

# ТЕОРИЯ ДЕФЕКТНЫХ СРЕД КАК МОДЕЛЬ КОНТИНУАЛЬНОЙ НАНОМЕХАНИКИ.

Белов П.А.

Имеется достаточно большой ряд экспериментальных фактов, фиксирующих существование неклассических (масштабных) эффектов в сплошных средах. При этом, несмотря на значительные усилия, можно констатировать, что фактически отсутствует последовательная континуальная теория механики деформируемых сред с масштабными эффектами, которая бы позволила установить общие закономерности внутренних взаимодействий на неоднородностях субатомного уровня, связанных с микро- и наноструктурами. С этой точки зрения методы механики сплошной среды представляются наиболее последовательными и корректными, и могут служить основой для построения моделей механики дефектных сред. Более точно: должны быть развиты модели деформирования сред с учетом масштабных эффектов, связанных с существованием в сплошной среде неоднородностей масштаба  $10^{-9}$  м. В основание таких моделей должен быть заложен факт существования дефектов сплошности, таких как дислокации, дисклинации и дефекты более высокого ранга. При этом, конечно, описание громадного количества изолированных дефектов типа дислокаций имеет смысл заменить полевым представлением. Реализация такого подхода, даже в рамках линейных моделей, позволяет развить механику дефектных сред как некоторое естественное обобщение классической механики деформируемых сред – континуальную наномеханику.

Объективные свойства дефектных сред намного сложнее и многообразнее свойств сплошных (бездефектных) сред. Градиентные теории Миндлина [1] и Тупина [2] являются общепризнанным инструментом изучения свойств дефектных сред и масштабных эффектов, характерных для них. Обе эти теории описываются дифференциальными уравнениями повышенного порядка и наличием большого количества неклассических модулей. Для инженерных приложений требуются корректно упрощенные модели, содержащие минимум новых модулей, подлежащих экспериментальному определению. Прежде, чем строить корректно упрощенные модели, следует убедиться в том, что исходная модель обладает всеми присущими дефектной среде свойствами. К сожалению, ни модель Миндлина, ни модель Тупина не отражают этой полноты свойств. Действительно, модель Миндлина учитывает только кривизны  $D_{ij,k}^2$ , связанные с градиентом неинтегрируемой дисторсии  $D_{ij}^2$ , а модель Тупина – только кривизны  $D_{ij,k}^1$ , связанные с градиентом интегрируемой дисторсии  $D_{ij}^1 = R_{i,j}$ , и обе эти теории естественным образом исключают возможность взаимодействия между кривизнами этих двух сортов. Сделать обоснованный выбор между этими двумя общепризнанными теориями для построения прикладных инженерных моделей в рамках существующей иерархии градиентных моделей невозможно.

Доклад представляет формулировку модели, обобщающей упомянутые выше модели и содержащей их как строгие частные случаи. Лагранжиан модели имеет вид:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{pq} D_{ij}^p D_{mn}^q + C_{ijkml}^{pq} D_{ijk}^p D_{mnl}^q] dV - \tag{1}$$

$$- \frac{1}{2} \iint [A_{ijmn}^{pq} D_{ij}^p D_{mn}^q + 2A_{ijmnl}^{pq} D_{ij}^p D_{mnl}^q + A_{ijkml}^{pq} D_{ijk}^p D_{mnl}^q] dF + \sum \oint U_s ds + \sum U_p$$

Здесь в целях лаконичности не приводятся структуры потенциальных энергий ребер поверхности и их угловых точек.  $D_{ij}^p, D_{ijk}^p$  - тензоры дисторсии и кривизн двух сортов

(индексы сортности  $p, q$  пробегают значения от 1 до 2),  $C_{ijmn}^{pq}, C_{ijkml}^{pq}$  - тензоры «объемных» модулей,  $A_{ijmn}^{pq}, A_{ijml}^{pq}, A_{ijkml}^{pq}$  - тензоры «поверхностных» модулей, отражающих адгезионные свойства поверхности.

В отличие от «классических» моделей Миндлина и Тупина, представляемая модель учитывает в объемной плотности потенциальной энергии не только кривизны  $D_{ij,k}^2$ , связанные с градиентом свободной дисторсии, но и кривизны  $D_{ij,k}^1$ , связанные с градиентом стесненной дисторсии, а также их взаимодействие. Вторым отличием является учет в лагранжиане (1) потенциальных энергий поверхности (энергии адгезионных взаимодействий), ребер поверхности и угловых точек ребер поверхности.

$$U = \iiint U_V dV + \oint U_F dF + \sum \oint U_S ds + \sum U_P$$

Здесь плотности потенциальных энергий являются квадратичными формами своих аргументов с учетом соответствующей анизотропии:  $U_V = U_V(D_{ij}^p, D_{ij}^p)$ ,  $U_F = U_F(D_{ij}^p, D_{ijq}^p \delta_{qk}^*)$ ,  $U_S = U_S(D_{ij}^p, D_{ijn}^p s_n)$ ,  $U_P = U_P(D_{ij}^p)$ ,  $\delta_{ij}$  - дельта Кронекера,  $\delta_{ij}^* = (\delta_{ij} - n_i n_j)$  - «плоская» дельта Кронекера, определенная на гладкой поверхности тела,  $n_i$  - орт нормали к поверхности среды,  $s_i$  - орт касательной к ребру поверхности.

**Модель Миндлина.** Если в лагранжиане (1) тензоры «моментных» модулей  $C_{ijkml}^{11}, C_{ijkml}^{12}$  и все тензоры адгезионных модулей положить равными нулю, лагранжиан сформулированной теории совпадет с лагранжианом модели Миндлина:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + 2C_{ijmn}^{12} D_{ij}^1 D_{mn}^2 + C_{ijmn}^{22} D_{ij}^2 D_{mn}^2 + C_{ijkml}^{22} D_{ij}^2 D_{mnl}^2] dV$$

Как было доказано в [3], из модели Миндлина, в свою очередь, следуют как строгие частные случаи: «простейшая» теория сред с сохраняющимися дислокациями [4], теория сред Коссера (теория сред с  $\omega$  - дислокациями) [5], теория пористых сред (теория сред с  $\theta$  - дислокациями) [6] и теория сред с  $\gamma$  - дислокациями [6].

**Модель Тупина.** Пусть все тензоры модулей, содержащие индекс сортности 2, равны нулю. Тогда лагранжиан (1) принимает вид, совпадающий с лагранжианом идеальной (бездефектной) среды Тупина с адгезионными свойствами поверхности, а при  $A_{ijmn}^{11} = 0$  и  $A_{ijkml}^{11} = 0$  - с «классической» моделью Тупина:

$$L = A - \frac{1}{2} \iiint [C_{ijmn}^{11} D_{ij}^1 D_{mn}^1 + C_{ijkml}^{11} D_{ijk}^1 D_{mnl}^1] dV$$

Сформулированная теория радикально меняет точку зрения на место модели Тупина в иерархии градиентных моделей. Если раньше модель Тупина трактовалась как приближенная (прикладная) модель, вытекающая из модели Миндлина, благодаря использованию обобщения гипотезы Аэро-Кувшинского, то теперь она занимает, наравне с моделью Миндлина, положение строгого частного случая более общей теории. Из неё, в свою очередь, вытекают как строгие частные случаи: «простейшая» модель когезионного поля [7], модель Аэро-Кувшинского [8] и модель Джеремилло [9].

Лагранжиан (1) может служить основой для построения инженерных приложений.

Представляемая модель дает некоторые новые качественные результаты, которые невозможно получить в рамках более простых моделей. Доказана теорема «О единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий», которая не может быть даже сформулирована в рамках «классических» моделей Миндлина и Тупина в силу того, что в них не определены адгезионные взаимодействия.

Формулировка теоремы: «В объемную плотность потенциальной энергии кривизн  $C_{ijklmn}^{pq} D_{ijk}^p D_{mnl}^q / 2$  входят только те модули, которые фигурируют множителями при базисных тензорах, симметричных при перестановке третьего и шестого индексов. Остальные модули входят в ту часть объемной плотности потенциальной энергии кривизн, которая может быть преобразована в соответствующую часть поверхностной плотности потенциальной энергии адгезионного взаимодействия кривизн и дисторсий разных сортов  $A_{ijmnl}^{pq} D_{ij}^p D_{mnl}^q$ ».

Часть потенциальной энергии когезионных взаимодействий, связанная с антисимметричными при перестановке третьего и шестого индексов составляющими тензоров шестого ранга, может быть представлена как часть потенциальной энергии адгезионных взаимодействий, и наоборот. Этот факт говорит о единой природе когезионных и адгезионных взаимодействий. Как практически важное следствие теоремы получено теоретически обоснованное сокращение «моментных» модулей в теории Миндлина с 11 до 7, а в теории Тупина - с 5 до 2.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Mindlin R.D. «Micro-structure in linear elasticity», «Archive of Rational Mechanics and Analysis», 1964, №1, p. 51-78.
2. Toupin R.A. «Elastic materials with couple-stresses», 1962, Arch. Ration. Mech. And Analysis.
3. Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. «Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstructure materials», BOOK series "Advances in Mechanics and Mathematics". Generalized Continua, 2010, Springer, New York, p.223-234.
4. Белов П.А., Лурье С.А. «Континуальная модель микрогетерогенных сред», ПММ, 2009, т.73, №5, стр. 833-848.
5. Cosserat E., Cosserat F., «Theorie des Corps Deformables», 1909, Paris, Hermann.
6. Лурье С.А., Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с «двойникованием»», Сб. трудов конференции «Современные проблемы механики гетерогенных сред», 2005, Изд. ИРПИМ РАН, стр. 235-268.
7. Белов П.А., Бодунов А.М., Лурье С.А., Образцов И.Ф., Яновский Ю. Г. «О моделировании масштабных эффектов в тонких структурах», «Механика композиционных материалов и конструкций», 2002, т.8, №4, стр. 585-598.
8. Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В. «Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц», 1960, ФТТ, т. 2, вып. 7, 1399-1409.
9. Jaramillo T.J. «A generalization of the energy function of elasticity theory», Dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago, 1929.