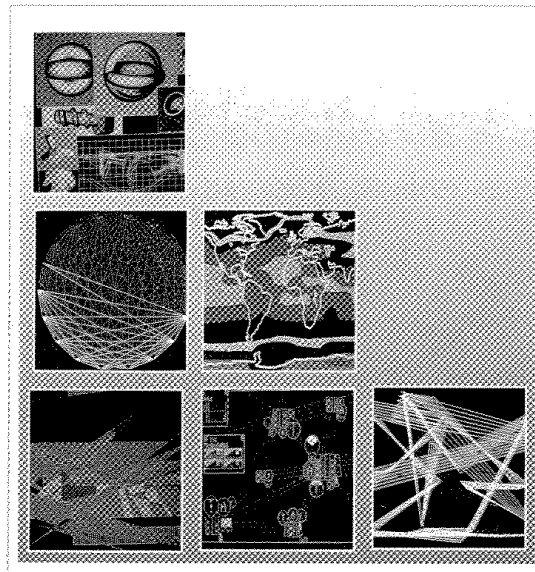


ISBN 5-201-09768-5
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

С.А. ЛУРЬЕ, П.А. БЕЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ



Вычислительный центр РАН
МОСКВА

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

С.А. ЛУРЬЕ, П.А. БЕЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ И ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ



ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2000

УДК 539.3, 539.12

Ответственный редактор

доктор техн. наук С.Н. Борисов

Развивается алгоритм построения моделей механики сплошных сред, заключающийся в описании кинематических моделей, определении соответствующих кинематических связей, формулировке на их основе Лагранжиана и, наконец, в построении определяющих соотношений и соответствующих краевых задач. При построении моделей используется вариационный формализм и тензорный аппарат, гарантирующий ковариантность построенных моделей. Приводятся корректные формулировки краевых задач для частных видов моделей сред. Делается попытка перенести методы исследования, хорошо известные в механике сплошной среды, на четырехмерные среды (среды пространства Минковского: электромагнитные, сильные, слабые и гравитационные поля).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 00-0100393)

Рецензенты: В.В. Васильев,
А.Г. Горшков

Научное издание

© Вычислительный центр РАН, 2000. Св. план 2000, поз.37

*Больше всего люди интересуются тем,
что их совершенно не касается*
(Джордж Бернард Шоу)

ВВЕДЕНИЕ

В книге приводятся корректные формулировки математических краевых задач для различных моделей сред. Используются новый вариант вариационного формализма и тензорный аппарат, гарантирующий ковариантность построенных моделей. Авторы выбирают естественную для механиков последовательность изложения, заключающуюся в описании кинематических моделей исследуемых сред, в определении соответствующих кинематических связей, формулировке на их основе физических моделей и, наконец, в построении соответствующих краевых задач. Одновременно с истинно непрерывными средами, рассматриваются кратко модели сред с непрерывным полем дефектов, имеющих разную природу (дефекты перемещений, поворотов, изменения объема, градиентов изменения объема). Делается попытка установить аналогии между соответствующими трехмерными и четырехмерными моделями сред.

Одна из основных целей, преследуемая авторами, связана с попыткой распространить методы исследования, хорошо известные в механике сплошной среды, на четырехмерные среды пространства Минковского: электромагнитные, сильные, слабые и гравитационные поля. Богатство и разнообразие моделей сплошной среды дают основание надеяться на существование соответствующих аналогов в четырехмерных средах. С другой стороны, известные и считающиеся классическими модели четырехмерных сред могут являться аналогами некоторых моделей сплошной среды. Например, модель электродинамики Максвелла является прямым аналогом модели не очень популярной среди механиков несимметричной теории упругости.

В книге предложен механистический подход к формулировке модели пространства Минковского. Установлено, что система уравнений модели представлена уравнениями Максвелла для электромагнитных полей, уравнениями Юкавы для сильных взаимодействий и уравнениями для слабых взаимодействий, которые ранее не были построены в рамках одной теории. Будучи уверенными, в формальной строгости моделей авторы признают, что физическая трактовка полученных моделей остается за физиками. Авторы не считают себя специалистами в области теории физических полей, и не претендуют на полноту их описания и строгость интерпретаций.

ГЛАВА I
КИНЕМАТИКА 4- МЕРНОГО ПСЕВДОЕВКЛИДОВА
КОНТИНУУМА

Будет получено обобщение формулы Чезаро и определена группа обобщенных перемещений, соответствующая внеинтегральным слагаемым, в которую помимо трансляций и поворотов как твердого тела входят дополнительные кинематические состояния. Будут определены неинтегрируемые далее в квадратурах соотношения совместности третьего порядка, записанные относительно компонент тензора девиатора деформаций. В этой главе дан также кинематический анализ моделей и варианты их классификации

1.1. Соотношения Коши

Рассмотрим точечное преобразование пространства событий в следующем виде:

$$y_j = x_j + R_j, \quad (1.1)$$

где y_j - координаты деформированного пространства событий, x_j - координаты недеформированного пространства событий, R_j - вектор перемещений.

Соответствующий этому преобразованию метрический тензор будет иметь вид:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} + \frac{\partial R_k}{\partial x_i} \frac{\partial R_k}{\partial x_j} \quad (1.2)$$

Отсюда видно, что десять компонент метрического тензора g_{ij} выражаются через шестнадцать компонент тензора дисторсии, который можно разложить на симметричную и антисимметричную части, а симметричную - на девиатор и шаровой. Тогда выражение для тензора дисторсии приобретет вид расширенных соотношений Коши:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \gamma_{ij} + \frac{1}{4} \theta \delta_{ij} - \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \mathcal{E}_{\alpha\beta ij}, \quad (1.3)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial R_j}{\partial x_i} - \frac{1}{4} \frac{\partial R_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (1.4)$$

$$\theta = \frac{\partial R_k}{\partial x_k}, \quad (1.5)$$

$$\omega_{nm} = -\frac{1}{2} \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \mathcal{E}_{nmij}, \quad (1.6)$$

где γ_{ij} - тензор-девиатор деформации, θ - амплитуда шарового тензора, ω_{ij} - антисимметричный тензор поворотов, $\mathcal{E}_{\alpha\beta\gamma}$ - тензор Леви - Чивиты, антисимметричный по всем индексам, δ_{ij} - тензор Кронекера.

Проинтегрировав соотношения Коши (1.3), получим квадратуры этих соотношений:

$$R_i = R_i' + \int_{M_0}^{M_1} [\gamma_{ij} + \frac{1}{4} \theta \delta_{ij} - \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \mathcal{E}_{\alpha\beta ij}] dy_j, \quad (1.7)$$

здесь y_j - радиус-вектор текущей точки траектории интегрирования.

1.2. Соотношения Папковича

Запишем необходимые и достаточные условия существования квадратур (1.7), называемые уравнениями Папковича [1,2,4]:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} [\gamma_{ij} + \frac{1}{4} \theta \delta_{ij} - \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \mathcal{E}_{\alpha\beta ij}] \mathcal{E}_{nmik} = 0.$$

Раскрывая свертку тензоров Леви-Чивиты, приведем эти уравнения к виду:

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_k} \mathcal{E}_{nmik} + \frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \mathcal{E}_{nmik} = -\frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_{mk}}{\partial x_j} \delta_{in} + \frac{\partial \omega_{nk}}{\partial x_i} \delta_{jm}.$$

Свертывая эти уравнения с δ_{in} или δ_{jm} , и учитывая антисимметричность ω_{ij} (1.6), запишем уравнения совместности Папковича в форме соотношений, разрешенных относительно первых производных от компонент тензора ω_{ij} :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \gamma_{km}}{\partial x_n} \mathcal{E}_{ijmn} - \frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial x_n} \mathcal{E}_{ijkn}, \quad (1.8)$$

Такая форма соотношений Папковича будет использована далее для вывода уравнений Фарадея:

$$\frac{\partial w_{nk}}{\partial x_k} = 0, \quad (1.9)$$

Соотношения (1.9) используются при выводе основных соотношений электродинамики в соответствующем разделе. Рассмотрим уравнения (1.8) и запишем квадратуры этих выражений:

$$\omega_{ij} = \omega^{\circ}_{ij} + \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{\partial \gamma_{km}}{\partial y_n} \mathcal{E}_{ijnm} - \frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial y_n} \mathcal{E}_{ijkn} \right] dy_k. \quad (1.10)$$

1.3. Соотношения Сен-Венана

Следуя общей последовательной процедуре, найдем необходимые и достаточные условия существования квадратур (1.10). В результате получим следующую систему уравнений

$$R_{ij\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \gamma_{km}}{\partial x_n} \mathcal{E}_{ijnm} - \frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial x_n} \mathcal{E}_{ijkn} \right] \mathcal{E}_{kl\alpha\beta} = 0,$$

где $R_{ij\alpha\beta}$ - тензор Римана-Кристоффеля.

Свертывая эти уравнения с $\delta_{i\beta}$ или $\delta_{j\alpha}$, получим соотношения

$$\begin{aligned} R_{j\alpha} &= R_{ij\alpha\beta} \delta_{i\beta} = \\ &= \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_n \partial x_n} \delta_{j\alpha} \right] + \\ &+ \frac{\partial^2 \gamma_{km}}{\partial x_i \partial x_n} \mathcal{E}_{ijnm} \mathcal{E}_{kl\alpha\beta} \delta_{i\beta} = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

называемые в механике сплошной среды соотношениями совместности Сен-Венана [1,2,4].

Соотношения (1.11) удобны в том смысле, что легко могут быть разрешимы относительно $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j}$. Получим:

$$\begin{aligned} R_{ij} - \frac{1}{3} R_{kk} \delta_{ij} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x_n \partial x_n} + \\ &+ \frac{\partial^2 \gamma_{jn}}{\partial x_i \partial x_n} + \frac{\partial^2 \gamma_{in}}{\partial x_j \partial x_n} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \gamma_{mm}}{\partial x_n \partial x_n} \delta_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Принтегрировав уравнения (1.12), получим соответствующие квадратуры:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta^{\circ} + \theta'_i (x_i - x_i^{\circ}) - \\ &- 2 \int_{M_0}^{M_1} (x_i - y_i) \left[\frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial y_n \partial y_n} - \frac{\partial^2 \gamma_{jn}}{\partial y_i \partial y_n} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial^2 \gamma_{in}}{\partial y_j \partial y_n} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \gamma_{mm}}{\partial y_n \partial y_n} \delta_{ij} \right] dy_j. \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.4. Соотношения совместности третьего порядка

Продолжая процедуру последовательного анализа условий существования полученных квадратур, найдем критерии существования квадратур (1.13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (R_{ij} - \frac{1}{3} R_{kk} \delta_{ij})}{\partial x_k} \mathcal{E}_{jk\alpha\beta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial^2 \gamma_{ij}}{\partial x_n \partial x_n} - \frac{\partial^2 \gamma_{jn}}{\partial x_i \partial x_n} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial^2 \gamma_{in}}{\partial x_j \partial x_n} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \gamma_{mm}}{\partial x_n \partial x_n} \delta_{ij} \right] \mathcal{E}_{jk\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Заметим, что соотношения (1.14) в некотором смысле являются предельными, ибо из них не могут быть получены дальнейшие квадратуры. Интересно оно и тем, что имеет третий порядок, в то время как известные в механике сплошной среды условия интегрируемости (уравнения совместности деформаций Сен-Венана) имеют второй порядок

1.5. Обобщенные формулы Чезаро

Покажем далее, что θ и ω_{ij} (1.5), (1.6) выражаются через γ_{ij} (1.4) с точностью до линейных полиномов. Действительно из (1.10) имеем:

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \omega^{\circ}_{ij} + \int_{M_n}^{M_i} \left[\frac{\partial \gamma_{km}}{\partial y_n} \mathcal{E}_{ijkm} - \frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial y_n} \mathcal{E}_{ijkn} \right] dy_k = \\ &= \omega^{\circ}_{ij} + \int_{M_n}^{M_i} \left[\frac{\partial \gamma_{km}}{\partial y_n} \mathcal{E}_{ijkm} \right] dy_k + \int_{M_n}^{M_i} \left[\frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial y_n} \mathcal{E}_{ijkn} \right] d(x_k - y_k) = \\ &= \omega^{\circ}_{ij} - \frac{1}{4} \theta_n^{\circ}(x_k - y_k) \mathcal{E}_{ijkn} \Big|_{M_n}^{M_i} + \\ &+ \int_{M_n}^{M_i} \left[\frac{\partial \gamma_{km}}{\partial y_n} \mathcal{E}_{ijkm} - (x_m - y_m) \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y_n \partial y_k} \mathcal{E}_{ijkm} \right] dy_k = \\ &= \omega^{\circ}_{ij} + \frac{1}{4} \theta_n^{\circ}(x_m - x_n^{\circ}) \mathcal{E}_{ijmn} + \\ &+ \int_{M_n}^{M_i} \left[\frac{\partial \gamma_{km}}{\partial y_n} + (x_m - y_m) \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y_n \partial y_k} \right] \mathcal{E}_{ijkm} dy_k \end{aligned}$$

С учетом соотношения (1.13) окончательно получим:

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \omega^{\circ}_{ij} + \frac{1}{4} \theta_n^{\circ}(x_m - x_n^{\circ}) \mathcal{E}_{ijmn} + \\ &+ \int_{M_n}^{M_i} \left[\frac{\partial \gamma_{km}}{\partial y_n} + (x_m - y_m) \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 \gamma_{nk}}{\partial y_n \partial y_p} + \frac{\partial^2 \gamma_{kp}}{\partial y_n \partial y_p} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 \gamma_{np}}{\partial y_k \partial y_p} \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \gamma_{\alpha\beta}}{\partial y_n \partial y_p} \delta_{nk} \right] \mathcal{E}_{ijkm} dy_k \end{aligned} \quad (1.15)$$

Аналогичным образом преобразуем квадратуры для перемещений:

$$\begin{aligned} R_i &= R_i^{\circ} + \int_{M_n}^{M_i} \left[\gamma_{ij} + \frac{1}{4} \theta \delta_{ij} - \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} \right] dy_j = R_i^{\circ} + \\ &+ \int_{M_n}^{M_i} \left[\gamma_{ij} dy_j + \frac{1}{4} \theta d(y_i - x_i) - \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} d(y_i - x_i) \right] = \\ &= R_i^{\circ} - \frac{1}{4} \theta(x_i^{\circ} - x_i) + \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} (x_i^{\circ} - x_i) + \\ &+ \int_{M_n}^{M_i} \left[\gamma_{ij} dy_j - (y_i - x_i) \frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial y_j} dy_j + \right. \\ &\left. + (y_i - x_i) \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial y_j} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} dy_j \right] \end{aligned}$$

Заменяем в криволинейных интегралах производные от ω_{ij} с помощью уравнений (1.8):

$$\begin{aligned} R_i &= R_i^{\circ} + \frac{1}{2} \omega^{\circ}_{\alpha\beta} (x_j - x_j^{\circ}) \mathcal{E}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{4} \theta^{\circ}(x_i - x_i^{\circ}) + \\ &+ \int_{M_n}^{M_i} \left[\gamma_{ij} + (y_i - x_i) \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{im}}{\partial y_n} \mathcal{E}_{\alpha\beta im} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} \right] dy_j + \\ &+ \int_{M_n}^{M_i} \left[-(y_i - x_i) \frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial y_j} dy_j - \right. \\ &\left. - (y_j - x_j) \frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial y_j} dy_j + (y_i - x_i) \frac{1}{4} \frac{\partial \theta}{\partial y_i} dy_i \right] \end{aligned}$$

Преобразуем интегрированием по частям слагаемые, содержащие производные от θ в криволинейном интеграле:

$$\begin{aligned}
R_i &= R_i^* + \frac{1}{2} \omega^*_{\alpha\beta} (x_j - x_j^*) \Theta_{\alpha\beta i} + \frac{1}{4} \theta^* (x_i - x_i^*) + \\
&+ \frac{1}{4} \theta_j^* [(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) - \frac{1}{2} \delta_{ij} (x_k - x_k^*)(x_k - x_k^*)] + \\
&+ \int_{M_n}^{M_s} [y_{ij} + (y_i - x_i) \frac{1}{2} \frac{\partial y_{jm}}{\partial y_n} \Theta_{\alpha\beta mn} \Theta_{\alpha\beta i}] dy_j + \\
&+ \frac{1}{4} \int_{M_n}^{M_s} [(y_i - x_i)(y_j - x_j) - \\
&- \frac{1}{2} \delta_{ij} (y_n - x_n)(y_n - x_n)] \frac{\partial^2 \theta}{\partial y_i \partial y_k} dy_k.
\end{aligned}$$

С учетом соотношений (1.12) окончательно получим:

$$\begin{aligned}
R_i &= R_i^* + \frac{1}{2} \omega^*_{\alpha\beta} (x_j - x_j^*) \Theta_{\alpha\beta i} + \\
&+ \frac{1}{4} \theta^* (x_i - x_i^*) + \frac{1}{4} \theta_j^* P_{ij} (x^*) + r_i,
\end{aligned} \quad (1.16)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
P_{ij} (a) &= (x_i - a_i)(x_j - a_j) - \frac{1}{2} \delta_{ij} (x_k - a_k)(x_k - a_k), \\
r_i &= \int_{M_n}^{M_s} [y_{ij} + (y_i - x_i) \frac{1}{2} \frac{\partial y_{jm}}{\partial y_n} \Theta_{\alpha\beta mn} \Theta_{\alpha\beta i}] dy_j + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{M_n}^{M_s} P_{ij} (y) \left[- \frac{\partial^2 \gamma_{jk}}{\partial y_m \partial y_n} + \frac{\partial^2 \gamma_{jm}}{\partial y_k \partial y_m} + \right. \\
&\left. + \frac{\partial^2 \gamma_{km}}{\partial y_j \partial y_m} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \gamma_{jm}}{\partial y_n \partial y_m} \delta_{jk} \right] dy_k.
\end{aligned}$$

Таким образом, получены обобщенные формулы Чезаро для пространства событий, позволяющие определить R_i из (1.16), ω_{ij} из

(1.15) и θ из (1.13) через γ_{ij} , причем γ_{ij} должны удовлетворять уравнениям совместности (1.14).

1.6. Анализ возможных кинематических состояний на основе обобщенных формул Чезаро

Дальнейший анализ полученных формул Чезаро (1.16) дает возможность глубже осознать кинематическую структуру пространства событий с точки зрения классификации физических процессов по порожденным ими гравитационным полям, определяемым по метрическому тензору g_{ij} (1.2).

Кинематическое состояние 1.

При $\gamma_{ij} = 0$, $\theta = 0$ и $\omega_{ij} = 0$ перемещения являются постоянным 4-вектором.

$$R_i = R_i^* \quad (1.17)$$

Этому состоянию соответствует постоянный метрический тензор, а раз так - не соответствует никакого физического процесса. Значит, уравнения физического процесса не должны давать такого решения и должны быть инвариантны относительно такого преобразования. Оно определяется субъективизмом исследователя при выборе системы координат.

Кинематическое состояние 2.

При $\gamma_{ij} = 0$ и $\theta = 0$ перемещения являются линейным по координатам 4-вектором.

$$R_i = \frac{1}{2} \omega^*_{\alpha\beta} (x_j - x_j^*) \Theta_{\alpha\beta i} \quad (1.18)$$

Этому состоянию соответствует постоянный метрический тензор и, следовательно, не соответствует никакого физического процесса. Значит, уравнения физического процесса не могут давать такого решения и должны быть инвариантны относительно такого преобразования. Оно определяется субъективизмом исследователя при выборе системы координат.

Кинематическое состояние 3.

При $\gamma_{ij} = 0$ и $\omega_{ij} = 0$ перемещения являются линейным по координатам 4-вектором.

$$R_i = \frac{1}{4} \theta^2 (x_i - x_i^*) \quad (1.19)$$

Этому состоянию соответствует постоянный метрический тензор и потому не соответствует никакого физического процесса. Т.е. уравнения физического процесса не могут давать такого решения и должны быть инвариантны относительно такого преобразования. Оно также как и предыдущие состояния определяется субъективизмом исследователя при выборе системы координат.

Кинематическое состояние 4.

При $\theta = 0$ и $\omega_{ij} = 0$ перемещения являются гармоническим 4-вектором: $R_i = G_i$.

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial G_i}{\partial x_j} - \frac{\partial G_j}{\partial x_i} = 0 \quad (1.20)$$

Этому состоянию соответствует некоторый переменный метрический тензор. Ему соответствуют физические процессы, не связанные с $\theta \neq 0$ и $\omega_{ij} \neq 0$. Назовем (пока условно) такие кинематические состояния «чисто слабыми взаимодействиями».

Кинематическое состояние 5.

При $\omega_{ij} = 0$ перемещения являются потенциальным 4-вектором:

$$R_i = Y_i, \quad \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} = 0. \quad (1.21)$$

Назовем (пока условно) такие кинематические состояния «сильно-слабым взаимодействиями», т.к. $\theta \neq 0$ и $\gamma_{ij} \neq 0$ или «неэлектромагнитными взаимодействиями», т.к. $\omega_{ij} = 0$.

Кинематическое состояние 6.

При $\theta = 0$ перемещения являются соленоидальным 4-вектором:

$$R_i = J_i, \quad \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.21)$$

Назовем (пока условно) такие кинематические состояния «электро-слабыми взаимодействиями», т.к. $\omega_{ij} \neq 0$ и $\gamma_{ij} \neq 0$.

или «несильными взаимодействиями», т.к. $\theta = 0$.

Кинематическое состояние 7.

При $\gamma_{ij} = 0$ перемещения являются квадратичным по координатам 4-вектором.

$$R_i = \frac{1}{4} \theta^2 P_{ij} (x^j). \quad (1.22)$$

Этому состоянию соответствует переменный метрический тензор, компоненты которого являются квадратичными по координатам функциями. Это единственный физический процесс, не связанный со «слабыми взаимодействиями», если под «слабыми взаимодействиями» понимать кинематические состояния с $\gamma_{ij} \neq 0$. Ему соответствуют физические процессы хаббловского расширения Вселенной при $\theta_j^* = DN_j$ и аналогичный, но не исследованный процесс «закручивания» Вселенной при $\theta_j^* = D_k (\delta_{jk} - N_j N_k)$. Эти процессы будут исследованы в соответствующем разделе «Космология». Изложенные результаты исследований и классификацию кинематических состояний можно свести в таблицу:

	R_i^*	ω_i^*	θ^*	G_i	Y_i	J_i	θ_i^*	r_i
R_i	+	+	+	+	+	+	+	+
ω_i	-	+	-	-	-	+	+	+
θ	-	-	+	-	+	-	+	+
γ_{ij}	-	-	-	+	+	+	-	+

1.7. Кинематические соотношения трехмерных непрерывных сплошных сред

Построим кинематическую модель сплошной среды, которая подчиняется общим кинематическим связям в форме расширенных соотношений Коши для компонентов тензора дилатации. При этом

будет последовательно использоваться процедура интегрирования кинематических соотношений и определение соответствующих условий интегрируемости.

Запишем кинематические связи в форме расширенных соотношений Коши для компонентов тензора дисторсии:

$$R_{i,j} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} - \omega_k \mathcal{E}_{ijk} \quad (1.23)$$

Здесь, как обычно, по повторяющимся индексам осуществляется свертка, γ_{ij} — компоненты тензора девиатора деформаций, θ —

объемная деформация, ω_k — вектор поворотов или упругих вращений,

\mathcal{E}_{ijk} — компоненты тензора Леви-Чивиты.

Представление (1.23) соответствует разложению тензора второго ранга на составляющие: девиаторную часть, шаровой тензор и ротор. Интегрируя соотношение (1.23) по пространственной координате, получим

$$R_i = R_i^0 + \int_{M_0}^{M_1} [\gamma_{ij} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} - \omega_k \mathcal{E}_{ijk}] dy_j \quad (1.24)$$

Условия существования криволинейного интеграла в формуле (1.24) запишутся в виде

$$\omega_{i,j} = \gamma_{\beta\gamma\alpha} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3} \theta_{,\alpha} \mathcal{E}_{\alpha ij} \quad (1.25)$$

Интегрирование соотношения (1.25), по аналогии с выражением (1.8), дает следующее равенство:

$$\omega_i = \omega_i^0 + \int_{M_0}^{M_1} (\gamma_{\beta\gamma\alpha} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3} \theta_{,\alpha} \mathcal{E}_{\alpha ij}) dy_j \quad (1.26)$$

Соответственно условия существования криволинейных интегралов (1.26), приобретают вид

$$(\gamma_{\beta\alpha} + \frac{1}{3} \theta \delta_{\beta\alpha})_{,j\alpha} \mathcal{E}_{\alpha\beta i} \mathcal{E}_{ij\alpha} = 0 \quad (1.27)$$

Соотношения (1.27), обеспечивающие непрерывность упругих поворотов, являются уравнениями совместности Сен-Венана. Предложенная форма записи уравнений неразрывности позволяет разрешить последние относительно вторых производных от объемной

деформации в явной форме, выразив их через компоненты тензора-девиатора деформаций:

$$\frac{1}{3} \theta_{,ij} = (\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \delta_{ij} + \gamma_{m\alpha} \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta mj})_{,\alpha\beta} \quad (1.28)$$

Систему уравнений (1.28) можно проинтегрировать в квадратурах:

$$\theta = \theta^0 + \theta_i^0 (x_i - x_i^0) + 3 \int_{M_0}^{M_1} (x_i - y_i) (\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \delta_{ij} + \gamma_{m\alpha} \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta mj})_{,\alpha\beta} dy_j \quad (1.29)$$

Необходимыми и достаточными условиями (для односвязных сред) интегрируемости системы (1.28) являются, новые уравнения совместности третьего порядка, записанные относительно только компонент тензора-девиатора деформаций:

$$(\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \delta_{ij} + \gamma_{m\alpha} \mathcal{E}_{\alpha mi} \mathcal{E}_{\beta mj})_{,\alpha\beta i} \mathcal{E}_{\beta ij} = 0 \quad (1.30)$$

Полученная система уравнений совместности представляет собой тензорное уравнение второго ранга, ненулевые компоненты которого составляют тензор-девиатор. Так как тензор-девиатор имеет только пять линейно независимых компонент, дальнейший поиск квадратур не имеет смысла, потому что для построения следующей квадратуры потребовалось бы десять уравнений для определения третьих производных хотя бы одной функции. Преобразуем (1.24) таким образом, чтобы под знаком криволинейного интеграла осталось выражение, определяющее исключительно деформации изменения формы. С этой целью воспользуемся процедурой интегрирования по частям и учтем равенства (1.25), (1.28). В результате, придем к новому выражению для вектора перемещения, в котором криволинейный интеграл записывается только через компоненты тензора-девиатора деформации γ_{ij} и, следовательно, описывает перемещения, вызванные лишь деформациями изменения формы. Обозначая этот интеграл через r_i запишем:

$$R_i = R_i^0 + \omega_\alpha^0 (x_\beta - x_\beta^0) \mathcal{E}_{\alpha\beta i} + \frac{1}{3} \theta^0 (x_i - x_i^0) + \frac{1}{3} \theta_i^0 (x_j - x_j^0) (x_i - x_i^0) - \frac{1}{6} \theta_i^0 (x_j - x_j^0) (x_j - x_j^0) + r_i \quad (1.31)$$

Таким образом, с точностью до полинома второго порядка, вектор перемещений определяется деформациями изменения формы. Нетрудно убедиться, что компоненты тензора дисторсии с точностью до полиномов также определяются лишь деформациями изменения формы:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta^0 + \theta_i^0 (x_i - x_i^0) + r_{k,k}, \\ \omega_i &= \omega_i^0 + \frac{1}{3} \theta_\alpha^0 (x_\beta - x_\beta^0) \partial_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} r_{\alpha,\beta} \partial_{\alpha\beta} \quad (1.32) \\ \gamma_{ij} &= \frac{1}{2} (r_{i,j} + r_{j,i}) - \frac{1}{3} r_{k,k} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Представление для перемещений R_i , найденные в форме соотношений (1.31), представляются новыми и являются обобщением формулы Чезаро. Они представляют интерес с точки зрения описания поведения упругой среды с дефектами в рамках, например, полевой теории дефектов [8]. Новое представление для перемещений, его полиномиальная составляющая, наряду с традиционными дефектами, определяемыми трансляцией (дислокация) и вращением (дисклинация), позволяет ввести в рассмотрение расширенную группу дефектов (несовместностей) типа объемных дислокаций и объемно-вращательных дисклинаций. Такой вариант модели полевой теории дефектов может быть принципиально реализован, если функционал Лагранжа будет инвариантен относительно действия неоднородной группы, определяемой внеинтегральными слагаемыми в выражении (1.31). Вопрос инвариантности будет обсуждаться в дальнейшем.

Авторы придают при моделировании сред решающее значение наиболее полному и последовательному описанию кинематической стороны задачи, кинематическим связям, поэтому два следующих раздела книги будут посвящены вариантам классификации кинематики.

1.8. Классификация кинематических состояний по гладкости

Будем исходить из того, что в наиболее общем случае вектор перемещения (как всякое векторное поле) может быть представлен в форме разложения на потенциальную и соленоидальную составляющие

$$R_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\beta} \partial_{\alpha\beta}$$

здесь Φ - потенциальная функция, функция Ψ_α определяет соленоидальное поле перемещений.

Поле перемещений для исследуемой среды, вообще говоря, находится как решение начально-краевой задачи для уравнения движения среды. Поэтому решением уравнений движения и определяется конкретный вид функций Φ и Ψ_α . Однако, некоторые предварительные соображения о характере функций Φ и Ψ_α , об их изменчивости можно сделать на основании анализа кинематики.

Заметим, что кинематическое состояние G_i (гармоническое состояние) является одновременно и потенциальным ($\frac{\partial G_i}{\partial x_j} - \frac{\partial G_j}{\partial x_i} = 0$)

и соленоидальным $\frac{\partial G_k}{\partial x_k} = 0$. Можно предположить, что состояние G_i представляет собой «точку ветвления» кинематических состояний на Y_i (потенциальные кинематические состояния) и J_i (вихревые кинематические состояния) и является одновременно «нулевым», простейшим элементом в иерархии потенциальных и вихревых кинематических состояний. Обозначим это символически:

$$G_i = Y_i^0$$

$$G_i = J_i^0,$$

причем, по определению (1.20):

$$\Delta Y_i^0 = 0$$

$$\Delta J_i^0 = 0,$$

(1.33)

где $\Delta(\dots)$ - оператор Лапласа или Даламбера (при описании поля перемещений 4-х мерного пространства событий).

Обобщая, запишем (1.33) в виде:

$$\Delta Y_i^0 - C_Y^0 Y_i^0 = 0$$

$$\Delta J_i^0 - C_J^0 J_i^0 = 0$$

(в данном, конкретном случае $C_Y^0 = 0$ и $C_J^0 = 0$).

Естественно предположить, что первыми элементами на этих ветвях будут состояния:

$$\begin{aligned}\Delta Y_i^1 - C_V^1 Y_i^1 &= 0 \\ \Delta J_i^1 - C_J^1 J_i^1 &= 0,\end{aligned}\quad (1.34)$$

являющиеся простейшими обобщениями уравнений (1.33).

Ниже, в соответствующих главах, это будет показано формально для конкретных моделей.

Забегая вперед, отметим, что базовая модель среды, построенная в данной работе, в общем случае приводит для физически линейной модели к следующим уравнениям относительно Y_i и J_i :

$$\begin{aligned}[\Delta(\dots) - C_V^1(\dots)][\Delta(\dots) - C_V^0(\dots)]Y_i &= 0 \\ [\Delta(\dots) - C_J^1(\dots)][\Delta(\dots) - C_J^0(\dots)]J_i &= 0\end{aligned}$$

Общее решение этих соотношений может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}Y_i &= D_V^0 Y_i^0 + D_V^1 Y_i^1 \\ J_i &= D_J^0 J_i^0 + D_J^1 J_i^1,\end{aligned}$$

здесь D_V^k и D_J^k - коэффициенты линейных форм, которые можно интерпретировать как проекции общих решений Y_i и J_i в функциональных пространствах Y_i^k и J_i^k соответственно. Операторы приведенных уравнений (точнее вид соответствующих характеристических уравнений) определяет изменяемость соответствующих полей перемещений, характер краевых эффектов. Таким образом, предлагаемая классификация предполагает классификацию кинематики по краевым эффектам, а, следовательно, и разложение исходного состояния (краевого состояния) по базовой системе кинематических состояний - краевых эффектов.

Обобщая, можно предложить иерархию моделей по степени изменяемости в виде:

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{k=N} [\Delta(\dots) - C_V^k(\dots)]Y_i &= 0 \\ \prod_{k=0}^{k=N} [\Delta(\dots) - C_J^k(\dots)]J_i &= 0,\end{aligned}$$

где C_V^k и C_J^k - физические константы, среди которых могут быть кратные и равные нулю.

Общие решения Y_i и J_i могут быть представлены в форме

разложения по базисным кинематическим состояниям Y_i^k и J_i^k :

$$Y_i = \sum_{k=0}^{k=N} D_V^k Y_i^k, \quad J_i = \sum_{k=0}^{k=N} D_J^k J_i^k.$$

Естественно, что построенные предложенным методом системы базисных кинематических состояний будут не ортонормированными. Как будет показано в гл. 5, имеется единая процедура ортогонализации системы базисных кинематических состояний.

В следующем разделе предлагается еще один вариант классификации, в основе которой лежит возможность описания кинематики сред с различной степенью "несовместностей", т.е. нарушением условий интегрируемости.

1.9. Классификация кинематических состояний по «разрывам»

Предположим, что, к примеру, тензор поворотов разрывен. Это предположение эквивалентно нарушению уравнений (1.11).

Введем тензор невязок уравнений (1.11):

$$\begin{aligned}R_{j\alpha} &= R_{ij\alpha\beta} \delta_{i\beta} = \\ &= \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_j \partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_n \partial x_n} \delta_{j\alpha} \right] + \\ &+ \left[\frac{\partial^2 \gamma_{km}}{\partial x_j \partial x_n} \partial_{ijnm} \partial_{kl\alpha\beta} \right] \delta_{i\beta} = \Omega_{j\alpha}\end{aligned}\quad (1.35)$$

Отсюда путем линейных комбинаций можно получить:

$$R_{j\alpha} - \frac{1}{2} R \delta_{j\alpha} = \frac{1}{\chi} T_{j\alpha}, \quad (1.36)$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}R &= R_{j\alpha} \delta_{j\alpha} \\ T_{j\alpha} &= \chi \left[\Omega_{j\alpha} - \frac{1}{2} (\Omega_{nm} \delta_{nm}) \delta_{j\alpha} \right]\end{aligned}\quad (1.37)$$

В уравнениях (1.36) нетрудно узнать уравнения гравитации Эйнштейна. С точки зрения предлагаемой здесь классификации уравнения гравитации Эйнштейна - уравнения кинематических состояний с распределенными дисклинациями.

Рассмотрим вновь трехмерные соотношения для тензора дисторсии (1.23) и, следуя методике, предложенной в разд. 1.7, получим обобщенную формулу Чезаро, определяющую поле перемещений с учетом существования непрерывно распределенных полей "несовместностей" различного типа (полей различного типа непрерывно распределенных дефектов). Положим, что для рассматриваемого здесь случая не выполняются условия интегрируемости перемещений (соотношения Папковича являются неоднородными); получим следующие выражения для несимметричного тензора поворотов

$$\omega_i = \omega_i^* + \int_{M_0}^{M_i} \left[\frac{\partial \gamma_{jm}}{\partial y_n} \mathcal{E}_{nm} - \frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial y_n} \mathcal{E}_{nj} + \left(\Xi_{ji} - \frac{1}{2} \Xi_{pp} \delta_{ij} \right) \right] dy_j \quad (1.38)$$

Тензор Ξ_{ji} определяется неоднородность соотношений Папковича.

$$(\gamma_{ia} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ia} - \omega_k \mathcal{E}_{iak})_{,b} \mathcal{E}_{ab} = \Xi_{ij} \quad (1.39)$$

Условиями интегрируемости соотношений (1.39) являются следующие обобщенные соотношения Сен-Венана, разрешенные относительно производных от объемной деформации:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y_n \partial y_j} = & \left[- \frac{\partial^2 \gamma_{lm}}{\partial x_s \partial x_k} (\mathcal{E}_{smn} \mathcal{E}_{jlk} - \frac{1}{2} \delta_{nj} \mathcal{E}_{smr} \mathcal{E}_{rpk}) + \right. \\ & \left. + (\Omega_{nj} - \frac{1}{2} \Omega_{pp} \delta_{nj}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x_k} (\Xi_{jn} - \frac{1}{2} \Xi_{qq} \delta_{nj}) \mathcal{E}_{jlk} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Xi_{lp}}{\partial x_k} \mathcal{E}_{plk} \delta_{nj} \right] \end{aligned} \quad (1.40)$$

Здесь тензор Ω_{nj} является правой частью "условий неинтегрируемости" (1.38), т.е. определяет характер распределенной поврежденности, связанной с вектором поворотов - (дисклинацией).

Соотношения (1.40) допускают интегрирование в квадратурах. В результате найдем явное представление для объемной деформации и запишем соответствующее условие "неинтегрируемости"

$$\begin{aligned} \theta = & \theta^* + \theta^*(x_i - x_i^*) + \\ & + 3 \int_{M_0}^{M_i} (x_i - y_i) \left[\frac{\partial^2 \gamma_{jm}}{\partial y_k \partial y_n} (\mathcal{E}_{nm} \mathcal{E}_{ijk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \mathcal{E}_{pnm} \mathcal{E}_{plk}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial y_k} \mathcal{E}_{ijk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \frac{\partial \Xi_{pj}}{\partial y_k} \mathcal{E}_{plk} + \Omega_{il} \right] dy_l \\ \Theta_{is} = & \frac{\partial}{\partial x_q} \left[\frac{\partial^2 \gamma_{jm}}{\partial x_k \partial x_n} (\mathcal{E}_{nm} \mathcal{E}_{ijk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \mathcal{E}_{pnm} \mathcal{E}_{plk}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \frac{\partial \Xi_{pj}}{\partial x_k} \mathcal{E}_{plk} + \Omega_{il} \right] \mathcal{E}_{lqs} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Тензор Θ_{is} определяет несовместность в (1.42), порожденную "разрывами" в градиенте объемной деформации.

Имея в виду соотношения (1.39)-(1.40) можно записать обобщенные «формулы Чезаро» и соотношения, определяющие R_i и ω_i :

$$\begin{aligned} R_i = & R_i^* + \omega_n^* (x_m - x_m^*) \mathcal{E}_{nmi} + \\ & + \frac{1}{3} \theta^* (x_i - x_i^*) + \frac{1}{3} \theta_j^* P_{ij} (x, x^*) + \\ & + \int_{M_0}^{M_i} [y_{ik} + (x_n - y_n) \frac{\partial \gamma_{kp}}{\partial y_q} \mathcal{E}_{pqm} \mathcal{E}_{im} - \\ & - P_{ij} (x, y) \frac{\partial^2 \gamma_{qm}}{\partial y_n \partial y_l} (\mathcal{E}_{nmj} \mathcal{E}_{kpl} - \frac{1}{2} \delta_{jk} \mathcal{E}_{nmp} \mathcal{E}_{pql})] dy_k + \\ & + \int_{M_0}^{M_i} \{ (x_n - y_n) (\Xi_{km} - \frac{1}{2} \Xi_{pp} \delta_{km}) \mathcal{E}_{im} + \\ & + P_{ij} (x, y) \left[\frac{\partial}{\partial y_l} (\Xi_{jn} - \frac{1}{2} \Xi_{qq} \delta_{nj}) \mathcal{E}_{mp} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \frac{\partial \Xi_{pp}}{\partial y_k} \partial_{pm} \delta_{jk} \} dy_k + \\
& + \int_{M_0}^{M_1} P_{ij}(x, y) (\Omega_{jk} - \frac{1}{2} \Omega_{pp} \delta_{jk}) dy_k
\end{aligned} \quad (1.43)$$

И, соответственно,

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \omega_i^* + \frac{1}{3} \theta_n^* (x_m - x_m^*) \partial_{nmi} + \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{\partial \gamma_{jm}^*}{\partial y_n} \partial_{nmi} - \right. \\
& + (x_m - y_m) \frac{\partial^2 \gamma_{iq}^*}{\partial x_s \partial x_k} ((\delta_{sm} \delta_{qi} - \delta_{si} \delta_{qm}) \partial_{jlk} - \\
& - \frac{1}{2} (\delta_{st} \delta_{qk} - \delta_{sk} \delta_{qt}) \partial_{jmi} \} dy_j + \\
& + \int_{M_0}^{M_1} [(\Xi_{pp} - \frac{1}{2} \Xi_{pp} \delta_{pp}) + \\
& + (x_m - y_m) \{ \frac{\partial (\Xi_{pm} - \frac{1}{2} \Xi_{qq} \delta_{pm})}{\partial x_k} \partial_{jpk} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{\partial (\Xi_{lp} - \frac{1}{2} \Xi_{qq} \delta_{lp})}{\partial x_k} \partial_{plk} \delta_{nj} \} \partial_{nmi} dy_j \\
& + \int_{M_0}^{M_1} (x_m - y_m) [(\Omega_{nj} - \frac{1}{2} \Omega_{pp} \delta_{nj}) \partial_{nmi} dy_j
\end{aligned} \quad (1.44)$$

Здесь использованы равенства

$$\partial_{nmi} \partial_{nmi} = (\delta_{sm} \delta_{qi} - \delta_{si} \delta_{qm}),$$

$$\partial_{pmi} \partial_{plk} = (\delta_{st} \delta_{qk} - \delta_{sk} \delta_{qt}),$$

$$P_{ij}(x, y) = (x_i - y_i)(x_j - y_j) - \frac{1}{2} \delta_{ij} (x_p - y_p)(x_p - y_p)$$

Соотношениями (1.39), (1.40) и (1.42) дается описание кинематической

модели среды с полной, распределенной системой несовместностей: $\Xi_{ij}, \Omega_{ij}, \Theta_{ij}$.

Здесь хотелось бы акцентировать внимание на том, что в общем случае в соотношениях (1.43), (1.44) и (1.41) криволинейные интегралы зависят от траектории интегрирования и не могут называться квадратурами. Однако, при $\Xi_{ij} \neq 0$ соотношения (1.41) и (1.44) являются квадратурами для θ и ω_i . При $\Omega_{ij} \neq 0$ равенство (1.41) определяет квадратуру для θ , а при $\Theta_{ij} \neq 0$ R_i и ω_i, θ и $\partial \theta / \partial x_i$ не являются непрерывным.

Рассмотрим систему соотношений "несовместности" (1.42) как систему неоднородных дифференциальных уравнений относительно γ_{ij} и представим решение этой системы в виде суперпозиции общего решения однородной системы γ_{ij}^* и трех частных решений неоднородной системы $\gamma_{ij}^{\Xi}, \gamma_{ij}^{\Omega}$ и γ_{ij}^{Θ} :

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^* + \gamma_{ij}^{\Xi} + \gamma_{ij}^{\Omega} + \gamma_{ij}^{\Theta}, \quad (1.45)$$

где: 1) γ_{ij}^* - есть общее решение однородной системы:

$$\frac{\partial \omega_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \gamma_{jm}^* + \frac{1}{3} \theta^* \delta_{jm}}{\partial x_m} \partial_{nmi} = 0,$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x_i \partial x_i} = -\frac{\partial^2 \gamma_{jm}^*}{\partial x_n \partial x_k} (\partial_{nmi} \partial_{lyk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \partial_{nmp} \partial_{plk})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_q} \left[\frac{\partial^2 \gamma_{jm}^*}{\partial x_k \partial x_n} (\partial_{nmi} \partial_{lyk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \partial_{nmp} \partial_{plk}) \right] \partial_{iqs} = 0 \quad (1.46)$$

2) γ_{ij}^{Ξ} - частное решение неоднородной системы, зависящей от тензора несовместностей перемещений Ξ_{ij} :

$$(\gamma_{ia}^{\Xi} + \frac{1}{3} \theta^{\Xi} \delta_{ia} - \omega_k^{\Xi} \partial_{iak})_{,p} \partial_{apj} = \Xi_{ij}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \theta^{\Xi}}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 \gamma_{jm}^{\Xi}}{\partial x_n \partial x_k} (\partial_{nmi} \partial_{ljk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \partial_{nmj} \partial_{pjk}) = \\ & = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\Xi_{ji} - \frac{1}{2} \Xi_{qj} \delta_{ij}) \right] \partial_{ljk} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Xi_{jp}}{\partial x_k} \partial_{pjk} \delta_{il} \\ & \frac{\partial}{\partial x_q} \left[\frac{\partial^2 \gamma_{jm}^{\Xi}}{\partial x_k \partial x_n} (\partial_{nmi} \partial_{ljk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \partial_{pnm} \partial_{pjk}) \right] \partial_{lqs} = \\ & - \frac{\partial}{\partial x_q} \left[\frac{\partial \Xi_{ij}}{\partial x_k} \partial_{ljk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \frac{\partial \Xi_{jp}}{\partial x_k} \partial_{pjk} \right] \partial_{lqs} \end{aligned} \quad (1.47)$$

3) γ_{ij}^{Ω} - частное решение неоднородной системы, зависящей от тензора несовместностей поворотов Ω_{ij} :

$$\begin{aligned} & (\gamma^{\Omega}_{\beta\mu} + \frac{1}{3} \theta^{\Omega} \delta_{\beta\mu})_{,jm} \partial_{ajl} \partial_{mij} = \Omega_{ij} \\ & \frac{\partial}{\partial x_q} \left[\frac{\partial^2 \gamma_{jm}^{\Omega}}{\partial x_k \partial x_n} (\partial_{nmi} \partial_{ljk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \partial_{pnm} \partial_{pjk}) \right] \partial_{lqs} = - \frac{\partial \Omega_{il}}{\partial x_q} \partial_{lqs} \end{aligned} \quad (1.48)$$

4) γ_{ij}^{Θ} - частное решение неоднородной системы, зависящей от тензора несовместностей градиента изменения объема Θ_{ij} :

$$\frac{\partial}{\partial x_q} \left[\frac{\partial^2 \gamma_{jm}^{\Theta}}{\partial x_k \partial x_n} (\partial_{nmi} \partial_{ljk} - \frac{1}{2} \delta_{il} \partial_{pnm} \partial_{pjk}) \right] \partial_{lqs} = \Theta_{is} \quad (1.49)$$

Однородное решение уравнений (1.42) трактуется как кинематическое состояние с дифференцируемым полем перемещений. В качестве подпространства, пространство этих однородных решений содержат среды классической теории упругости.

Заметим, что из равенств (1.47)-(1.49) следует вывод о том что имеет место некоторая классификация по "несовместностям":

$$\Xi_{ji}, \Omega_{ij}, \Theta_{is}$$

Действительно в математической формулировке Ξ модели

(1.47) отсутствуют соотношения Коши. В Ω модели (1.48) отсутствуют соотношения Коши и Папковича и, наконец, в Θ модели (1.49) не входят уравнения Коши, Папковича, Сен-Венана.

По нашему мнению вводимые "несовместности" имеют следующий физический смысл:

Ξ - решение (1.47) трактуется как кинематическое состояние с разрывным полем перемещений. Предполагается, что этот класс кинематических состояний является фундаментом построения феноменологической теории дислокаций и моделей накопления поврежденности, турбулентности и кавитации. В качестве подпространства, пространство Ξ - решений содержат среды Коссера.

Ω - решение (1.48) трактуется как кинематическое состояние с разрывным полем поворотов. Предполагается, что этот класс кинематических состояний является фундаментом построения феноменологической теории дисклинаций, моделей турбулентности и кавитации. Как показано выше, для 4-мерного пространства Ω - решение является общим решением уравнений гравитации Эйнштейна.

Наконец, Θ - решение задачи (1.48) трактуется как кинематическое состояние с разрывным полем перемещений, поворотов, изменения объема и вектора-градиента изменения объема. Предполагается, что этот класс кинематических состояний является фундаментом построения феноменологической теории ударных волн, моделей слоистых структур и пограничных процессов. Оно естественным образом подталкивает к гипотезе существования следующего элемента в иерархии дефектов в сплошных средах после дислокаций и дисклинаций.

Выясним кинематический смысл тензора несовместности Ξ_{ij} .

Рассмотрим трехмерный случай. Если в «квадратурах» соотношений Коши (1.24) совместить точки начала M_0 и конца M_x траектории интегрирования, в зависимости от того, является ли вектор перемещений интегрируемым или нет, соответствующий контурный интеграл даст или ноль или приращение ΔR_i . Действительно, пусть траектория интегрирования будет замкнутой кривой, лежащей в плоскости с нормалью n_i :

$$\Delta R_i = \oint [\gamma_{ij} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} - \omega_k \partial_{ijk}] d(\delta_{jq} - n_j n_q) y_q$$

Обозначим для краткости тензор дисторсии:

$$D_{ij} = \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k \mathcal{E}_{ijk}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \Delta R_i &= \oint D_{ik} (\delta_{jk} - n_j n_k) dy_j = \\ &= \oint D_{ik} [(\delta_{jk} - n_j n_k) \frac{dy_j}{ds}] ds = \oint D_{ik} [s_k] ds = \\ &= \oint D_{ik} [v_n n_m \mathcal{E}_{nmk}] ds = n_m \mathcal{E}_{nmk} \oint D_{ik} [v_n] ds = \\ &= n_j \mathcal{E}_{mj} \iint \frac{\partial D_{ik}}{\partial y_n} dF \end{aligned}$$

Здесь s_k - единичный вектор касательной к плоской траектории интегрирования.

С учетом определения тензора несовместности Ξ_{ji} в соответствии с (1.39) и полученным выше соотношением имеем:

$$\Delta R_i = n_j \iint \frac{\partial D_{ik}}{\partial y_n} \mathcal{E}_{mj} dF = n_j \iint \Xi_{ij} dF$$

Устремляя площадь к нулю и переходя к пределу, получим определение поверхностной плотности скачков перемещений r_i^F :

$$r_i^F = \Xi_{ij} n_j$$

r_i^F поддается экспериментальному определению, к примеру, на основе анализа шлифов и подсчета относительной площади микродефектов.

1.10. Некоторые новые свойства деформации формоизменения сплошной среды

Рассмотрим вновь соотношения для тензора девиатора деформаций в сплошной среде γ_{ij} . Предложим новую форму записи компонентов γ_{ij} . Пусть векторы X , Y и Z образуют ортонормированную систему векторов соответственно с компонентами

X_i , Y_i и Z_i в некоторой фиксированной системе координат.

Имеют место следующие равенства

$$\delta_{ik} = X_i X_k + Y_i Y_k + Z_i Z_k, \quad X_i Y_i = Y_i Z_i = X_i Z_i = 0,$$

где δ_{ik} - символ Кронекера.

Можно показать, что компоненты тензора-девиатора деформаций могут быть представлены в виде следующих разложений:

$$\gamma_{ij} = a_k A_{ijk} + d_k D_{ijk}, \quad (1.50)$$

где a_k, d_k - компоненты векторов, вид которых приведен ниже;

A_{ijk}, D_{ijk} - симметричные по индексам i и j тензоры третьего

ранга, в некотором смысле аналогичные тензору Леви-Чивиты:

$$\begin{aligned} A_{kij} &= [(Y_k Z_j + Y_j Z_k) X_i + (X_i Z_k + Z_i X_k) Y_j + (X_k Y_j + X_j Y_k) Z_i] \\ D_{ijl} &= [(X_k X_j - Y_k Y_j) Z_l + (Y_k Y_j - Z_k Z_j) X_l + (Z_k Z_j - X_k X_j) Y_l] \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} A_{ijk} \delta_{ij} &= D_{ijk} \delta_{jk} = \mathcal{E}_{ijk} \delta_{ij} = 0, \\ A_{ijk} \mathcal{E}_{ijp} &= D_{ijk} \mathcal{E}_{ijp} = \delta_{ij} \mathcal{E}_{ijk} = 0, \quad A_{ijq} D_{ijp} = 0 \\ A_{ijm} A_{ijm} &= 2\delta_{nm}, \quad \delta_{ki} \delta_{kj} = \delta_{ij}, \quad \mathcal{E}_{ijn} \mathcal{E}_{ijm} = \delta_{nm} \\ D_{ijp} D_{ijq} &= 3\delta_{pq} - (X_p + Y_p + Z_p)(X_q + Y_q + Z_q) \end{aligned}$$

Компоненты векторов a_k, d_k в разложении (1.50) выражаются из последних равенств через компоненты тензора девиатора деформаций с помощью следующих формул:

$$a_i = \frac{1}{2} \gamma_{kj} A_{kij}, \quad d_i = \frac{1}{3} \gamma_{kj} D_{kij} \quad (1.51)$$

Учитывая разложение (1.51) тензор дисторсии может быть записан в форме, отличной от той, что дается выражениями (1.2):

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = a_k A_{ijk} + d_k D_{ijk} + \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} - \omega_k \mathcal{E}_{ijk} \quad (1.52)$$

Полученное соотношение (1.52) является весьма интересным, ибо дает новые возможности при моделировании взаимодействий в сплошных средах. Действительно, забегая вперед, отметим, что в соответствии с общей процедурой принципа возможных перемещений, использование кинематических связей вида (1.51), (1.52) позволяет установить новый список аргументов функционала Лагранжа и, как следствие, расширить спектр упругих свойств изотропной среды, установив новую форму определяющих уравнений.

ГЛАВА 2 ФИЗИЧЕСКАЯ СТОРОНА (ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ)

2.1. Предварительные замечания

Для построения определяющих соотношений воспользуемся общим подходом [1], [2], [4] в соответствии с которым по заданным кинематическим связям находится вид функционала энергии для исследуемой среды. В результате устанавливается характер силовых взаимодействий, соответствующих введенным кинематическим связям. Таким образом, модель среды полностью задается разнообразием вводимых кинематических связей. Далее везде предполагается, что рассматриваются линейные, обратимые процессы.

Предварительно остановимся на формулировке обобщенных физических соотношений линейно-упругого тела. Полагаем, что соотношениями (1.23) полностью определяется кинематика исследуемой среды. В соответствии с принципом возможных перемещений запишем выражение для вариации работы внутренних усилий на кинематических связях (1.23). Вводя связи с помощью тензора множителей Лагранжа λ_{ij} , получим:

$$\delta U = \int_V \left[\lambda'_{ij} \delta \gamma_{ij} + \frac{1}{3} \lambda_{kk} \delta \theta - \lambda_{ij} \partial_{ijk} \delta \omega_k \right] + \int_S (-\lambda_{ij} n_j) \delta R_i \quad (2.1)$$

Здесь λ'_{ij} - компоненты тензора девиатора для несимметричного в общем случае тензора λ_{ij} ($\lambda'_{ij} = \frac{1}{2}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) - \frac{1}{3} \lambda_{kk} \delta_{ij}$), n_j - компоненты единичного вектора нормали к поверхности, ограничивающей рассматриваемое упругое тело.

Физический смысл множителей Лагранжа λ_{ij} очевиден. Этим тензором описывается спектр взаимодействий, соответствующих введенным кинематическим связям (1.23). Равенство (2.1) позволяет определить список аргументов искомого лагранжиана. Предполагая интегрируемость записанной линейной дифференциальной формы (2.1), можно заключить, что потенциальная энергия представляется в виде:

$$U = \int_V W_V(\gamma_{ij}, \theta, \omega_k, R_k) dV + \int_S W_F(R_k) dF$$