ТЕОРИЯ СРЕД С СОХРАНЯЮЩИМИСЯ ДИСЛОКАЦИЯМИ: О ЕДИНОЙ ПРИРОДЕ КОГЕЗИОННЫХ И АДГЕЗИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ.

Белов П.А.

В работе развивается теория сред с полями сохраняющихся дислокаций. В лагранжиане общей теории осуществлен учет взаимодействия кривизн и дисторсий разных сортов на поверхности тела. Доказана теорема об эквивалентности части потенциальной энергии кривизн в объеме тела и части потенциальной энергии адгезии, отражающей взаимодействие кривизн и дисторсий на поверхности тела. С её помощью удается сократить количество «существенных» объемных «моментных» модулей, как в развиваемом обобщении, так и в теории Миндлина - с одиннадцати до семи, и в теории Тупина – с пяти до двух. Дается объяснение как единой природы когезионных и адгезионных взаимодействий, так и их несводимость друг к другу.

Ключевые слова: механика дефектных сред, поля сохраняющихся дислокаций, масштабные эффекты, наномеханика, когезионные взаимодействия, адгезионные взаимодействия, теория межфазного слоя, композиты, неклассические упругие характеристики.

THE THEORY OF CONTINUUM WITH CONSERVED DISLOCATIONS: ABOUT UNIFORM NATURE OF COHESIVE AND ADHESIVE INTERACTIONS.

Belov P.A.

In work the theory of continuum with fields of conserved dislocations is developed. In lagrangian of the general theory the account of interaction between curvatures and distortions different grades on a body surface is carried out. The theorem about equivalence of a part of potential energy of curvatures in volume of a body and a part of potential energy of the adhesion, reflecting the interaction of curvatures and distortions on a surface of a body, is proved. With its help it is possible to reduce the number of "essential" volume «momentum» moduli from eleven to seven for Mindlin theory and from five to two - for Toupin theory. The explanation both uniform nature of cohesive and adhesive interactions, and them «unreducable» to each other is offered.

Keywords: defectness continuum mechanics, fields of conserved dislocations, multiscale effects, nanomechanics, cohesion, adhesion, interface layer, composites, nonclassical moduli.

ВВЕДЕНИЕ.

В данной статье развивается теория сред с полями сохраняющихся дислокаций. Исследуется обобщение модели Миндлина, построенное в работе [1]. В отличие от «классических» моделей Миндлина [2] и Тупина [3], её обобщение учитывает в объемной плотности потенциальной энергии не только кривизны, связанные с градиентом свободной дисторсии, но и кривизны, связанные с градиентом стесненной дисторсии, а также их взаимодействие. Вторым отличием является учет в лагранжиане обобщённой модели потенциальных энергий поверхности (энергии адгезионных взаимодействий), ребер поверхности и угловых точек ребер поверхности.

В первых двух разделах статьи приведены определения и соотношения (без выводов и доказательств, осуществленных в предыдущих работах), необходимые для дальнейшего исследования модели. В отличие от [1], в этой работе учтены взаимодействия кривизн и дисторсий в потенциальной энергии адгезии поверхности и получена структура соответствующих тензоров адгезионных модулей пятого ранга. Учет этих слагаемых в потенциальной энергии адгезии позволил доказать теорему о единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий и их несводимости друг к другу.

В третьем разделе доказывается теорема «О единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий», которая не может быть даже сформулирована в рамках «классических» моделей Миндлина [2] и Тупина [3] в силу того, что в них не определены адгезионные взаимодействия. Приводятся некоторые важные для приложений следствия теоремы.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА.

Общая теория полей дефектов изложена в [4] и развита в [5].

Пусть кинематическая переменная третьего ранга D_{ijn} (тензор кривизн) в среде определена следующим образом:

$$D_{ijn} = \frac{\partial^3 D^0}{\partial x_n \partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 D_i^1}{\partial x_n \partial x_j} + \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_n} \qquad (1)$$

Здесь D^0, D_i^1, D_{ij}^2 - кинематические переменные нулевого, первого и второго рангов, которые в [4-5] трактовались соответственно как потенциал интегрируемой части перемещений, неинтегрируемая часть перемещений и неинтегрируемая (свободная) дисторсия. Верхние индексы кинематических переменных являются номером «сорта» переменных. «Сорт» - общее свойство кинематических переменных разных рангов. Он равен рангу сохраняющегося («материнского») псевдотензора-источника дефектов.

Можно убедиться, что в соответствии с (1) псевдотензор-источник дефектов третьего сорта T_{ijk} тождественно равен нулю:

$$\frac{\partial D_{ijp}}{\partial x_q} Э_{pqk} = T_{ijk} \equiv 0 \qquad (2)$$

Здесь $Э_{pqk}$ - псевдотензор Леви-Чивиты.

Таким образом, (2) является необходимым и достаточным условием отсутствия полей дефектов третьего сорта (обобщенных дисклинаций) в рассматриваемой среде. Сворачивая (1) с тензором Леви-Чивиты, получим ненулевой псевдотензор-источник дефектов второго сорта - сохраняющихся дислокаций:

$$D_{inm} Э_{nmj} = \frac{\partial D_{in}^2}{\partial x_m} Э_{nmj} = T_{ij}^2 \neq 0 \qquad \frac{\partial T_{ij}^2}{\partial x_j} \equiv 0 \qquad (3)$$

Таким образом, в среде со связями (1) существуют поля сохраняющихся дислокаций, с ненулевым псевдотензором-источником T_{ij}^2 (тензором Де Вита). Соотношение (2) является необходимым и достаточным условием существования квадратур уравнений (1) $D_{ij} = \int_{M_0}^{M_x} D_{ijn} dx_n$ (где M_0 - начальная, а M_x - конечная точка траектории интегрирования):

$$D_{ij} = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} + D_{ij}^2 \qquad (4)$$

Последующая квадратура $D_i = \int\limits_{M_0}^{M_x} D_{ij} dx_j$ дает определение вектора дефектных перемещений D_i и вектора дислокаций D_i^2:

$$D_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1 + D_i^2 \qquad (5)$$

Здесь: $D_i^2 = \int\limits_{M_0}^{M_x} D_{ij}^2 dx_j$ - дислокации второго сорта (три типа сохраняющихся дислокаций).

«Тип» - общее тензорное свойство симметрии/антисимметрии кинематических переменных разных рангов по первым двум индексам. Тип дислокаций определен разложением свободной дисторсии и, следовательно, вектора дислокаций на девиаторную, шаровую и антисимметричную части:

$$D_{ij}^2 = \gamma_{ij}^2 + \frac{1}{3}\theta^2 \delta_{ij} - \omega_k^2 Э_{ijk} \quad \gamma_{ij}^2 \delta_{ij} = 0 \qquad (6)$$

$$D_i^2 = \int\limits_{M_0}^{M_x} \gamma_{ij}^2 dx_j + \int\limits_{M_0}^{M_x} \frac{1}{3}\theta^2 \delta_{ij} dx_j + \int\limits_{M_0}^{M_x} (-\omega_k^2 Э_{ijk}) dx_j \qquad (7)$$

Отсюда следует, что вектор дислокаций является суммой трех типов дислокаций, для каждого из которых справедлив свой закон сохранения.
Для γ-дислокаций:

$$(D_i^2)_\gamma = \int\limits_{M_0}^{M_x} \gamma_{ij}^2 dx_j \qquad (T_{ij}^2)_\gamma = \frac{\partial \gamma_{im}^2}{\partial x_n} Э_{mnj} \qquad \frac{\partial (T_{ij}^2)_\gamma}{\partial x_j} \equiv 0 \qquad (8)$$

Для θ-дислокаций:

$$(D_i^2)_\theta = \int\limits_{M_0}^{M_x} \frac{1}{3}\theta^2 \delta_{ij} dx_j \quad (T_{ij}^2)_\theta = \frac{1}{3}\frac{\partial \theta^2}{\partial x_n} Э_{inj} \quad \frac{\partial (T_{ij}^2)_\theta}{\partial x_j} \equiv 0 \qquad (9)$$

Для ω-дислокаций:

$$(D_i^2)_\omega = \int\limits_{M_0}^{M_x} (-\omega_k^2 Э_{ijk}) dx_j \quad (T_{ij}^2)_\omega = -\frac{\partial \omega_k^2}{\partial x_n} Э_{imk} Э_{mnj} \quad \frac{\partial (T_{ij}^2)_\omega}{\partial x_j} \equiv 0 \qquad (10)$$

Поле дефектных перемещений D_i (5) можно представить как сумму непрерывной части перемещений $R_i = \frac{\partial D^0}{\partial x_i} + D_i^1$ и поля разрывов перемещений D_i^2, обусловленных сохраняющимися дислокациями.

$$D_i = R_i + D_i^2 \qquad (11)$$

Непрерывное поле дисторсии (4) также может быть представлено как сумма двух полей непрерывных дисторсий $D_{ij}^1 = \frac{\partial^2 D^0}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial D_i^1}{\partial x_j} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$ и D_{ij}^2 (соответственно, стесненной и свободной дисторсии):

$$D_{ij} = D_{ij}^1 + D_{ij}^2 \tag{12}$$

И наконец, соотношение (1), которое является общим решением условия отсутствия дефектов третьего сорта (2), представлено в таком же виде:

$$D_{ijk}^1 = \frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_j} \quad D_{ijk}^2 = \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \quad D_{ijk} = D_{ijk}^1 + D_{ijk}^2 \tag{13}$$

Таким образом, в качестве непрерывных аргументов лагранжиана сформулированной теории выбраны: непрерывная часть вектора перемещений R_i в соответствии с (11), дисторсии двух сортов D_{ij}^1, D_{ij}^2 в соответствии с (12) и кривизны двух сортов D_{ijk}^1, D_{ijk}^2 в соответствии с (13). При этом учтены сформулированные выше связи между этими кинематическими переменными:

$$D_{ij}^1 = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} = R_{i,j} \quad D_{ijk}^1 = \frac{\partial D_{ij}^1}{\partial x_k} = R_{i,jk} \quad D_{ijk}^2 = \frac{\partial D_{ij}^2}{\partial x_k} \tag{14}$$

Связи (14) являются кинематической моделью формулируемой среды.

2. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА.

В соответствии с «кинематическим» вариационным принципом, сформулированным в [6] и развитым в [7-11], модель среды (14) полностью определяет не только кинематическую, но и силовую сторону для физически линейных сред. В работе [1] построено выражение возможной работы внутренних сил $\delta\overline{U}$ для моделируемой среды, выяснена структура потенциальной энергии:

$$U = \iiint U_V dV + \oiint U_F dF + \sum \oint U_S ds + \sum U_P \tag{15}$$

Здесь: U_V - объёмная плотность потенциальной энергии,

U_F - поверхностная плотность потенциальной энергии,

U_S - погонная плотность потенциальной энергии ребер (если они есть),

U_P - потенциальная энергия угловых точек (если они есть).

$$U_V = U_V(D_{ij}^1, D_{ij}^2, D_{ijn}^1, D_{ijn}^2) \tag{16}$$

$$U_F = U_F(D_{ij}^1, D_{ij}^2, D_{ijq}^1 \delta_{qk}^*, D_{ijn}^2 \delta_{qk}^*) \tag{17}$$

$$U_S = U_S(D_{ij}^1, D_{ij}^2, D_{ijn}^1 s_n, D_{ijn}^2 s_n) \tag{18}$$

$$U_P = U_P(D_{ij}^1, D_{ij}^2) \tag{19}$$

Для каждой плотности потенциальной энергии выведены свои формулы Грина, определяющие силовые факторы соответственно: в объёме тела, на поверхности, ребрах и угловых точках.

Для силовых факторов в объеме среды:

$$\sigma^1_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial D^1_{ij}} \quad \sigma^2_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial D^2_{ij}} \quad \sigma^1_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial D^1_{ijk}} \quad \sigma^2_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial D^2_{ijk}} \tag{20}$$

Для силовых факторов на поверхности среды:

$$a^1_{ij} = \frac{\partial U_F}{\partial D^1_{ij}} \quad a^2_{ij} = \frac{\partial U_F}{\partial D^2_{ij}} \quad a^1_{ijk} = \frac{\partial U_F}{\partial D^1_{ijk}} \quad a^2_{ijk} = \frac{\partial U_F}{\partial D^2_{ijk}} \tag{21}$$

Для силовых факторов на ребрах поверхности среды:

$$b^1_{ij} = \frac{\partial U_S}{\partial D^1_{ij}} \quad b^2_{ij} = \frac{\partial U_S}{\partial D^2_{ij}} \quad B^1_{ij} = \frac{\partial U_S}{\partial (D^1_{ijn} s_n)} \quad B^2_{ij} = \frac{\partial U_S}{\partial (D^2_{ijn} s_n)} \tag{22}$$

Спектр силовых факторов в угловых точках ребер поверхности:

$$f^1_{ij} = \frac{\partial U_P}{\partial D^1_{ij}} \quad f^2_{ij} = \frac{\partial U_P}{\partial D^2_{ij}} \tag{23}$$

Таким образом, следуя алгоритму построения модели в рамках «кинематического» вариационного принципа, достаточно формально была получена структура потенциальной энергии (15)-(19), формулы Грина и силовая модель формулируемой теории (20)-(23), соответствующие выбранной кинематической модели (14). В предположении физической линейности уравнений закона Гука, объёмная плотность потенциальной энергии U_V была получена как положительно определенная изотропная квадратичная форма своих аргументов.

$$2U_V = C^{ab}_{ijmn} D^a_{ij} D^b_{mn} + C^{ab}_{ijkmnl} D^a_{ijk} D^b_{mnl} \tag{24}$$

Тензоры модулей четвертого ранга C^{ab}_{ijmn} были построены в виде разложения по базисным тензорам четвертого ранга, которые являются произведениями пары тензоров Кронекера со всеми возможными перестановками индексов. Их общая структура имеет вид:

$$C^{ab}_{ijmn} = \lambda^{ab}\delta_{ij}\delta_{mn} + (\mu^{ab} + \chi^{ab})\delta_{im}\delta_{jn} + (\mu^{ab} - \chi^{ab})\delta_{in}\delta_{jm} \tag{25}$$

Тензоры модулей шестого ранга C^{ab}_{ijkmnl} были построены в виде разложения по базисным тензорам шестого ранга, которые являются произведениями троек тензоров Кронекера со всеми возможными перестановками индексов. Их общая структура имеет вид:

$$\begin{aligned} &C^{ab}_{ijkmnl} = \\ &= C^{ab}_1(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk}) + C^{ab}_2(\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml} + \delta_{mn}\delta_{lj}\delta_{ik}) + \\ &+ C^{ab}_3(\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{ni}\delta_{jk}) + C^{ab}_4(\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{mj}\delta_{nk}\delta_{li}) + \\ &+ C^{ab}_5\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + C^{ab}_6\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} + C^{ab}_7\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + C^{ab}_8\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \\ &+ C^{ab}_9\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{nk} + C^{ab}_{10}\delta_{in}\delta_{mj}\delta_{kl} + C^{ab}_{11}\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mk} \end{aligned} \tag{26}$$

С учетом (25),(26) и (24) из обобщенных формул Грина (20) были получены уравнения закона Гука для силовых факторов в объеме среды:

$$\sigma_{ij}^{1} = C_{ijmn}^{11} \frac{\partial R_m}{\partial x_n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^{2} \qquad \sigma_{ijk}^{1} = C_{ijkmnl}^{11} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + C_{ijkmnl}^{12} \frac{\partial D_{mn}^{2}}{\partial x_l}$$
$$\sigma_{ij}^{2} = C_{ijmn}^{21} \frac{\partial R_m}{\partial x_n} + C_{ijmn}^{22} D_{mn}^{2} \qquad \sigma_{ijk}^{2} = C_{ijkmnl}^{21} \frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + C_{ijkmnl}^{22} \frac{\partial D_{mn}^{2}}{\partial x_l} \tag{27}$$

В предположении физической линейности уравнений закона Гука, поверхностная плотность потенциальной энергии U_F была построена как положительно определенная трансверсально-изотропная квадратичная форма своих аргументов.

$$2U_F = A_{ijmn}^{ab} D_{ij}^{a} D_{mn}^{b} + 2A_{ijmnl}^{ab} D_{ij}^{a} D_{mnl}^{b} + A_{ijkmnl}^{ab} D_{ijk}^{a} D_{mnl}^{b} \tag{28}$$

В отличие от [1], здесь учтены четыре билинейных слагаемых, учитывающих возможное взаимодействие дисторсий и кривизн.

Тензоры модулей четвертого ранга A_{ijmn}^{ab} были построены в виде разложения по базисным тензорам четвертого ранга, которые являются произведениями «плоских» тензоров Кронекера $\delta_{ij}^{*} = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ и/или тензоров вида $(n_i n_j)$ со всеми возможными перестановками индексов. Их общая структура имеет вид:

$$\begin{aligned} A_{ijmn}^{ab} &= \lambda^{abF} \delta_{ij}^{*} \delta_{mn}^{*} + (\mu^{abF} + \chi^{abF}) \delta_{im}^{*} \delta_{jn}^{*} + (\mu^{abF} - \chi^{abF}) \delta_{in}^{*} \delta_{jm}^{*} + \\ &+ \alpha^{qb} (n_i n_n \delta_{jm}^{*} + n_m n_j \delta_{in}^{*}) + \beta^{ab} (n_i n_j \delta_{mn}^{*} + n_m n_n \delta_{ij}^{*}) + \\ &+ \delta^{abF} n_i n_m \delta_{jn}^{*} + B^{ab} \delta_{im}^{*} n_j n_n + A^{ab} n_i n_j n_m n_n \end{aligned} \tag{29}$$

Тензоры модулей пятого ранга A_{ijmnl}^{ab} строятся здесь. Они представлены в виде разложения по базисным тензорам пятого ранга, которые являются произведениями «плоских» тензоров Кронекера δ_{ij}^{*} и/или векторов единичной нормали к поверхности n_i со всеми возможными перестановками индексов. Базисные тензоры можно разбить на три группы. В первую будут входить только такие, которые содержат в качестве сомножителей два «плоских» тензора Кронекера и один вектор единичной нормали, во вторую – такие, которые содержат в качестве сомножителей один «плоский» тензор Кронекера и три вектора единичной нормали, в третью – произведение пяти векторов единичной нормали.

Базисные тензоры первой группы:

$$\begin{cases} n_i \delta_{jm}^{*} \delta_{nl}^{*} \\ n_i \delta_{jn}^{*} \delta_{lm}^{*} \\ n_i \delta_{jl}^{*} \delta_{mn}^{*} \end{cases} \begin{cases} n_j \delta_{im}^{*} \delta_{nl}^{*} \\ n_j \delta_{in}^{*} \delta_{lm}^{*} \\ n_j \delta_{il}^{*} \delta_{mn}^{*} \end{cases} \begin{cases} n_m \delta_{ji}^{*} \delta_{nl}^{*} \\ n_m \delta_{jn}^{*} \delta_{li}^{*} \\ n_m \delta_{jl}^{*} \delta_{in}^{*} \end{cases} \begin{cases} n_n \delta_{jm}^{*} \delta_{il}^{*} \\ n_n \delta_{ji}^{*} \delta_{lm}^{*} \\ n_n \delta_{jl}^{*} \delta_{mi}^{*} \end{cases} \begin{cases} n_l \delta_{jm}^{*} \delta_{ni}^{*} \\ n_l \delta_{jn}^{*} \delta_{im}^{*} \\ n_l \delta_{ji}^{*} \delta_{mn}^{*} \end{cases}$$

Базисные тензоры второй группы:

$$\begin{cases} \delta_{ij}^{*} n_m n_n n_l \\ \delta_{im}^{*} n_j n_n n_l \\ \delta_{in}^{*} n_j n_m n_l \\ \delta_{il}^{*} n_j n_m n_n \end{cases} \begin{cases} \delta_{jm}^{*} n_i n_n n_l \\ \delta_{jn}^{*} n_i n_m n_l \\ \delta_{jl}^{*} n_i n_m n_n \end{cases} \begin{cases} \delta_{mn}^{*} n_i n_j n_l \\ \delta_{ml}^{*} n_i n_j n_n \end{cases} \begin{cases} \delta_{nl}^{*} n_i n_j n_m \end{cases}$$

Базисные тензоры третьей группы:

$$n_i n_j n_m n_n n_l$$

В силу того, что (17) определяет плотность потенциальной энергии U_F такой, что в ней отсутствуют нормальные производные дисторсий, структура всех тензоров модулей A_{ijmnl}^{ab} не должна включать в себя те базисные тензоры, которые содержат вектор единичной нормали с индексом l. Таким образом, количество базисных тензоров сокращается с двадцати шести до шестнадцати:

$$\begin{cases} n_i\delta^*_{jm}\delta^*_{nl} \\ n_i\delta^*_{jn}\delta^*_{lm} \\ n_i\delta^*_{jl}\delta^*_{mn} \end{cases} \quad \begin{cases} n_j\delta^*_{im}\delta^*_{nl} \\ n_j\delta^*_{in}\delta^*_{lm} \\ n_j\delta^*_{il}\delta^*_{mn} \end{cases} \quad \begin{cases} n_m\delta^*_{ji}\delta^*_{nl} \\ n_m\delta^*_{jn}\delta^*_{li} \\ n_m\delta^*_{jl}\delta^*_{in} \end{cases} \quad \begin{cases} n_n\delta^*_{jm}\delta^*_{il} \\ n_n\delta^*_{ji}\delta^*_{lm} \\ n_n\delta^*_{jl}\delta^*_{mi} \end{cases}$$

$$\delta^*_{il}n_jn_mn_n \quad \delta^*_{jl}n_in_mn_n \quad \delta^*_{ml}n_in_jn_n \quad \delta^*_{nl}n_in_jn_m$$

Окончательно, тензоры A^{ab}_{ijmnl} приобретают вид:

$$\begin{aligned} A^{ab}_{ijmnl} &= \\ &= G^{ab}_1 n_i\delta^*_{jm}\delta^*_{nl} + G^{ab}_2 n_i\delta^*_{jn}\delta^*_{lm} + G^{ab}_3 n_i\delta^*_{jl}\delta^*_{mn} + \\ &+ G^{ab}_4 n_j\delta^*_{im}\delta^*_{nl} + G^{ab}_5 n_j\delta^*_{in}\delta^*_{lm} + G^{ab}_6 n_j\delta^*_{il}\delta^*_{mn} + \\ &+ G^{ab}_7 n_m\delta^*_{ji}\delta^*_{nl} + G^{ab}_8 n_m\delta^*_{jn}\delta^*_{li} + G^{ab}_9 n_m\delta^*_{jl}\delta^*_{in} + \\ &+ G^{ab}_{10} n_n\delta^*_{jm}\delta^*_{il} + G^{ab}_{11} n_n\delta^*_{ji}\delta^*_{lm} + G^{ab}_{12} n_n\delta^*_{jl}\delta^*_{mi} + \\ &+ G^{ab}_{13}\delta^*_{il}n_jn_mn_n + G^{ab}_{14}\delta^*_{jl}n_in_mn_n + G^{ab}_{15}\delta^*_{ml}n_in_jn_n + G^{ab}_{16}\delta^*_{nl}n_in_jn_m \end{aligned} \tag{30}$$

Тензоры модулей шестого ранга A^{ab}_{ijkmnl} были построены в [1] в виде разложения по базисным тензорам шестого ранга, которые являются произведениями «плоских» тензоров Кронекера δ^*_{ij} и/или тензоров вида (n_in_j) со всеми возможными перестановками индексов. Их общая структура имеет вид:

$$\begin{aligned} A^{ab}_{ijkmnl} &= A^{ab}_1(\delta^*_{ij}\delta^*_{km}\delta^*_{nl} + \delta^*_{mn}\delta^*_{li}\delta^*_{jk}) + A^{ab}_2(\delta^*_{ij}\delta^*_{kn}\delta^*_{ml} + \delta^*_{mn}\delta^*_{lj}\delta^*_{ik}) + \\ &+ A^{ab}_3(\delta^*_{ik}\delta^*_{jm}\delta^*_{nl} + \delta^*_{ml}\delta^*_{ni}\delta^*_{jk}) + A^{ab}_4(\delta^*_{in}\delta^*_{km}\delta^*_{jl} + \delta^*_{mj}\delta^*_{li}\delta^*_{nk}) + \\ &+ A^{ab}_5\delta^*_{ij}\delta^*_{kl}\delta^*_{mn} + A^{ab}_6\delta^*_{ik}\delta^*_{jn}\delta^*_{ml} + A^{ab}_7\delta^*_{im}\delta^*_{kj}\delta^*_{nl} + A^{ab}_8\delta^*_{im}\delta^*_{nj}\delta^*_{kl} + \\ &+ A^{ab}_9\delta^*_{im}\delta^*_{lj}\delta^*_{nk} + A^{ab}_{10}\delta^*_{in}\delta^*_{lk}\delta^*_{jm} + A^{ab}_{11}\delta^*_{il}\delta^*_{km}\delta^*_{nj} + \\ &+ A^{ab}_{12}(n_in_j\delta^*_{km}\delta^*_{nl} + n_mn_n\delta^*_{li}\delta^*_{jk}) + A^{ab}_{13}(n_in_j\delta^*_{kn}\delta^*_{ml} + n_mn_n\delta^*_{lj}\delta^*_{ik}) + \\ &+ A^{ab}_{14}(n_in_j\delta^*_{kl}\delta^*_{mn} + n_mn_n\delta^*_{lk}\delta^*_{ij}) + \\ &+ A^{ab}_{15}(n_in_n\delta^*_{km}\delta^*_{jl} + n_mn_j\delta^*_{li}\delta^*_{nk}) + A^{ab}_{16}(n_in_n\delta^*_{ml}\delta^*_{jk} + n_mn_j\delta^*_{ik}\delta^*_{nl}) + \\ &+ A^{ab}_{17}(n_in_n\delta^*_{lk}\delta^*_{jm} + n_mn_j\delta^*_{kl}\delta^*_{ni}) + \\ &+ A^{ab}_{18}n_in_m\delta^*_{kj}\delta^*_{nl} + A^{ab}_{19}n_in_m\delta^*_{nj}\delta^*_{kl} + A^{ab}_{20}n_in_m\delta^*_{lj}\delta^*_{nk} + \\ &+ A^{ab}_{21}n_jn_n\delta^*_{ik}\delta^*_{ml} + A^{ab}_{22}n_jn_n\delta^*_{im}\delta^*_{kl} + A^{ab}_{23}n_jn_n\delta^*_{il}\delta^*_{km} + A^{ab}_{24}\delta^*_{kl}n_in_jn_mn_n \end{aligned} \tag{31}$$

С учетом (28), (29), (30) и (31), уравнения закона Гука для силовых факторов на поверхности среды можно получить из обобщенных формул Грина (21), которые отличаются от сформулированных в [1] наличием кривизн в адгезионных напряжениях и наличием дисторсий в адгезионных моментных напряжениях:

$$
\begin{aligned}
a_{ij}^{1} &= A_{ijmn}^{11}\frac{\partial R_m}{\partial x_n} + A_{ijmn}^{12}D_{mn}^{2} + A_{ijmnl}^{11}\frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + A_{ijmnl}^{12}\frac{\partial D_{mn}^{2}}{\partial x_l} \\
a_{ijk}^{1} &= A_{mnijk}^{11}\frac{\partial R_m}{\partial x_n} + A_{mnijk}^{21}D_{mn}^{2} + A_{ijkmnl}^{11}\frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + A_{ijkmnl}^{12}\frac{\partial D_{mn}^{2}}{\partial x_l} \\
a_{ij}^{2} &= A_{ijmn}^{21}\frac{\partial R_m}{\partial x_n} + A_{ijmn}^{22}D_{mn}^{2} + A_{ijmnl}^{21}\frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + A_{ijmnl}^{22}\frac{\partial D_{mn}^{2}}{\partial x_l} \\
a_{ijk}^{2} &= A_{mnijk}^{12}\frac{\partial R_m}{\partial x_n} + A_{mnijk}^{22}D_{mn}^{2} + A_{ijkmnl}^{21}\frac{\partial^2 R_m}{\partial x_l \partial x_n} + A_{ijkmnl}^{22}\frac{\partial D_{mn}^{2}}{\partial x_l}
\end{aligned}
\qquad (32)
$$

Используя формулировки плотностей потенциальной энергии (24) и (28), был построен лагранжиан теории, который, с учетом введенных в (28) с помощью тензоров модулей (30) билинейных относительно кривизн и дисторсий слагаемых в потенциальной энергии адгезии, представлен здесь в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
L = A &- \frac{1}{2}\iiint (C_{ijmn}^{ab}D_{ij}^{a}D_{mn}^{b} + C_{ijkmnl}^{ab}D_{ijk}^{a}D_{mnl}^{b})dV - \\
&- \frac{1}{2}\oiint (A_{ijmn}^{ab}D_{ij}^{a}D_{mn}^{b} + 2A_{ijmnl}^{ab}D_{ij}^{a}D_{mnl}^{b} + A_{ijkmnl}^{ab}D_{ijk}^{a}D_{mnl}^{b})dF
\end{aligned}
\qquad (33)
$$

Здесь, в целях лаконичности, не выписаны потенциальные энергии ребер поверхности и их угловых точек. Поэтому лагранжиан в выписанной форме (33) описывает упругие свойства тел, ограниченных гладкими поверхностями (без ребер и угловых точек).

3. ЕДИНАЯ ПРИРОДА КОГЕЗИОННЫХ И АДГЕЗИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ.

Все объемные тензоры модулей шестого ранга участвуют в свертках с кривизнами двух сортов, и общим свойством всех сверток является то, что все кривизны – интегрируемы, т.е. являются градиентами соответствующих дисторсий. Представляется, что это свойство следует использовать явно.

Теорема: «В объемную плотность потенциальной энергии кривизн входят только те модули, которые фигурируют множителями при базисных тензорах, симметричных при перестановке третьего и шестого индексов. Остальные модули входят в ту часть объемной плотности потенциальной энергии кривизн, которая может быть преобразована в соответствующую часть поверхностной плотности потенциальной энергии адгезионного взаимодействия кривизн и дисторсий разных сортов».

Доказательство.

Рассмотрим ту часть удвоенной объемной потенциальной энергии, которая определяется кривизнами обоих сортов. Дважды возьмем её по частям так, чтобы индексы кривизн k,l поменять местами:

$$
\begin{aligned}
&\iiint C_{ijkmnl}^{ab}D_{ij,k}^{a}D_{mn,l}^{b}dV = \\
&= -\iiint C_{ijkmnl}^{ab}D_{ij,kl}^{a}D_{mn}^{b}dV + \oiint C_{ijkmnl}^{ab}n_l D_{ij,k}^{a}D_{mn}^{b}dF = \\
&= \iiint C_{ijkmnl}^{ab}D_{ij,l}^{a}D_{mn,k}^{b}dV + \oiint [C_{ijkmnl}^{ab}n_l D_{ij,k}^{a}D_{mn}^{b} - C_{ijkmnl}^{ab}n_k D_{ij,l}^{a}D_{mn}^{b}]dF
\end{aligned}
$$

Перенося объемный интеграл из правой части в левую и меняя обозначения индексов суммирования, получим:

$$\iiint (C^{ab}_{ijkmnl} - C^{ab}_{ijlmnk}) D^a_{ij,k} D^b_{mn,l} dV = \oiint \overline{A}^{ab}_{mnijk} D^a_{mn} D^b_{ij,k} dF \tag{34}$$

Здесь введено обозначение:

$$\overline{A}^{ab}_{mnijk} = (C^{ba}_{ijkmnl} - C^{ba}_{ijlmnk}) n_l \tag{35}$$

На основании (34) и (35), лагранжиан (33) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2}\iiint [C^{ab}_{ijmn} D^a_{ij} D^b_{mn} + (C^{ab}_{ijkmnl} + C^{ab}_{ijlmnk}) D^a_{ijk} D^b_{mnl} / 2] dV - \\ - \frac{1}{2}\oiint (A^{ab}_{ijmn} D^a_{ij} D^b_{mn} + 2(A^{ab}_{ijmnl} + \overline{A}^{ab}_{ijmnl}) D^a_{ij} D^b_{mnl} + A^{ab}_{ijkmnl} D^a_{ijk} D^b_{mnl}) dF \end{aligned} \tag{36}$$

Тензоры $(C^{ab}_{ijkmnl} - C^{ab}_{ijlmnk})$, а в соответствии с (35) и тензоры $\overline{A}^{ab}_{mnijk}$, содержащие те же «моментные» модули, определяют часть потенциальной энергии взаимодействия дисторсий и кривизн соответствующих сортов на поверхности.

Таким образом, теорема доказана.

Тензоры $(C^{ab}_{ijkmnl} + C^{ab}_{ijlmnk})$ определяют те комбинации исходных «моментных» модулей, которые являются существенными для формулировки выражения объемной плотности потенциальной энергии кривизн. Поэтому можно сразу приписать тензорам C^{ab}_{ijkmnl} это свойство симметрии и вместо (26) определять их структуру соотношениями:

$$\begin{aligned} & C^{ab}_{ijkmnl} = \\ & = c^{ab}_1 (\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{lm}\delta_{nk} + \delta_{mn}\delta_{ki}\delta_{jl}) + \\ & + c^{ab}_2 (\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{ni}\delta_{jk} + \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{nk} + \delta_{mk}\delta_{ni}\delta_{jl}) + \\ & + c^{ab}_3 (\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mk}) + \\ & + c^{ab}_4 (\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{nk}) + \\ & + (c^{ab}_5 \delta_{ij}\delta_{mn} + c^{ab}_6 \delta_{im}\delta_{jn} + c^{ab}_7 \delta_{in}\delta_{mj}) \delta_{kl} \end{aligned} \tag{37}$$

Как видно из сравнения (26) и (37), структура тензоров C^{ab}_{ijkmnl} становится более простой, количество базисных тензоров сокращается с одиннадцати до семи. Соответственно, сокращается и количество существенных модулей:

$$\begin{cases} c^{ab}_1 = (C^{ab}_1 + C^{ab}_2)/2 \\ c^{ab}_2 = (C^{ab}_3 + C^{ab}_4)/2 \\ c^{ab}_3 = (C^{ab}_6 + C^{ab}_{11})/2 \\ c^{ab}_4 = (C^{ab}_7 + C^{ab}_9)/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c^{ab}_5 = C^{ab}_5 \\ c^{ab}_6 = C^{ab}_8 \\ c^{ab}_7 = C^{ab}_{10} \end{cases}$$

Остальные объемные «моментные» модули являются слагаемыми в компонентах тензоров адгезионных свойств $(A^{ab}_{ijmnl} + \overline{A}^{ab}_{ijmnl})$ и не меняют структуру тензоров A^{ab}_{ijmnl}. Сравнивая структуру тензоров A^{ab}_{mnijk} (30) и $\overline{A}^{ab}_{mnijk}$ (26),(35) можно убедиться, что первый включает в себя второй как частный случай. Следовательно, под суммой $(A^{ab}_{ijmnl} + \overline{A}^{ab}_{ijmnl})$ можно по-прежнему понимать тензоры A^{ab}_{ijmnl}, так как в соответствии с (30) их структура одинакова.

Лагранжиан (36) приобретает тогда исходный вид лагранжиана (33), но с другой, более простой, структурой тензоров модулей C^{ab}_{ijkmnl} (37), а не (26).

Следствие-1. Доказанная теорема позволяет существенно упростить и теорию Миндлина. Действительно, теория Миндлина строится в предположении отсутствия адгезионных свойств поверхности среды. Следовательно, антисимметричная по третьему и шестому индексам часть тензора Миндлина C^{22}_{ijkmnl} должна быть равна нулю. Следовательно, в теории Миндлина тензор Миндлина C^{22}_{ijkmnl} должен содержать не одиннадцать, а только семь «моментных» модулей в соответствии (37).

Следствие-2. Доказанная теорема приводит и к упрощению теории Тупина. В ней так же отсутствуют адгезионные взаимодействия, и антисимметричная по третьему и шестому индексам часть тензора Тупина C^{11}_{ijkmnl} тоже должна быть равна нулю. В отличие от тензора Миндлина C^{22}_{ijkmnl}, тензор Тупина C^{11}_{ijkmnl}, обладает дополнительными свойствами симметрии $C^{11}_{ijkmnl} = C^{11}_{ikjmnl}$ и $C^{11}_{ijkmnl} = C^{11}_{ijkm\ln}$, и количество входящих в него модулей благодаря доказанной теореме сокращается с пяти до двух.

$$
\begin{aligned}
&C^{11}_{ijkmnl} = \\
&= c^{11}_1(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{ni}\delta_{jk} + \\
&+ \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml} + \delta_{mn}\delta_{lj}\delta_{ik} + \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + \delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} + \\
&+ \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{mj}\delta_{nk}\delta_{li} + \delta_{in}\delta_{mj}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mk}) + \\
&+ c^{11}_2(\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{nk})
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Следствие-3. Соотношение (34) позволяет субъективно относить потенциальную энергию, относительно которой оно записано, или к потенциальной энергии когезионных взаимодействий, или к потенциальной энергии адгезионных взаимодействий. Чтобы исключить такой субъективизм, следует признать единую физическую природу энергий, стоящих в обеих частях этого соотношения.

Следствие-4. При установленной соотношением (34) единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий, первое и второе Следствия можно трактовать как утверждение о несводимости когезионных взаимодействий к адгезионным. Действительно, теории Миндлина и Тупина построены в предположении отсутствия адгезионных взаимодействий, и в то же время в них имеют место когезионные взаимодействия, правда, с более простой структурой тензоров модулей (37) и (38).

Следствие-5. Справедливо и противоположное утверждение: существование идеальной адгезии (в соответствии с [9]) позволяет утверждать, что и адгезионные взаимодействия не сводятся к когезионным.

Следствие-6. При «классической» формулировке теорий Миндлина и Тупина неявно (через «лишние» моментные модули) учитывается часть потенциальной энергии адгезии, билинейной по дисторсиям и кривизнам. При этом игнорируются квадратичные по дисторсиям и по кривизнам слагаемые. Но наличие в положительно определенной квадратичной форме ненулевого билинейного слагаемого является достаточным условием существования соответствующих квадратичных слагаемых. В результате, теории Миндлина и Тупина в их общепризнанной постановке обладают обнаруженным здесь внутренним противоречием. Поэтому в этих теориях с необходимостью следует или использовать тензоры с более простой структурой (37) и (38), или в соответствии с (28) учитывать потенциальную энергию адгезии с полным спектром взаимодействий.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Развитая здесь теория сред с сохраняющимися дислокациями позволяет получить целый ряд пусть пока не количественных, а качественных результатов, проясняющих свойства дефектных сред. К новым результатам этой работы можно отнести уточнение структуры потенциальной энергии адгезии, благодаря учету в ней билинейных по кривизнам и дисторсиям слагаемых. Установлена единая природа когезионных и адгезионных взаимодействий (36) и их несводимость друг к другу. Дано теоретическое обоснование более «бедной» структуры тензоров «моментных» модулей, как в этой теории (37), так и в теориях Миндлина (37) и Тупина (38). Структура потенциальной энергии адгезии, сформулированной в этой работе, открывает возможность аналогичным образом установить единую природу адгезионных взаимодействий и взаимодействий на ребрах поверхности. Естественно при этом ожидать и теоретически обоснованного сокращения количества адгезионных модулей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Обобщение модели Миндлина», «Композиты и наноструктуры», 2011, т.3, №1, стр. 2-16.

2. Mindlin R.D. «Micro-structure in linear elasticity», «Archive of Rational Mechanics and Analysis», 1964, №1, p. 51-78.

3. Toupin R.A. «Elastic materials with couple-stresses», «Archive of Rational Mechanics and Analysis», 1964, №2, p. 85-112.

4. Белов П.А., Лурье С.А. «Общая теория дефектов сплошных сред», «Механика композиционных материалов и конструкций», 2002, т..9, №4, стр. 471-484.

5. Белов П.А., Лурье С.А. «К общей геометрической теории дефектных сред», «Физическая мезомеханика», 2007, т. 10, №6, стр.

6. Образцов И.Ф., Елпатьевский А.Н., Белов П.А. «Об общем подходе к формулировке линейных моделей сред различной гладкости», », 1988, ДАН, т. 303, 6, стр. 1331-1334.

7. Белов П.А., Лурье С.А. «Континуальная модель микрогетерогенных сред», ПММ, 2009, т.73, №5, стр. 833-848.

8. Лурье С.А., Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием»»», Сб. трудов конференции «Современные проблемы механики гетерогенных сред», 2005, Изд. ИРПИМ РАН, стр. 235-268.

9. Белов П.А., Лурье С.А. «Теория идеальных адгезионных взаимодействий», "Механика композиционных материалов и конструкций", 2007, т.14, N3, стр. 519-536.

10. Белов П.А., Лурье С.А. «Континуальная теория адгезионных взаимодействий поврежденных сред», «Механика композиционных материалов и конструкций», 2009, т.15, №4, , 610-629.

11. Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. «Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstructure materials», BOOK series "Advances in Mechanics and Mathematics". Generalized Continua, 2010, Springer, New York, p.223-234.

Сведения об авторе:
Белов Петр Анатольевич,
к.ф.-м.н., нач. отд. прочности, *ГК «Ростехнологии», НПК «Композиционные материалы и технологии», ОАО «Московский Машиностроительный Экспериментальный Завод – Композиционные Технологии»,* г. Москва, Россия, e-mail: *BelovPA@yandex.ru, 8-915-3358835.*