхности, а при $A^{11}_{ijmn} = 0$ и $A^{11}_{ijkmnl} = 0$ - с «классической» моделью Тупина:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [C^{11}_{ijmn} D^1_{ij} D^1_{mn} + C^{11}_{ijkmnl} D^1_{ijk} D^1_{mnl}]dV$$

Сформулированная теория радикально меняет точку зрения на место модели Тупина в иерархии градиентных моделей. Если раньше модель Тупина трактовалась как приближенная (прикладная) модель, вытекающая из модели Миндлина, благодаря использованию обобщения гипотезы Аэро-Кувшинского, то теперь она занимает, наравне с моделью Миндлина, положение строгого частного случая более общей теории. Из неё, в свою очередь, вытекают как строгие частные случаи: «простейшая» модель когезионного поля [7], модель Аэро-Кувшинского [8] и модель Джеремилло [9].

Представляемая модель дает некоторые новые качественные результаты, которые невозможно получить в рамках более простых моделей. Доказана теорема «О единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий», которая не может быть даже сформулирована в рамках «классических» моделей Миндлина и Тупина в силу того, что в них не определены адгезионные взаимодействия.

Формулировка теоремы: «В объемную плотность потенциальной энергии кривизн $C^{pq}_{ijkmnl}D^{p}_{ijk}D^{q}_{mnl}/2$ входят только те модули, которые фигурируют множителями при базисных тензорах, симметричных при перестановке третьего и шестого индексов. Остальные модули входят в ту часть объемной плотности потенциальной энергии кривизн, которая может быть преобразована в соответствующую часть поверхностной плотности потенциальной энергии адгезионного взаимодействия кривизн и дисторсий разных сортов $A^{pq}_{ijmnl}D^{p}_{ij}D^{q}_{mnl}$». Часть потенциальной энергии когезионных взаимодействий, связанная с антисимметричными при перестановке третьего и шестого индексов составляющими тензоров шестого ранга, может быть представлена как часть потенциальной энергии адгезионных взаимодействий, и наоборот. Этот факт говорит о единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий. Как практически важное следствие теоремы получено теоретически обоснованное сокращение «моментных» модулей в теории Миндлина с 11 до 7, а в теории Тупина - с 5 до 2.

Лагранжиан (1) может служить основой для построения инженерных приложений. Предложены варианты прикладных инженерных моделей, с помощью которых даны объяснения ряду известных неклассических масштабных эффектов с характерными размерами от десятков до тысяч нанометров.

Предложен алгоритм сведения задач наномеханики к контактной задаче двух вложенных друг в друга сред: «классической» и «когезионной». Соответствующий лагранжиан имеет вид:

$$\delta L = 0$$

Здесь:

$$L = L_U - L_u$$

$$L_U = A_U - \frac{1}{2}\iiint E_{ijnm}\frac{\partial U_n}{\partial x_m}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}dV$$

$$L_u = A_u - \frac{1}{2}\iiint (E_{ijnm}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + C^V u_i u_i)dV - \tag{2}$$

$$-\frac{1}{2}\oiint C^F u_i u_i dF$$

Вариационная формулировка (2) отличается от традиционных постановок градиентных моделей.

1. Она позволяет рассматривать моментную среду как совокупность двух вложенных друг в друга сред: «классической» и «когезионной».
2. Она позволяет обойтись без понятий моментных напряжений и кривизн.
3. Использовать богатый исследовательский инструментарий классической теории упругости везде, где решатель способен включать во внешние нагрузки винклеровские основания в объеме среды и на поверхности.
4. Позволяет описать масштабные эффекты, привлекая минимальное количество неклассических параметров, в данном случае – два. Один, «когезионный», C^V - в объеме среды, и второй, «адгезионный», C^F - на поверхности среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Mindlin R.D. «Micro-structure in linear elasticity», «Archive of Rational Mechanics and Analysis», 1964, №1, p. 51-78.
2. Toupin R.A. «Elastic materials with couple-stresses», 1962, Arch. Ration. Mech. And Analysis.
3. Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. «Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstructure materials», BOOK series "Advances in Mechanics and Mathematics". Generalized Continua, 2010, Springer, New York, p.223-234.
4. Белов П.А., Лурье С.А. «Континуальная модель микрогетерогенных сред», ПММ, 2009, т.73, №5, стр. 833-848.
5. Cosserat E., Cosserat F., «Theorie des Cops Deformables», 1909, Paris, Hermann.
6. Лурье С.А., Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием»», Сб. трудов конференции «Современные проблемы механики гетерогенных сред», 2005, Изд. ИРПИМ РАН, стр. 235-268.
7. Белов П.А., Бодунов А.М., Лурье С.А., Образцов И.Ф., Яновский Ю. Г. «О моделировании масштабных эффектов в тонких структурах», «Механика композиционных материалов и конструкций», 2002, т.8, №4, стр. 585-598.
8. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. «Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц», 1960, ФТТ, т. 2, вып. 7, 1399-1409.
9. Jaramillo T.J. «A generalization of the energy function of elasticity theory», Dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago, 1929.