Г.Я. Жигалин, П.А. Белов[*].

Государственный научно-исследовательский институт химии и технологии элементорганических соединений – ГНЦ РФ ГНИИХТЭОС (г. Москва).

[*]ОАО «Московский машиностроительный экспериментальный завод – композиционные технологии» (г. Москва).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГРАФЕНА.

Как частный случай общей теории трехмерной среды с полями сохраняющихся дислокаций, с адгезионными свойствами ограничивающей её поверхности, сформулирована модель двумерной бездефектной среды. Для построения модели использован предельный переход $c \to 0$, где c - длина образующей цилиндрической области среды с произвольной непрерывной направляющей. В результате, потенциальная энергия такой области определяется только потенциальной энергией адгезии плоскости основания. В качестве примера такой двумерной среды рассмотрен лист графена. Рассмотрены постановки задачи деформирования листа графена в своей плоскости и задачи изгиба. Установлено, что постановка первой задачи эквивалентна постановке плоской задачи градиентной теории Тупина. Постановка задачи изгиба с небольшими оговорками эквивалентна теории изгиба пластин по Тимошенко. Характерной особенностью обеих постановок является то, что механические свойства листа графена определяются не «объемными» модулями, а адгезионными, имеющими иную физическую размерность, совпадающую с размерностью соответствующих жесткостей классических пластин.

Исследуется обобщение модели Миндлина, построенное в работе [1]. В отличие от «классических» моделей Миндлина [2] и Тупина [3], её обобщение учитывает в объемной плотности потенциальной энергии не только кривизны, связанные с градиентом свободной дисторсии, но и кривизны, связанные с градиентом стесненной дисторсии, а также их взаимодействие. Вторым отличием является учет в лагранжиане обобщённой модели потенциальных энергий поверхности (энергии адгезионных взаимодействий), ребер поверхности и угловых точек ребер поверхности. В частности, лагранжиан обобщённой модели имеет вид:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [C^{11}_{ijmn} D^1_{ij} D^1_{mn} + 2C^{12}_{ijmn} D^1_{ij} D^2_{mn} + C^{22}_{ijmn} D^2_{ij} D^2_{mn} +$$
$$+ C^{11}_{ijkmnl} D^1_{ijk} D^1_{mnl} + 2C^{12}_{ijkmnl} D^1_{ijk} D^2_{mnl} + C^{22}_{ijkmnl} D^2_{ijk} D^2_{mnl}]dV -$$
$$- \frac{1}{2}\oiint [A^{11}_{ijmn} D^1_{ij} D^1_{mn} + 2A^{12}_{ijmn} D^1_{ij} D^2_{mn} + A^{22}_{ijmn} D^2_{ij} D^2_{mn} +$$
$$+ A^{11}_{ijkmnl} D^1_{ijk} D^1_{mnl} + 2A^{12}_{ijkmnl} D^1_{ijk} D^2_{mnl} + A^{22}_{ijkmnl} D^2_{ijk} D^2_{mnl}]dF \qquad (1)$$

Кинематическими переменными лагранжиана (1) являются:
- непрерывная часть вектора перемещений R_i,
- дисторсии двух сортов D^1_{ij}, D^2_{ij} (стесненная и свободная дисторсии),
- кривизны двух сортов D^1_{ijk}, D^2_{ijk} (градиенты соответствующих дисторсий).

Между этими кинематическими переменными существуют связи, определяющие кинематическую модель такой среды:

$$D^1_{ij} = R_{i,j} \quad D^1_{ijk} = R_{i,jk} \quad D^2_{ijk} = D^2_{ij,k} \qquad (2)$$

Тензоры модулей C^{pq}_{ijmn} и C^{pq}_{ijkmnl} определяют механические свойства среды в объеме, а тензоры A^{pq}_{ijmn} и A^{pq}_{ijkmnl} - на поверхности среды.

Эта модель дает некоторые новые качественные результаты, которые невозможно получить в рамках более простых моделей. В данной работе изучается один из таких результатов – возможность объяснить механические свойства двухмерной среды и построить прикладные теории изгиба и деформирования в плоскости листа графена именно как двумерной среды.

Действительно, лагранжианы как классической механики сплошной среды, так и общепризнанных градиентных моделей Миндлина и Тупина, содержат потенциальную энергию, определяемую только через объемную плотность потенциальной энергии. Формально, для двухмерной среды лагранжианы этих моделей не применимы. Это утверждение следует из того, что потенциальная энергия среды нулевого объема в этих моделях равна нулю. Все теории пластин в этих моделях строятся как модели трехмерных тел с малым, по сравнению с остальными, габаритом в третьем направлении. Тем не менее, и в теории пластин этих моделей остается тот же принципиальный порок: пластина нулевого объема (за счет нулевой толщины) будет иметь нулевую потенциальную энергию. Пример листа графена как объемной структуры, имеющей толщину, соизмеримую с диаметром атома углерода, нельзя считать корректным [4]. Действительно, рассмотрим такую объемную структуру, как пластину графита, состоящую из параллельных листов графена. Вполне очевидно, что «объемные» свойства такой структуры определяются межатомными взаимодействиями «длинных графитовых» связей между атомами углерода соседних листов графена. Интерполяция свойств многослойной и даже двухслойной графитовой пластины на свойства изолированного листа графена представляется недопустимой. Таким образом, механические свойства графена целесообразно попытаться описать в рамках теории, лагранжиан которой наряду с объемной, содержит и поверхностную потенциальную энергию. В работе [5] рассматривался вариант теории тонких пленок с адгезионными свойствами лицевых поверхностей. Однако в предельном случае, рассмотренном здесь, при нулевом объеме (толщине) пленки уравнение изгиба вырождалось в уравнение второго порядка. Это определялось тем, что тогда учитывались только идеальные, не градиентные адгезионные свойства лицевых поверхностей. Формулировка более общей теории [1] позволяет теперь вернуться к этой проблеме и сформулировать невырожденный случай.

1. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА.

В случае лагранжиана (1), если объем среды равен нулю, лагранжиан приобретает нетривиальный специфически простой вид:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2}\oiint [&A^{11}_{ijmn} D^1_{ij} D^1_{mn} + 2A^{12}_{ijmn} D^1_{ij} D^2_{mn} + A^{22}_{ijmn} D^2_{ij} D^2_{mn} + \\ &+ A^{11}_{ijkmnl} D^1_{ijk} D^1_{mnl} + 2A^{12}_{ijkmnl} D^1_{ijk} D^2_{mnl} + A^{22}_{ijkmnl} D^2_{ijk} D^2_{mnl}]dF \end{aligned} \qquad (3)$$

Если при этом рассматривать графен как идеальную двумерную периодическую структуру, следует отбросить в выражении (3) все слагаемые, содержащие тензор свободной дисторсии, в силу того, что он определяет дефектность рассматриваемой среды. Лагранжиан (3) приобретает вид:

$$L = A - \frac{1}{2}\oiint [A^{11}_{ijmn} D^1_{ij} D^1_{mn} + A^{11}_{ijkmnl} D^1_{ijk} D^1_{mnl}]dF \qquad (4)$$

При этом в силу того, что графен представляет собой двумерную структуру, поверхностная плотность потенциальной энергии не должна зависеть от нормальных производных от перемещений. В связи с этим следует потребовать, чтобы тензоры адгезионных модулей обладали следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &A^{11}_{ijmn} n_j = A^{11}_{ijmn} n_n = 0 \\ &A^{11}_{ijkmnl} n_j = A^{11}_{ijkmnl} n_k = A^{11}_{ijkmnl} n_n = A^{11}_{ijkmnl} n_l = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь n_j - орт нормали к плоскости листа графена. Для простоты будем полагать, что в плоскости листа графена механические свойства изотропные. Из (4) и (5) вытекает следующая, упрощенная по сравнению с [1], структура адгезионных модулей:

$$A^{11}_{ijmn} = \lambda^F \delta^*_{ij} \delta^*_{mn} + \mu^F (\delta^*_{im} \delta^*_{jn} + \delta^*_{in} \delta^*_{jm}) + \delta^F n_i n_m \delta^*_{jn}$$

$$A_{ijkmnl}^{11} =$$
$$= A_1^{11}(\delta_{ij}^*\delta_{km}^*\delta_{nl}^* + \delta_{mn}^*\delta_{li}^*\delta_{jk}^* + \delta_{ij}^*\delta_{lm}^*\delta_{nk}^* + \delta_{mn}^*\delta_{ki}^*\delta_{jl}^* +$$
$$+ \delta_{ik}^*\delta_{jm}^*\delta_{nl}^* + \delta_{ml}^*\delta_{ni}^*\delta_{jk}^* + \delta_{il}^*\delta_{jm}^*\delta_{nk}^* + \delta_{mk}^*\delta_{ni}^*\delta_{jl}^* +$$
$$+ \delta_{ij}^*\delta_{kl}^*\delta_{mn}^* + \delta_{ik}^*\delta_{jn}^*\delta_{ml}^* + \delta_{il}^*\delta_{jn}^*\delta_{mk}^* + \delta_{in}^*\delta_{lk}^*\delta_{jm}^*) +$$
$$+ A_2^{11}\delta_{im}^*(\delta_{jk}^*\delta_{nl}^* + \delta_{jn}^*\delta_{kl}^* + \delta_{jl}^*\delta_{kn}^*) +$$
$$+ A_3^{11}n_i n_m(\delta_{jk}^*\delta_{nl}^* + \delta_{jn}^*\delta_{kl}^* + \delta_{jl}^*\delta_{kn}^*)$$

Здесь $\delta_{ij}^* = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ - «плоский» тензор Кронекера. Развернутая структура потенциальной энергии принимает вид:

$$\begin{aligned} U_F = \frac{1}{2}\{&\lambda^F r_{i,j} r_{m,n} + \mu^F(\delta_{jn}^* r_{m,j} r_{m,n} + r_{n,j} r_{j,n}) + \\ &+ 4A_1^{11}\delta_{mn}^*(r_{i,ij} r_{j,mn} + r_{i,im} r_{j,jn} + r_{i,jm} r_{j,in}) + \\ &+ A_2^{11} r_{i,jk} r_{i,nl}(\delta_{jk}^*\delta_{nl}^* + \delta_{jn}^*\delta_{kl}^* + \delta_{jl}^*\delta_{kn}^*) + \\ &+ \delta^F\delta_{jn}^* R_{,j} R_{,n} + A_3^{11} R_{,jk} R_{,nl}(\delta_{jk}^*\delta_{nl}^* + \delta_{jn}^*\delta_{kl}^* + \delta_{jl}^*\delta_{kn}^*)\} \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь вектор перемещений $R_i = r_i + Rn_i$ представлен в виде разложения на прогиб R и проекцию, лежащую в плоскости листа r_i. В отличие от классической теории пластин, в данном случае задача изгиба листа графена всегда отделяется от задачи деформирования в своей плоскости. Рассмотрим эти задачи отдельно.

2. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАФЕНА ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ В ПЛОСКОСТИ.

В соответствии с формулировкой выражения потенциальной энергии листа графена (6), при деформировании в плоскости листа прогибы равны нулю. Тогда лагранжиан приобретает вид:

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2}\iint \{&\lambda^F r_{i,i} r_{m,m} + \mu^F\delta_{jn}^* r_{m,j} r_{m,n} + \mu^F r_{n,j} r_{j,n} + \\ &+ 4A_1^{11}\delta_{mn}^*(r_{i,ij} r_{j,mn} + r_{i,im} r_{j,jn} + r_{i,jm} r_{j,in}) + \\ &+ A_2^{11} r_{i,jk} r_{i,nl}(\delta_{jk}^*\delta_{nl}^* + \delta_{jn}^*\delta_{kl}^* + \delta_{jl}^*\delta_{kn}^*)\}dF \end{aligned}$$

Силовые факторы можно определить, используя формулы Грина:

$$\sigma_{ij}^{11} = \frac{\partial U_F}{\partial r_{i,j}} = \lambda^F\delta_{ij}^* r_{m,m} + \mu^F(\delta_{jn}^* r_{i,n} + \delta_{in}^* r_{j,n})$$

$$m_{ijk}^{11} = \frac{\partial U_F}{\partial r_{i,jk}} = 4A_1^{11}(\delta_{ij}^*\delta_{mn}^* r_{k,mn} + \delta_{ij}^*\delta_{kn}^* r_{p,pn} + \delta_{kn}^* r_{j,in}) + A_2^{11} r_{i,nl}(\delta_{jk}^*\delta_{nl}^* + \delta_{jn}^*\delta_{kl}^* + \delta_{jl}^*\delta_{kn}^*)$$

Вариационное уравнение в силовых факторах:

$$\delta L = \iint (\sigma^{11}_{ij,j} - m^{11}_{ijk,jk} + P^F_i)\delta r_i dF +$$
$$+\oint \{-(m^{11}_{ijk} v_j v_k)\delta(r_{i,p} v_p) + (P^s_i - \sigma^{11}_{ij} v_j + m^{11}_{ijk,k} v_j + [(m^{11}_{ijk} s_j v_k) s_p]_{,p})\delta r_i\} ds -$$
$$-\sum (m^{11}_{ijk} s_j v_k)\delta r_i = 0$$

Здесь использованы криволинейные ортогональные координаты с ортами s_i и v_i, связанные с контуром листа графена. P^F_i - касательные к плоскости листа внешние нагрузки в 2D. P^s_i - контурные внешние нагрузки, лежащие в плоскости листа.

Вариационное уравнение в перемещениях:

$$\delta L = \delta A + \iint \{\mu^F \nabla^2 r_i + (\mu^F + \lambda^F) r_{k,ki} - 12 A^{11}_1 \nabla^2 r_{k,ki} - 3 A^{11}_2 \nabla^2 \nabla^2 r_i\}\delta r_i dF -$$
$$-\oint \{[4A^{11}_1 (r_{k,ki} + r_{k,km} v_i v_m + r_{j,im} v_j v_m) + A^{11}_2 r_{i,km}(s_m s_k + 3 v_m v_k)]\delta(r_{i,p} v_p)\} ds -$$
$$-\oint \{[\lambda^F r_{m,m} v_i + \mu^F r_{i,j} v_j + \mu^F r_{j,i} v_j] -$$
$$-[4A^{11}_1 (r_{k,kij} v_j + \nabla^2 r_{k,k} v_i + \nabla^2 r_{j,i} v_j) + 3A^{11}_2 \nabla^2 r_{i,j} v_j] -$$
$$-[4A^{11}_1 (r_{k,kmp} s_i v_m s_p + r_{j,imp} s_j v_m s_p) + 2A^{11}_2 r_{i,kmp} s_k v_m s_p]\}\delta r_i ds -$$
$$-\sum [4A^{11}_1 (r_{k,km} s_i v_m + r_{j,im} s_j v_m) + 2A^{11}_2 r_{i,km} s_k v_m]\delta r_i = 0$$

Введем следующие обозначения: производная вдоль контура - $r_{i,k} s_k = r'_i$; нормальная к контуру производная - $r_{i,k} v_k = \dot{r}_i$. Тогда вариационное уравнение в перемещениях для прямоугольного контура листа принимает вид:

$$\delta L = \iint \{\mu^F \nabla^2 r_i + (\mu^F + \lambda^F) r_{k,ki} - 12 A^{11}_1 \nabla^2 r_{k,ki} - 3 A^{11}_2 \nabla^2 \nabla^2 r_i + P^F_i\}\delta r_i dF -$$
$$-\oint [4A^{11}_1 (r_{k,ki} + \dot{r}_{k,k} v_i + \dot{r}_{j,i} v_j) + A^{11}_2 (r''_i + 3\ddot{r}_i)]\delta \dot{r}_i ds -$$
$$-\oint \{[\lambda^F r_{m,m} v_i + \mu^F \dot{r}_i + \mu^F r_{j,i} v_j] -$$
$$-[4A^{11}_1 (\dot{r}_{k,ki} + \nabla^2 r_{k,k} v_i + \nabla^2 r_{j,i} v_j) + 3A^{11}_2 \nabla^2 \dot{r}_i] -$$
$$-[4A^{11}_1 (\dot{r}'_{k,k} s_i + \dot{r}'_{j,i} s_j) + 2A^{11}_2 \dot{r}''_i] - P^S_i\}\delta r_i ds -$$
$$-\sum [4A^{11}_1 (r_{k,km} s_i v_m + r_{j,im} s_j v_m) + 2A^{11}_2 r_{i,km} s_k v_m]\delta r_i = 0$$

Здесь $\nabla^2(...) = (...)_{,ij}\delta^*_{ij}$ - плоский оператор Лапласа.

Таким образом, модель деформирования листа графена эквивалентна плоской постановке градиентной модели Тупина, но с иными физическими свойствами, которые определяются иными (адгезионными) тензорами модулей. Тензоры адгезионных модулей имеют физическую размерность, совпадающую с размерностью соответствующих жесткостей классической и градиентной теории пластин.

3. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАФЕНА ПРИ ИЗГИБЕ.

В соответствии с формулировкой выражения потенциальной энергии листа графена (6), при деформировании листа из своей плоскости, лагранжиан приобретает вид:

$$L = A - \frac{1}{2}\iint \{\delta^F \delta^*_{pq} R_{,p} R_{,q} + A_3^{11}(\delta^*_{jk}\delta^*_{nl} + \delta^*_{jn}\delta^*_{kl} + \delta^*_{jl}\delta^*_{kn}) R_{,jk} R_{,nl}\} dF$$

Силовые факторы можно определить, используя формулы Грина:

$$Q_p = \frac{\partial U_F}{\partial R_{,p}} = \delta^F \delta^*_{pq} R_{,q} = \begin{cases} Q_x = \delta^F R_{,x} \\ Q_y = \delta^F R_{,y} \end{cases}$$

$$M_{jk} = \frac{\partial U_F}{\partial R_{,jk}} = A_3^{11}(\delta^*_{jk}\nabla^2 R + \delta^*_{lj}\delta^*_{nk} R_{,nl} + \delta^*_{nj}\delta^*_{kl} R_{,nl}) = \begin{cases} M_{xx} = A_3^{11}(3R_{,xx} + R_{,yy}) \\ M_{xy} = A_3^{11} 2R_{,xy} \\ M_{yx} = A_3^{11} 2R_{,xy} \\ M_{yy} = A_3^{11}(R_{,xx} + 3R_{,yy}) \end{cases}$$

Вариационное уравнение в силовых факторах:

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta A - \iint \{Q_j \delta R_{,j} + M_{jk} \delta R_{,jk}\} dF = \\ &= \iint (Q_{j,j} - M_{jk,jk} + P^F)\delta R dF + \\ &+ \oint \{-(M_{jk} \nu_j \nu_k)\delta(R_{,i}\nu_i) + (P^F - Q_j \nu_j - [(M_{jk} s_j \nu_k) s_i]_{,i} + M_{jk,k}\nu_j)\delta R\} ds - \\ &- \sum (M_{jk} s_j \nu_k)\delta R = 0 \end{aligned}$$

Естественные граничные условия можно сопоставить с формулировкой краевых задач в классической теории пластин. Так же, как и в классической теории пластин, появляется требование непрерывности крутящего момента $(M_{jk} s_j \nu_k)$ при переходе через угловую точку контура (внеинтегральное слагаемое вариационного уравнения). Возможная работа изгибающего момента на угле поворота $(M_{jk} \nu_j \nu_k)\delta(R_{,i}\nu_i)$ так же дает классическую пару граничных условий: или должен быть задан угол поворота, или изгибающий момент должен быть равным нулю. Здесь следует отметить то обстоятельство, что в рамках теории изгиба листа графена нет возможности задать ненулевым изгибающий момент на контуре. Вторая пара естественных граничных условий, связана с возможной работой перерезывающей силы на вариации прогибов $(P^F - Q_j \nu_j - [(M_{jk} s_j \nu_k) s_i]_{,i} + M_{jk,k}\nu_j)\delta R$. Здесь так же, как и в классической теории пластин, не удается сформулировать граничное условие на Сен-Венанову перерезывающую силу $Q_j \nu_j$ и приходится вводить определение Кирхгоффовской перерезывающей силы. При этом в отличие от классической теории пластин, она модифицируется не только контурной производной от крутящего момента $[(M_{jk} s_j \nu_k) s_i]_{,i}$, но и двумя дополнительными слагаемыми. Первое слагаемое - контурная производная от крутящего момента $M_{jm,n}\nu_j s_m s_n$, второе слагаемое - нормальная к контуру производная от изгибающего момента $M_{jm,n}\nu_j \nu_m \nu_n$. В сумме они дают «плоскую» дивергенцию $M_{jk,k}\nu_j$.

Вариационное уравнение в прогибах:

$$\delta L = \iint [\delta^F \nabla^2 R - 3A_3^{11}\nabla^2\nabla^2 R + P^F]\delta R dF +$$

$$+\oint \{-A_3^{11}(R'' + 3\ddot{R})\delta\dot{R} + [P^s - \delta^F \dot{R} + 3A_3^{11}\dddot{R} + 5A_3^{11}\dot{R}'']\delta R\}ds - \sum 2A_3^{11}\dot{R}'\delta R = 0$$

Так же, как и в теории тонких пленок с идеальной адгезией лицевых поверхностей, изложенной в работе [5], разрешающее уравнение теории изгиба листа графена содержит не только бигармонический оператор, но и гармонический, т.е. дифференциальный оператор этого уравнения имеет ту же структуру, что и в теории Тимошенко. Множители при этих операторах δ^F, A_3^{11} являются адгезионными модулями, по физической размерности совпадающие с жесткостями теории пластин Тимошенко Gh и $Eh^3/12(1-\nu^2)$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Сформулированные в этой работе прикладные теории изгиба и деформирования в своей плоскости листа графена дают возможность изучать механические свойства 2D-сред, ставить и решать тестовые задачи, решения которых допускают экспериментальную проверку. В частности, задача изгиба позволяет свести механические свойства графена к двум неклассическим модулям δ^F и A_3^{11}. Соответственно, задача деформирования в плоскости – к четырем λ^F, μ^F, A_1^{11} и A_2^{11}. Следует обратить внимание на то, что, как и любые другие теории, сформулированная в данной работе модель может быть обобщена.

Во-первых, теория графена в данной работе построена на гипотезе об отсутствии адгезионных взаимодействий между дисторсиями $R_{i,j}$ и кривизнами $R_{m,nl}$, что эквивалентно тому, что модули тензоров пятого ранга A_{ijmnl}^{11} равны нулю. С уверенностью можно утверждать, что учет такого взаимодействия ($A_{ijmnl}^{11}R_{i,j}R_{m,nl}/2$) в потенциальной энергии адгезии в общем случае для задач изгиба и деформирования в плоскости приведет к восстановлению связанности системы уравнений равновесия.

Во-вторых, обобщение должно коснуться и формулировки потенциальной энергии ребер поверхности. В прикладной теории графена это приведет к переформулировке и связанности уже и граничных условий.

В-третьих, качественное отличие механических свойств 3D-сред и 2D-сред, обоснованное в этой работе, делает актуальным ответ на вопрос: «Являются ли такие наноструктуры, как графен, нанотрубки и фуллерены истинно двухмерными структурами, или же их следует моделировать как «реберные» системы?». Ведь механические свойства ребер так же отличаются от свойств поверхностей, как свойства поверхностей от свойств 3D-сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Белов П.А. «Теория сред с сохраняющимися дислокациями: обобщение модели Миндлина», «Композиты и наноструктуры», 2011, Т.3, №1, стр.24-38.
2. Mindlin R.D. «Micro-structure in linear elasticity», «Archive of Rational Mechanics and Analysis», 1964, №1, p. 51-78.
3. Toupin R.A. «Elastic materials with couple-stresses», «Archive of Rational Mechanics and Analysis», 1964, №2, p. 85-112.
4. Geim A.K., Novoselov K.S., Jiang D., Schedin F., Booth T.J., Khotkevich V.V., Morozov S.V. «Two-dimensional atomic crystals», PNAS 102, 10451 (2005) DOI:10.1073/pnas.0502848102
5. Белов П.А., Лурье С.А. «Теория идеальных адгезионных взаимодействий», "Механика композиционных материалов и конструкций", 2007, т.14, №3, стр. 519-536.

Сведения об авторе:
Белов Петр Анатольевич,
к.ф.-м.н., докторант, нач. отд. прочности, *ГК «Ростехнологии», НПК «РТ – Химические технологии и композиционные материалы», ОАО «Московский Машиностроительный Экспериментальный Завод – Композиционные Технологии»,* г. Москва, Россия, e-mail: *BelovPA@yandex.ru, 8-(915)-335-8835.*