Полученное соотношение (1.52) является весьма интересным, ибо дает новые возможности при моделировании взаимодействий в сплошных средах. Действительно, забегая вперед, отметим, что в соответствии с общей процедурой принципа возможных перемещений, использование кинематических связей вида (1.51), (1.52) позволяет установить новый список аргументов функционала Лагранжа и, как следствие, расширить спектр упругих свойств изотропной среды, установив новую форму определяющих уравнений.

ГЛАВА 2
ФИЗИЧЕСКАЯ СТОРОНА
(ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ)

2.1. Предварительные замечания

Для построения определяющих соотношений воспользуемся общим подходом [1], [2], [4] в соответствии с которым по заданным кинематическим связям находится вид функционала энергии для исследуемой среды. В результате устанавливается характер силовых взаимодействий, соответствующих введенным кинематическим связям. Таким образом, модель среды полностью задается разнообразием вводимых кинематических связей. Далее везде предполагается, что рассматриваются линейные, обратимые процессы.

Предварительно остановимся на формулировке обобщенных физических соотношений линейно- упругого тела. Полагаем, что соотношениями (1.23) полностью определяется кинематика исследуемой среды. В соответствии с принципом возможных перемещений запишем выражение для вариации работы внутренних усилий на кинематических связях (1.23). Вводя связи с помощью тензора множителей Лагранжа λ_{ij}, получим:

$$\delta U = \iiint\limits_{V}\left[\lambda'_{ij}\delta\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\lambda_{kk}\delta\theta - \lambda_{ij}\mathit{Э}_{ijk}\delta\omega_k\right] + \oint\limits_{S}\left(-\lambda_{ij}n_j\right)\delta R_i \quad (2.1)$$

Здесь λ'_{ij} - компоненты тензора девиатора для несимметричного в общем случае тензора λ_{ij} ($\lambda'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}\right) - \frac{1}{3}\lambda_{kk}\delta_{ij}$), n_j - компоненты единичного вектора нормали к поверхности, ограничивающей рассматриваемое упругое тело.

Физический смысл множителей Лагранжа λ_{ij} очевиден. Этим тензором описывается спектр взаимодействий, соответствующих введенным кинематическим связям (1.23). Равенство (2.1) позволяет определить список аргументов искомого лагранжиана. Предполагая интегрируемость записанной линейной дифференциальной формы (2.1), можно заключить, что потенциальная энергия представляется в виде:

$$U = \iiint\limits_{V} W_V\left(\gamma_{ij}, \theta, \omega_k, R_k\right)dV + \iint W_F\left(R_k\right)dF$$

Полагая физическую линейность исследуемой среды, а, следовательно, и квадратичность плотности потенциальной энергии относительно аргументов γ_{ij}, θ, ω_i, R_i и, учитывая тензорную размерность этих переменных, получаем, что плотность энергии может быть аддитивной функцией следующих инвариантов: $2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij}$, $K\theta^2$, $\chi\omega_i\omega_i$, CR_iR_i, $D\omega_iR_i$, где μ, χ, K, D, C - величины, определяющие свойства среды.

В частности, для линейно-упругой изотропной среды при дополнительном предположении $D=0$ можем записать:

$$W_V = \mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + 1/2(2/3\,\mu+\lambda)\theta^2 + 2\chi\omega_k\omega_k + 1/2\,CR_iR_i$$

$$W_F = 1/2\,AR_iR_jn_in_j + 1/2\,BR_iR_j(\delta_{ij}-n_in_j) = 1/2\,B_{ij}R_iR_j \quad (2.2)$$

Определяя внутренние силовые факторы как производные от потенциальной энергии по обобщенным кинематическим переменным, получаем, что модель сплошной среды (2.2) допускает существование внутри объема внутренних силовых факторов типа напряжений $\sigma_{ij} = \partial W_V/\partial R_{i,j}$ и объемных сил $\sigma_i = \partial W_V/\partial R_i$, а на поверхности - внутренних поверхностных сил $P_i = \partial W_F/\partial R_i$. В результате соотношения, определяющие внутренние взаимодействия тензорной и векторной природы, запишутся в виде

$$\sigma_{ij} = \mu(R_{i,j}+R_{j,i}) + \lambda R_{k,k}\delta_{ij} + \chi(R_{i,j}-R_{j,i}), \qquad (2.3)$$

$$\sigma_i = CR_i \qquad (2.4)$$

На поверхности исследуемого тела справедливы следующие физические уравнения:

$$P_i = B_{ij}R_j = (\,AR_jn_in_j + BR_j(\delta_{ij}-n_in_j)\,) \qquad (2.5)$$

Естественно считать, что μ и λ равны известным в теории упругости коэффициентам Ламе (μ - модуль сдвига). Постоянные χ, A, B, C являются новыми упругими постоянными среды. При этом уравнения (2.3)-(2.5) являются определяющими соотношениями для модели среды с несимметричным тензором напряжений и упругими внутренними связями типа объемных и поверхностных винклеровских оснований. Можно предположить, что эти усилия, аналогичные усилиям в винклеровских пружинках с жесткостью равной величине C (новая

упругая постоянная) моделируют внутренние взаимодействия когезионных полей. Для них характерны большие амплитудные значения в пределах соответствующих областей взаимодействий (аналогично силам межатомного взаимодействия Ван-дер-Ваальса) и быстрое затухание вне пределов этих областей. Непарность касательных напряжений определяется упругими постоянными χ и D. Имеет место также анизотропия поверхностных свойств среды по нормали к поверхности и касательной к ней. Поверхностные эффекты описываются с помощью соответственно физических постоянных A и B. Вопрос о материальной объективности предложенной модели будет специально обсуждаться ниже.

Определяющие соотношения(2.3)-(2.5) позволяют записать конкретное выражение для потенциальной энергии. В результате можно найти уравнения равновесия в дифференциальной форме и соответствующие граничные условия как уравнения Эйлера и естественные граничные условия, соответствующие условию стационарности функционала Лагранжа. Полученные здесь определяющие уравнения являются физическими соотношениями для изотропной, линейно упругой модели сплошной среды, называемой в дальнейшем базовой моделью сплошной среды. Аналогично постоим базовую модель пространственно- временного континуума на основе обобщенных соотношений Коши (1.3).

2.2. Определяющие соотношения модели пространственно-временного континуума

Используя концепцию единого поля, полагаем, что не должно быть внешних сил по отношению к рассматриваемой сплошной среде. Таким образом, все силы взаимодействия являются только внутренними. Этими силами обеспечиваются кинематические связи, соответствующие расширенным уравнениям Коши. Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, запишем возможную работу внутренних сил как работу сил реакции λ_{ij} на соответствующих кинематических связях (1.3):

$$\iiiint \lambda_{ij}\delta\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \gamma_{ij} - \frac{1}{4}\theta\delta_{ij} + \frac{1}{2}\omega_{nm}Э_{nmij}\right)dV = 0$$

Отсюда не трудно определить список аргументов искомого лагранжиана:

$$\delta L = -\delta U = \iiiint [(\frac{1}{2}\lambda_{ij} + \frac{1}{2}\lambda_{ji} - \frac{1}{4}\lambda_{kk}\delta_{ij})\delta\gamma_{ij} +$$

$$+ (\frac{1}{4}\lambda_{kk})\delta\theta + (-\frac{1}{2}\lambda_{ij}\text{Э}_{nmij})\delta\omega_{nm}$$

$$+ (\frac{\partial\lambda_{ij}}{\partial x_j})\delta R_i]dV + \oint\!\!\!\oint\!\!\!\oint (\lambda_{ij}n_j)\delta R_i dF$$

Предполагая интегрируемость линейной дифференциальной формы, имеем:

$$L = \iiiint L_V(\gamma_{ij};\theta;\omega_{nm};R_i)dV + \oint\!\!\!\oint\!\!\!\oint L_F(R_i)dF \qquad (2.6)$$

Для линейных физических соотношений, на основе (2.6), по аналогии с трехмерной механикой [2], получим:

$$L = \frac{1}{2}\iiiint \{2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij} + (\frac{\mu}{2} + \lambda)\theta^2 +$$

$$+ 2\chi\omega_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} + CR_iR_i\}dV +$$

$$+ \frac{1}{2}\oint\!\!\!\oint\!\!\!\oint \{AR_iR_jn_in_j + BR_iR_j(\delta_{ij} - n_in_j)\}dF \qquad (2.7)$$

В результате, имея ввиду равенство (2.7), находим следующие физические соотношения, определяемые по формулам Грина через объемную и гиперповерхностную плотность функционала Лагранжа:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial L_V}{\partial(\frac{\partial R_i}{\partial x_j})} = \mu(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}) +$$

$$+ \lambda\frac{\partial R_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \chi(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i}) \qquad (2.8)$$

$$\sigma_i = \frac{\partial L_V}{\partial R_i} = CR_i$$

$$P_i = \frac{\partial L_F}{\partial R_i} = [An_in_j + B(\delta_{ij} - n_in_j)]R_j = A_{ij}R_j\ ,$$

где μ, λ, χ, C, A и B - фундаментальные константы модели.

Таким образом, внутри объема пространства событий V физические соотношения (2.3) определяют силовые факторы типа 4-мерного несимметричного тензора напряжений σ_{ij} и 4-мерного вектора внутренних объемных сил σ_i, а на гиперповерхности F - 4-мерного вектора внутренних гиперповерхностных сил P_i.

Соотношения (2.8) являются естественным обобщением равенств (2.3)-(2.5) и определяют систему внутренних силовых связей ("напряжений" и "усилий"), обеспечивающих выполнение кинематических связей (1.3). Далее будет показано, этой системой внутренних силовых связей полностью определяется силовая стороны задачи (напряженности электрических и магнитных полей и др.) в исследуемой среде. Соотношения (2.8) будем называть определяющими соотношениями для базовой модели пространственно-временного континуума.

В следующих подразделах главы показывается, что предлагаемый алгоритм построения физических соотношений позволяет последовательно формулировать модели механики сплошных сред с более общей системой кинематических связей, к которым в частности относятся различные варианты моделей моментной теории упругости.

2.3. Модель на основе соотношений Коши и Папковича (модель среды Койтера)

Следуя общей процедуре, построим возможную работу внутренних сил как работу сил связей на выбранных кинематических связях (1.23) и (1.25).

$$\bar{\delta}U = \iiint \{\sigma_{ij}\delta[\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k\text{Э}_{ijk} - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}] +$$

$$- m_{ij}\delta[\frac{\partial}{\partial x_m}(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in} - \omega_k\text{Э}_{ink})\text{Э}_{nmj}]dV \qquad (2.9)$$

Полагаем, что соотношениями Папковича устанавливаются кинематические связи между кривизнами $\frac{\partial\omega_k}{\partial x_m}$ и кинематическими факторами $(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in})$. В итоге между двенадцатью кинематическими переменными γ_{ij}, θ, ω_k, R_i имеется девять связей Коши, а для девяти дополнительно определенных кривизн вводятся девять связей Папковича. Следовательно, как и в базовой модели, здесь остаются всего три независимых обобщенных переменных, в качестве которых естественно выбрать вектор перемещений. Уравнения Эйлера при вариации этих переменных в вариационных уравнениях Лагранжа дают систему трех уравнений равновесия. Очевидно, что для данной модели среды порядок этих уравнений будет более высоким, нежели в базовой модели из-за введенной системы дополнительных связей соотношений Папковича. Полная математическая формулировка краевых задач будет дана в дальнейшем.

Рассмотрим отдельно второе слагаемое в выражении (2.9). Взяв по частям выражения $\frac{\partial}{\partial x_m}(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in})Э_{nmj}$, получим линейную дифференциальную форму относительно аргументов искомого лагранжиана:

$$\bar{\delta}U_m = \iiint m_{ij}\delta[-\frac{\partial}{\partial x_m}(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in})Э_{nmj} + \frac{\partial\omega_k}{\partial x_m}Э_{nki}Э_{nmj}]dV =$$

$$= \iiint m_{ij}\delta[-\frac{\partial}{\partial x_m}(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in})Э_{nmj} +$$

$$+ \frac{\partial\omega_k}{\partial x_m}(\delta_{km}\delta_{ij} - \delta_{kj}\delta_{im})]dV =$$

$$= \iiint \{m_{ij}\delta[\frac{\partial\omega_k}{\partial x_m}(\delta_{km}\delta_{ij} - \delta_{kj}\delta_{im})] + \qquad (2.10)$$

$$+ \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m}Э_{nmj}\delta(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in})\}dV -$$

$$- \oiint [m_{ij}n_m Э_{nmj}\delta(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in})]dF =$$

Заменяя в записанном соотношении γ_{ij} и θ в поверхностном и контурном интегралах соответствующими выражениями через перемещения R_i, после некоторых громоздких преобразований получим:

$$\delta U_m = \iiint \{[(m_{kk}\delta_{ij} - m_{ij})\delta\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}] +$$

$$+ (\frac{1}{2}\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m}Э_{nmj} + \frac{1}{2}\frac{\partial m_{nj}}{\partial x_m}Э_{imj})\delta\frac{\partial R_i}{\partial x_n}\}dV -$$

$$+ \oiint (\frac{1}{2}\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_q}n_m Э_{nmj} + \frac{1}{2}\frac{\partial m_{nj}}{\partial x_q}n_m Э_{imj})(\delta_{nq} - n_n n_q)\delta R_i dF -$$

$$- \sum \oint (\frac{1}{2}m_{ij}v_n n_m Э_{nmj} + \frac{1}{2}m_{nj}v_n n_m Э_{imj})\delta R_i ds -$$

$$- \oiint (\frac{1}{2}m_{nj}n_n n_m Э_{imj})\delta\frac{\partial R_p}{\partial x_q}n_q(\delta_{pi} - n_p n_i)dF - \qquad (2.11)$$

$$- \oiint (\frac{1}{2}m_{nj}n_n n_m Э_{imj})n_i\delta\frac{\partial R_p}{\partial x_q}n_q n_p dF$$

Таким образом, учитывая (2.11) и предполагая интегрируемость выписанной линейной дифференциальной формы (2.11), можно заключить, что:

$$U = \iiint U_V(\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}; \gamma_{ij}; \omega_n; R_i; \theta)dV +$$

$$+ \oiint U_F(R_i; \frac{\partial R_p}{\partial x_q}n_q(\delta_{pi} - n_p n_i))dF + \qquad (2.12)$$

$$+ \sum \oint U_s(R_i)ds$$

Разложим тензор-градиент поворотов на девиатор, шаровой и ротор, с учетом того, что дивергенция ротора тождественно равна нулю ($\xi = 0$):

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} = \xi_{ij} + \frac{1}{3}\xi\delta_{ij} - \xi_k Э_{ijk} = \xi_{ij} - \xi_k Э_{ijk}$$

Из соотношения (2.12) получим выражение для объемной и поверхностной плотностей лагранжиана:

$$\begin{aligned} U_V = \frac{1}{2}\{2\mu[\gamma_{ij}\gamma_{ij} + 2C_2\gamma_{ij}\xi_{ij} + C_3\xi_{ij}\xi_{ij}] + \\ + CR_iR_i + C_4\omega_iR_i + C_7\xi_iR_i + \\ + C_4\omega_iR_i + 2\chi\omega_i\omega_i + C_6\omega_i\xi_i + \\ + C_7\xi_iR_i + C_6\xi_i\omega_i + C_5\xi_i\xi_i + (\frac{2\mu}{3} + \lambda)\theta^2\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} U_F = \frac{1}{2}\{AR_iR_jn_in_j + BR_iR_j(\delta_{ij} - n_in_j) + \\ + 2B_1R_i\dot{R}_j(\delta_{ij} - n_in_j) + B_2\dot{R}_i\dot{R}_j(\delta_{ij} - n_in_j)\} \end{aligned}$$

Здесь величинами ξ_{ij} и $\xi_k Э_{ijk}$ определяются симметричный и несимметричный тензор кривизн.

Теперь, используя формулы Грина, из (2.13) нетрудно получить полную систему определяющих уравнений

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial(\frac{\partial R_i}{\partial x_j})} = [2\mu\gamma_{ij} + (\frac{2\mu}{3} + \lambda)\theta\delta_{ij} - \chi\omega_k Э_{ijk}] +$$

$$+ [2\mu C_2\xi_{ij} - \frac{1}{2}C_6\xi_k Э_{ijk}] + [-\frac{1}{2}C_4R_kЭ_{ijk}]$$

$$m_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial(\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j})} = [2\mu C_2\gamma_{ij} - \frac{1}{2}C_6\omega_kЭ_{ijk}] + \quad (2.14)$$

$$+ [2\mu C_3\xi_{ij} - \frac{1}{2}C_5\xi_kЭ_{ijk}] + [-\frac{1}{2}C_7R_kЭ_{ijk}]$$

$$\sigma_i = \frac{\partial U_V}{\partial R_i} = C_4\omega_i + C_7\xi_i + CR_i$$

$$f_i = \frac{\partial U_F}{\partial R_i} = AR_jn_in_j + BR_j(\delta_{ij} - n_in_j) + B_1\dot{R}_j(\delta_{ij} - n_in_j)$$

$$m_i = \frac{\partial U_F}{\partial \dot{R}_i} = B_1R_j(\delta_{ij} - n_in_j) + B_2\dot{R}_j(\delta_{ij} - n_in_j)$$

Следует обратить внимание, что предложенный вариант модели моментной среды Койтера, построенный на предположении о выполнении кинематических связей Папковича, представляется далеко не полным. Действительно, предположим, что пространство аргументов плотностей потенциальной энергии определяется не только тензором кривизны, связанным с производными от вектора поворотов, но и кривизнами, определяемыми как производные от объемной деформации. Тогда пространство аргументов расширяется и изменяется физическая модель среды. В формуле (2.9), определяющей линейную дифференциальную форму относительно аргументов искомого Лагранжиана, следует последовательно интегрировать по частям выражение, содержащее $\frac{\partial}{\partial x_m}\gamma_{in}Э_{nmj}$. Некоторые преобразования приводятся ниже. В результате вместо (2.11) получим:

$$\delta U_m = \iiint \{[(m_{kk}\delta_{ij} - m_{ji})\delta\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} + \frac{1}{3}m_{ij}Э_{ijm}\delta\frac{\partial\theta}{\partial x_m}] +$$

$$+ (\frac{1}{2}\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m}Э_{nmj} + \frac{1}{2}\frac{\partial m_{nj}}{\partial x_m}Э_{imj} - \frac{1}{3}\frac{\partial m_{kj}}{\partial x_m}Э_{kmj}\delta_{in})\delta\gamma_{in}\}dV -$$

$$+ \oiint (\delta_{nq} - n_nn_q)\frac{\partial}{\partial x_q}(\frac{1}{2}m_{ij}n_mЭ_{nmj} + \frac{1}{2}m_{nj}n_mЭ_{imj} -$$

$$-\frac{1}{3}m_{kj}n_mЭ_{kmj}\delta_{in})\delta R_i dF -$$

$$-\sum \oint (\frac{1}{2}m_{ij}s_j + \frac{1}{2}m_{nj}v_nn_mЭ_{imj} - \frac{1}{3}m_{kj}v_in_mЭ_{kmj})\delta R_i d -$$

$$-\oiint \Big(\frac{1}{2} m_{nj} n_n n_m \text{Э}_{imj} -$$

$$-\frac{1}{3} m_{kj} n_i n_m \text{Э}_{kmj}\Big)\delta \frac{\partial R_p}{\partial x_q} n_q (\delta_{ip} - n_i n_p) dF - \qquad (2.15)$$

$$-\oiint \frac{1}{3} m_{kj} n_m \text{Э}_{kjm} \delta \frac{\partial R_p}{\partial x_q} n_q n_p \,] dF$$

Таким образом, учитывая формулы (2.15) и предполагая интегрируемость линейной дифференциальной формы (2.9), можно заключить, что:

$$U = \iiint U_V \Big(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}; \frac{\partial \theta}{\partial x_n} \gamma_{ij}; \omega_n; R_n; \theta\Big) dV +$$

$$+\oiint U_F \Big(R_i; \frac{\partial R_i}{\partial x_q} n_q\Big) dF + \qquad (2.16)$$

$$+\sum \oint U_s(R_i) ds$$

Разложим тензор-градиент поворотов на девиатор, шаровой и ротор:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \xi_{ij} + \frac{1}{3}\xi \delta_{ij} - \xi_k \text{Э}_{ijk} = \xi_{ij} - \xi_k \text{Э}_{ijk}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_j} = \theta_j$$

Для линейных физических соотношений на основе соотношения (2.16) получим выражение объемной и поверхностной плотностей лагранжиана:

$$U_V = \frac{1}{2}\{2\mu[\gamma_{ij}\gamma_{ij} + 2C_2 \xi_{ij}\gamma_{ij} + C_3 \xi_{ij}\xi_{ij}] +$$

$$+ C R_i R_i + C_4 \omega_i R_i + C_7 \xi_i R_i + C_{11} \theta_i R_i +$$

$$+ C_4 R_i \omega_i + 2\chi \omega_i \omega_i + C_6 \xi_i \omega_i + C_{10} \theta_i \omega_i +$$

$$+ C_7 R_i \xi_i + C_6 \omega_i \xi_i + C_5 \xi_i \xi_i + C_{12} \theta_i \xi_i +$$

$$+ C_{11} R_i \theta_i + C_{10} \omega_i \theta_i + C_{12} \xi_i \theta_i + C_9 \theta_i \theta_i + \Big(\frac{2\mu}{3} + \lambda\Big)\theta^2\}$$

$$U_F = \frac{1}{2}\{A R_i R_j n_i n_j + 2A_1 R_i \dot{R}_j n_i n_j + \qquad (2.17)$$

$$+ B R_i R_j (\delta_{ij} - n_i n_j) + 2B_1 R_i \dot{R}_j (\delta_{ij} - n_i n_j) +$$

$$+ B_2 \dot{R}_i \dot{R}_j (\delta_{ij} - n_i n_j)\}$$

Нетрудно видеть, что физическая модель, определяемая плотностями Лагранжиана (2.17) является более общей, чем предложенный ранее вариант (2.13). Полная система определяющих соотношений, устанавливающая связь между внутренними силовыми факторами и геометрическими параметрами (аргументами функционала), находится с помощью соотношений Грина:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial\big(\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\big)}, \quad m_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial\big(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\big)}, \quad \mu_i = \frac{\partial U_V}{\partial\big(\frac{\partial \theta}{\partial x_i}\big)},$$

$$\sigma_i = \frac{\partial U_V}{\partial R_i}, \quad f_i = \frac{\partial U_F}{\partial R_i}, \quad m_i = \frac{\partial U_F}{\partial \dot{R}_i}$$

Совершенно аналогично могут быть построены модели сред, построенные на предположении о том, что в среде реализуется более полная система внутренних связей, чем изложенные выше (модели сред с большей гладкостью). Кратко приведем некоторые из них.

2.4. Модель на основе соотношений Коши, Папковича и Сен-Венана

Построим возможную работу внутренних сил как работу сил связей на выбранных кинематических связях (1.23), (1.25) и (1.28):

$$\delta U = \iiint \{\sigma_{ij}\delta[\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} - \omega_k \text{Э}_{ijk} - \frac{\partial R_i}{\partial x_j}] +$$

$$+ m_{ij}\delta[\frac{\partial}{\partial x_m}(\gamma_{in} + \frac{1}{3}\theta\delta_{in} - \omega_k \text{Э}_{ink})\text{Э}_{nmj}] +$$

$$+b_{ij}\delta[-\frac{1}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j}+\frac{\partial^2\gamma_{lm}}{\partial x_k \partial x_n}(Э_{nmi}Э_{lkj}-\frac{1}{2}\delta_{ij}Э_{pnm}Э_{plk})]\}dV \quad (2.18)$$

В выражении (2.18), в уравнениях связей Сен-Венана вторые производные от выбранных компонентов тензора дисторсии, которые берутся в качестве аргументов Лагранжиана, можно назвать по аналогии со строительной механикой депланациями. Тогда соответствующие силовые факторы следует назвать бимоментными напряжениями.

В данном разделе мы привели лишь общий вид, возможной работы сил связи. Используя далее общую процедуру, на основе (2.18) могут быть установлены аргументы функционала Лагранжа и построена физическая модель среды.

2.5. Модель на основе соотношений Коши, Папковича, Сен-Венана и новых уравнений совместности третьего порядка

Взяв по частям производные, получим линейную дифференциальную форму относительно аргументов искомого лагранжиана.

$$\bar{\delta}U=\iiint\{\sigma_{ij}\delta[\gamma_{ij}+\frac{1}{3}\theta\delta_{ij}-\omega_k Э_{ijk}-\frac{\partial R_i}{\partial x_j}]+$$

$$+m_{ij}\delta[\frac{\partial}{\partial x_m}(\gamma_{in}+\frac{1}{3}\theta\delta_{in}-\omega_k Э_{ink})Э_{nmj}]+$$

$$+b_{ij}\delta[-\frac{1}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j}+\frac{\partial^2\gamma_{lm}}{\partial x_k \partial x_n}(Э_{nmi}Э_{lkj}-\frac{1}{2}\delta_{ij}Э_{pnm}Э_{plk})]+ \quad (2.19)$$

$$+t_{ij}\delta(\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\delta_{ip}+\gamma_{m\mu}Э_{\alpha mi}Э_{\beta\mu p})_{,\alpha\beta q}Э_{pqj})\}dV$$

В кинематических связях третьего порядка, в последней строке равенства (2.19) производные от компонентов тензоров дисторсии имеет смысл называть кривизнами третьего порядка, а соответствующие силовые факторы - тримоментными напряжениями (по аналогии с бимоментными напряжениями).

С помощью общей процедуры из записанного выражения можно получить спектр физических моделей такой среды. В силу

громоздкости преобразований и большого многообразия упругих свойств такой модели конкретные физические соотношения не приводятся.

2. 6. Неинтегрируемые кинематические модели

Значительный интерес с точки зрения тонких структур представляют среды с системой распределенных дефектов [7], [8], для которых не выполняются условия интегрируемости. Кратко остановимся на алгоритме построения моделей таких сред, являющихся широким обобщением моделей сред, приведенных выше. Здесь кинематика моделей в общем случае определяется следующей системой уравнений:

$$\gamma_{ij}+\frac{1}{3}\theta\delta_{ij}-\frac{1}{2}\omega_k Э_{ijk}=\frac{\partial R_i}{\partial x_j},$$

$$-\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\gamma_{jm}}{\partial x_n}Э_{nmi}+\frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial x_n}Э_{nij}=-\Xi_{ij},$$

$$-\frac{1}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j}+\frac{\partial^2\gamma_{lm}}{\partial x_k \partial x_n}(Э_{nmi}Э_{lkj}-\frac{1}{2}\delta_{ij}Э_{pnm}Э_{plk})=$$

$$=-\frac{\partial\Xi_{il}}{\partial x_k}Э_{jlk}+\frac{1}{2}\delta_{ij}\frac{\partial\Xi_{pl}}{\partial x_k}Э_{plk}-\Omega_{ij}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_q}[\frac{\partial^2\gamma_{sm}}{\partial x_k \partial x_n}(Э_{nmi}Э_{lsk}-\frac{1}{2}\delta_{il}Э_{pnm}Э_{psk})]Э_{lqj}= \quad (2.20)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_q}[\frac{\partial\Xi_{is}}{\partial x_k}Э_{lsk}-\frac{1}{2}\delta_{il}\frac{\partial\Xi_{ps}}{\partial x_k}Э_{psk}+\Omega_{il}]Э_{lqj}+\Theta_{ij}$$

Построим возможную работу внутренних сил как работу сил связей на выбранных кинематических связях (2.20):

$$\bar{\delta}U=\iiint\{\sigma_{ij}\delta[\gamma_{ij}+\frac{1}{3}\theta\delta_{ij}-\frac{1}{2}\omega_k Э_{ijk}-\frac{\partial R_i}{\partial x_j}]+$$

$$+m_{ij}\delta[\Xi_{ij}-\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\gamma_{jm}}{\partial x_n}\text{Э}_{nmi}+\frac{1}{3}\frac{\partial\theta}{\partial x_n}\text{Э}_{nij}]+$$

$$+b_{ij}\delta[\Omega_{ij}-\frac{1}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2\gamma_{lm}}{\partial x_k\partial x_n}(\text{Э}_{nmi}\text{Э}_{lkj}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\text{Э}_{pnm}\text{Э}_{plk})+$$

$$+\frac{\partial\Xi_{il}}{\partial x_k}\text{Э}_{jlk}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\frac{\partial\Xi_{pl}}{\partial x_k}\text{Э}_{plk}]+ \tag{2.21}$$

$$+t_{ij}\delta[\Theta_{ij}-\frac{\partial}{\partial x_q}[\frac{\partial^2\gamma_{sm}}{\partial x_k\partial x_n}(\text{Э}_{nmi}\text{Э}_{lsk}-\frac{1}{2}\delta_{il}\text{Э}_{pnm}\text{Э}_{psk})+$$

$$+\frac{\partial\Xi_{is}}{\partial x_k}\text{Э}_{lsk}-\frac{1}{2}\delta_{il}\frac{\partial\Xi_{ps}}{\partial x_k}\text{Э}_{psk}+\Omega_{il}]\text{Э}_{lqj}]\}dV$$

В дальнейшем необходимо выделить интегрируемые части в векторах перемещений R_i, поворотов ω_i и градиента θ. Для этого представим решение системы уравнений (2.21) в виде:

$$\begin{aligned} R_i &= R_i^0 \\ \omega_i &= \omega_i^0+\omega_i^{\Xi}, \\ \theta &= \theta^0+\theta^{\Xi}+\theta^{\Omega}, \\ \gamma_{ij} &= \gamma_{ij}^0+\gamma_{ij}^{\Xi}+\gamma_{ij}^{\Omega}+\gamma_{ij}^{\Theta} \end{aligned} \tag{2.22}$$

где:

$R_i^0\ \omega_i^0\ \theta^0\ \gamma_{ij}^0$ - общее решение однородной системы (2.20) при $\Xi_{ij}=0$, $\Omega_{ij}=0$, $\Theta_{ij}=0$;

$\omega_i^{\Xi}\ \theta^{\Xi}\ \gamma_{ij}^{\Xi}$ - частное решение неоднородной системы (2.20) при $\Xi_{ij}\neq 0$, $\Omega_{ij}=0$, $\Theta_{ij}=0$; R_i^{Ξ} не существуют;

$\theta^{\Omega}\ \gamma_{ij}^{\Omega}$ - частное решение неоднородной системы (2.20) при $\Omega_{ij}\neq 0$, $\Theta_{ij}=0$;

R_i^{Ω} и ω_i^{Ω} не существуют;

γ_{ij}^{Θ} - частное решение неоднородной системы (2.20) при $\Theta_{ij}\neq 0$, причем R_i^{Θ}, ω_i^{Θ} и θ^{Θ} не существуют.

Тогда тензоры несовместностей можно заново определить в виде:

$$\Xi_{ij}=\frac{\partial\omega^{\Xi}_i}{\partial x_j}-\frac{\partial\gamma^{\Xi}_{jm}}{\partial x_n}\text{Э}_{nmi}-\frac{1}{3}\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial x_n}\text{Э}_{nij},$$

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{3}\frac{\partial^2\theta^{\Omega}}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2\gamma^{\Omega}_{lm}}{\partial x_k\partial x_n}(\text{Э}_{nmi}\text{Э}_{lkj}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\text{Э}_{pnm}\text{Э}_{plk}) \tag{2.23}$$

$$\Theta_{ij}=\frac{\partial^3\gamma^{\Theta}_{sm}}{\partial x_k\partial x_n\partial x_q}(\text{Э}_{nmi}\text{Э}_{lsk}-\frac{1}{2}\delta_{il}\text{Э}_{pnm}\text{Э}_{psk})\text{Э}_{lqj}$$

Используя полученные выражения для записи возможной работы сил связей, и проведя процедуру интегрирования по частям, получим линейную дифференциальную форму относительно аргументов искомого лагранжиана. Для упрощения не будем явно выписывать статические множители при вариациях аргументов в линейной дифференциальной форме. Таким образом, список аргументов лагранжиана, записанного относительно фундаментальных кинематических состояний (2.22), будет иметь следующий вид:

$$\delta\overline{U}=\iiint\{()\delta R_i^0+()\delta\omega_i^0+()\delta\theta^0+()\delta\gamma_{ij}^0+$$

$$+()\delta\omega_i^{\Xi}+()\delta\theta^{\Xi}+()\delta\gamma_{ij}^{\Xi}+$$

$$+()\delta[\frac{\partial\omega^{\Xi}_i}{\partial x_j}-\frac{1}{3}\frac{\partial\theta^{\Xi}}{\partial x_n}\text{Э}_{nij}-\frac{\partial\gamma^{\Xi}_{jm}}{\partial x_n}\text{Э}_{nmi}]+$$

$$+()\delta\theta^{\Omega}+()\delta\gamma_{ij}^{\Omega}+$$

$$+()\delta[\frac{1}{3}\frac{\partial^2\theta^{\Omega}}{\partial x_i\partial x_j}+\frac{\partial^2\gamma^{\Omega}_{lm}}{\partial x_k\partial x_n}(\text{Э}_{nmi}\text{Э}_{lkj}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\text{Э}_{pnm}\text{Э}_{plk})]+$$

$$+ ()\delta\gamma_{ij}^{\Theta} + ()\delta \frac{\partial^3 \gamma^{\Theta}{}_{sm}}{\partial x_k \partial x_n \partial x_q} (Э_{nmi} Э_{lsk} - \frac{1}{2} \delta_{il} Э_{pnm} Э_{psk}) Э_{lqi} \} dV +$$

$$+ \oiint \{\} dF$$

Здесь для краткости не записано выражение возможной работы поверхностных силовых факторов на соответствующих поверхностных кинематических переменных.

Таким образом, список аргументов объемной плотности потенциальной энергии включает в себя: пять скаляров $\theta^0, \theta^{\Xi}, \theta,^{\Omega}$ Ξ_{ii}, Ω_{ii}, четыре вектора R_i^0, $\omega_i^0, \omega_i^{\Xi}, \Xi_{nm} Э_{nmi}$ и семь девиаторов $\gamma_{ij}^0, \gamma_{ij}^{\Xi}, \gamma_{ij}^{\Omega}, \gamma_{ij}^{\Theta}$, $(\frac{1}{2}\Xi_{ij} + \frac{1}{2}\Xi_{ji} - \frac{1}{3}\Xi_{kk}\delta_{ij})$, $(\frac{1}{2}\Omega_{ij} + \frac{1}{2}\Omega_{ji} - \frac{1}{3}\Omega_{kk}\delta_{ij})$ и $(\frac{1}{2}\Theta_{ij} + \frac{1}{2}\Theta_{ji} - \frac{1}{3}\Theta_{kk}\delta_{ij})$.

Даже если пренебречь поверхностной плотностью потенциальной энергии деформации и перекрестными членами в объемной плотности потенциальной энергии деформации, квадратичный по выявленным аргументам Лагранжиан будет содержать шестнадцать (5+4+7) физических постоянных. Эти постоянные дают принципиальную возможность описать не только упругие свойства твердых тел, но и их когезионные и адгезионные свойства. Предложенные общие модели могут являться основой для построения прикладных моделей несингулярных трещин, моделей поверхностных слоев материалов, покрытий и тонких пленок [17], [18]. Кинематические соотношения (2.20), введенные тензоры несовместности (2.23) позволяют моделировать явления аналогичные явлениям турбулентности, кавитации, ударных волн и многие другие явления.

ГЛАВА 3
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Ранее (гл. 1), было дано описание кинематики среды и установлена система кинематических связей, которые можно использовать для моделирования системы силовых взаимодействий. В главе 2 были определены внутренние силовые факторы как производные от потенциальной энергии по обобщенным кинематическим переменным. Показано, что базовая модель сплошной среды, обусловленная введенными связями, допускает существование внутри объема внутренних силовых факторов типа напряжений $\sigma_{ij} = \partial W_V / \partial R_{i,j}$ и объемных сил $\sigma_i = \partial W_V / \partial R_i$, а на поверхности - внутренних поверхностных сил $f_i = \dfrac{\partial W_F}{\partial R_i}$.

В результате, построенные определяющие соотношения позволяют записать конкретное выражение для потенциальной энергии и, следовательно, полностью определяют математическую модель среды. В этой главе приводится математическая формулировка соответствующих моделей, включающая систему разрешающих уравнений и граничных условий.

3.1. Краевые задачи для базовой модели среды Минковского

Получим систему разрешающих уравнений и граничные условия на основе вариации построенного лагранжиана. Запишем их в форме вариационного равенства:

$$\delta L = -\int [CR_i - (\mu + \chi) \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j \partial x_j} -$$

$$-(\mu + \lambda - \chi) \frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j}] \delta R_i dV - \tag{3.1}$$

$$- \oint [(\mu + \chi) \frac{\partial R_i}{\partial x_j} n_j + \lambda \frac{\partial R_j}{\partial x_j} n_i + (\mu - \chi) \frac{\partial R_j}{\partial x_i} n_j +$$

$$+ A_{ij} R_j] \delta R_i dF = 0$$