$$+ ()\delta\gamma_{ij}^{\Theta} + ()\delta \frac{\partial^3 \gamma^{\Theta}{}_{sm}}{\partial x_k \partial x_n \partial x_q} (Э_{nmi} Э_{lsk} - \frac{1}{2}\delta_{il} Э_{pnm} Э_{psk}) Э_{lqi} \} dV +$$

$$+ \oiint \{\} dF$$

Здесь для краткости не записано выражение возможной работы поверхностных силовых факторов на соответствующих поверхностных кинематических переменных.

Таким образом, список аргументов объемной плотности потенциальной энергии включает в себя: пять скаляров $\theta^0, \theta^{\Xi}, \theta,^{\Omega}$ Ξ_{ii}, Ω_{ii}, четыре вектора R_i^0, $\omega_i^0, \omega_i^{\Xi}, \Xi_{nm} Э_{nmi}$ и семь девиаторов $\gamma_{ij}^0, \gamma_{ij}^{\Xi}, \gamma_{ij}^{\Omega}, \gamma_{ij}^{\Theta}$, $(\frac{1}{2}\Xi_{ij} + \frac{1}{2}\Xi_{ji} - \frac{1}{3}\Xi_{kk}\delta_{ij})$, $(\frac{1}{2}\Omega_{ij} + \frac{1}{2}\Omega_{ji} - \frac{1}{3}\Omega_{kk}\delta_{ij})$ и $(\frac{1}{2}\Theta_{ij} + \frac{1}{2}\Theta_{ji} - \frac{1}{3}\Theta_{kk}\delta_{ij})$.

Даже если пренебречь поверхностной плотностью потенциальной энергии деформации и перекрестными членами в объемной плотности потенциальной энергии деформации, квадратичный по выявленным аргументам Лагранжиан будет содержать шестнадцать (5+4+7) физических постоянных. Эти постоянные дают принципиальную возможность описать не только упругие свойства твердых тел, но и их когезионные и адгезионные свойства. Предложенные общие модели могут являться основой для построения прикладных моделей несингулярных трещин, моделей поверхностных слоев материалов, покрытий и тонких пленок [17], [18]. Кинематические соотношения (2.20), введенные тензоры несовместности (2.23) позволяют моделировать явления аналогичные явлениям турбулентности, кавитации, ударных волн и многие другие явления.

ГЛАВА 3
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Ранее (гл. 1), было дано описание кинематики среды и установлена система кинематических связей, которые можно использовать для моделирования системы силовых взаимодействий. В главе 2 были определены внутренние силовые факторы как производные от потенциальной энергии по обобщенным кинематическим переменным. Показано, что базовая модель сплошной среды, обусловленная введенными связями, допускает существование внутри объема внутренних силовых факторов типа напряжений $\sigma_{ij} = \partial W_V / \partial R_{i,j}$ и объемных сил $\sigma_i = \partial W_V / \partial R_i$, а на поверхности - внутренних поверхностных сил $f_i = \dfrac{\partial W_F}{\partial R_i}$.

В результате, построенные определяющие соотношения позволяют записать конкретное выражение для потенциальной энергии и, следовательно, полностью определяют математическую модель среды. В этой главе приводится математическая формулировка соответствующих моделей, включающая систему разрешающих уравнений и граничных условий.

3.1. Краевые задачи для базовой модели среды Минковского

Получим систему разрешающих уравнений и граничные условия на основе вариации построенного лагранжиана. Запишем их в форме вариационного равенства:

$$\begin{aligned} \delta L = &-\int [CR_i - (\mu+\chi)\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j \partial x_j} - \\ &-(\mu+\lambda-\chi)\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j}]\delta R_i dV - \\ &-\oint [(\mu+\chi)\frac{\partial R_i}{\partial x_j} n_j + \lambda \frac{\partial R_j}{\partial x_j} n_i + (\mu-\chi)\frac{\partial R_j}{\partial x_i} n_j + \\ &+ A_{ij} R_j]\delta R_i dF = 0 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Уравнениями (3.1) определяется математическая постановка задачи, заключающаяся в формулировке системы разрешающих дифференциальных уравнений и граничных условий для исследуемой среды. Подынтегральное выражение определяет уравнения равновесия, а поверхностный интеграл - весь спектр естественных граничных условий. В целом соотношения (3.1) вместе с системой определяющих уравнений (2.7) дают замкнутую, математически непротиворечивую формулировку модели изотропной среды с несимметричным тензором напряжений, распределенными по объему взаимодействиями "винклеровского" типа и с поверхностным взаимодействием типа "поверхностного натяжения". Форма записи разрешающих уравнений (3.1) позволяет получить общий вид решения (3.1) в удобной для последующего анализа смешанной форме, с учетом физических соотношений (2.8):

$$CR_i = \frac{(2\mu+\lambda)}{(2\mu+4\lambda)}\frac{\partial\sigma}{\partial x_i} + \frac{(\mu+\chi)}{2\chi}\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}Э_{\alpha\beta\eta}$$

$$\sigma = (2\mu+4\lambda)\theta \qquad (3.2)$$

$$H_{nm} = 2\chi\omega_{nm}$$

Далее рассмотрим несколько предельных случаев.

3.2. Модель вихревых кинематических состояний

Рассмотрим слагаемое в потенциальной энергии, содержащее λ, при $\theta = 0$:

$$0 = \iint\iint \{(\frac{\mu}{2}+\lambda)\theta^2\}dV = \iint\iint \{\frac{1}{4}\sigma\theta\}dV$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $\sigma \neq 0$, так как σ должно обеспечивать выполнение кинематической связи $\theta = 0$. Это возможно только тогда, когда $\lambda \to \infty$. Если $\lambda \to \infty$, тогда $\theta \to 0$, а потенциал сильных взаимодействий σ, являющийся функциональной неопределенностью типа $\infty * 0$, становится гармонической функцией. Потенциал сильных взаимодействий в этом случае не может быть определен из уравнений закона Гука, а определяется из уравнений равновесия как потенциал сил реакции кинематической связи $\theta = 0$.

$$\begin{cases} [(\mu+\chi)\dfrac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_k} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\sigma}{\partial x_i} - CR_i] = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial R_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

Перемещения определяются обобщенным бигармоническим оператором «электромагнитного» типа (χ - типа):

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}[(\mu+\chi)\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_k} - CR_i] = 0 \qquad (3.3)$$

3.3. Модель потенциальных кинематических состояний

Рассмотрим слагаемое в потенциальной энергии, содержащее χ, при $\omega_{ij} = 0$:

$$0 = \iint\iint \{2\chi\omega_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}\}dV = \iint\iint \{H_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}\}dV$$

Следовательно, $H_{ij} \neq 0$, так как H_{ij} должны обеспечивать выполнение кинематических связей $\omega_{ij} = 0$. Для корректной формулировки задачи следует принять $\chi \to \infty$. Напряжения электромагнитного поля, являющиеся функциональной неопределенностью типа $\infty * 0$, становятся гармоническими функциями.

Напряжения электромагнитного поля в этом случае не могут быть определены из уравнений закона Гука. Они находятся из уравнений равновесия как силы реакции кинематических связей $\omega_{ij} = 0$

$$\begin{cases} [(2\mu+\lambda)\dfrac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_k} + \dfrac{\partial H_{nm}}{\partial x_k}Э_{nmki} - CR_i] = 0 \Rightarrow 2\dfrac{\partial^2 H_{\alpha\beta}}{\partial x_j \partial x_j} = 0 \\ \dfrac{\partial H_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad и \qquad \dfrac{\partial R_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial R_j}{\partial x_i} \end{cases}$$

Перемещения определяются обобщенным бигармоническим оператором «сильного» типа (λ - типа):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}[(2\mu+\lambda)\dfrac{\partial^2 R_i}{\partial x_k \partial x_k} - CR_i] = 0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{nmij} = 0 \end{cases} \qquad (3.4)$$

3.4. Модель гармонических кинематических состояний

Если одновременно $\lambda \to \infty$ и $\chi \to \infty$, то потенциал сильных взаимодействий и напряжения электромагнитного поля, являющиеся функциональными неопределенностями типа $\infty * 0$, одновременно становятся гармоническими функциями. Потенциал сильных взаимодействий и напряжения электромагнитного поля в этом случае не могут быть определены из уравнений закона Гука, а находятся из уравнений равновесия как силы реакции кинематических связей $\theta = 0$ и $\omega_{ij} = 0$.

$$\begin{cases} CR_i = \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \dfrac{\partial H_{nm}}{\partial x_k}Э_{nmki} \\ \dfrac{\partial R_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \\ [\dfrac{\partial R_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial R_j}{\partial x_i}] + [\dfrac{\partial H_{ij}}{\partial x_j} = 0] \Rightarrow \dfrac{\partial^2 H_{\alpha\beta}}{\partial x_j \partial x_j} = 0 \end{cases}$$

Перемещения можно получить из кинематических связей, наложенных на среду, и являются гармоническими (μ - тип):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j \partial x_j} = 0 \qquad (3.5)$$

3.5. Модель несимметричных упругих полей

Если $C \to 0$, система уравнений становится квазиклассической, с учетом присутствия $\chi \neq 0$ и вытекающей из этого непарностью касательных напряжений:

$$(2\mu+\lambda)\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + (\mu+\chi)\frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}Э_{\alpha\beta\gamma i} = 0$$

Перемещения определяются бигармоническим оператором (C - тип):

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k x_k} = 0 \qquad (3.6)$$

3.6. Модель симметричных упругих полей

Наконец, если $C \to 0$ и $\chi \to 0$, система уравнений становится классической теорией упругости пространства Минковского:

$$(2\mu+\lambda)\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial \omega_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma}Э_{\alpha\beta\gamma i} = 0$$

Перемещения определяются тем же бигармоническим оператором C-типа:

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k x_k} = 0$$

Обратим внимание, что общее решение для базовой модели представляется в форме разложения на потенциальную и вихревую части (3.2), каждая из которых является решением уравнения Гельмгольца. Следовательно, базовая модель среды вполне укладывается в классификацию моделей "по гладкости", предложенную в разд. 1.8. Нетрудно видеть, что и все приведенные выше частные модели также могут рассматриваться рамках такой классификации.

Возвращаясь к общей модели, заметим, что общее решение можно представить в виде

$$R_i = \frac{(2\mu+\lambda)}{C}\frac{\partial}{\partial x_i}(div(R_i)) + \frac{(\mu+\chi)}{C}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}\left(-\frac{\partial R_k}{\partial x_m}Э_{\alpha\beta km}\right)Э_{\alpha\beta\gamma i}$$

Взяв дивергенцию и ротор соответственно от последнего выражения, убедимся, что базовая модель приводит к двум характерным радиусам взаимодействий.

Назовем величину

$$r_M = \sqrt{\frac{(\mu+\chi)}{C}}$$

радиусом Максвелла, определяющим характерное расстояние электромагнитных взаимодействий

Аналогично, назовем величину

$$r_Y = \sqrt{\frac{(2\mu+\lambda)}{C}}$$

радиусом Юкавы, определяющим характерное расстояние сильных взаимодействий.

3.7. Базовая модель механики сплошной среды

Следуя выбранному способу изложения, авторы считают целесообразным параллельно изложению моделей сред в 4-пространстве Минковского приводить соответствующие трехмерные модели сред. Эти модели представляются более простыми и понятными (по крайней мере, для механиков), а прямые аналогии могут быть полезными для понимания результатов, обобщенных на пространство Минковского. Кроме того, предлагаемый алгоритм построения моделей позволил и в механике сплошных трехмерных сред получить новые результаты.

Для изотропной трехмерной среды, в которой перемещения подчиняются связям, соответствующим несимметричным соотношениям для тензора дисторсии (1.23) вариационное уравнение имеет вид:

$$\delta L = \iiint [(\mu+\chi)\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\mu+\lambda-\chi)\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$+ 2D\frac{\partial R_n}{\partial x_m}Э_{ijk} - CR_i + X_i]\delta R_i dV +$$

$$+ \oiint [Y_i - \mu(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i})n_j -$$

$$-\lambda\frac{\partial R_n}{\partial x_m}n_i - \chi(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i})n_j + \qquad (3.7)$$

$$+ DR_k n_j Э_{kji} - B_{ij}R_j]\delta R_i dF$$

Уравнениями (3.7) определяется математическая постановка задачи, заключающаяся в формулировке системы разрешающих дифференциальных уравнений и граничных условий для исследуемой среды. Построенные модели сред с физическими параметрами, отличающимися по размерности на величину характерного размера, представляют интерес с точки зрения описания когезионных полей в окрестности сингулярных точек, теории тонких пленок и т.п.

Рассмотрим несколько более подробно граничные условия. В соответствии с (3.7) естественные граничные условия запишутся в виде $(D = 0)$:

$$Y_i = \sigma_{ij}n_j + AR_j n_j n_i + BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j)$$

Здесь n_i - координаты вектора нормали $\overline{n}$ к поверхности тела.

Введем нормальную и касательную составляющие поверхностных усилий. Получим в проекции на нормаль:

$$Y_i n_i = \sigma_{ij}n_j n_i + A(R_j n_j) \qquad (3.8)$$

В соответствии с определяющими уравнениями можно записать

$$\sigma_{ij}n_j = 2\mu\gamma_{ij}n_j + \lambda\theta n_i - 2\chi\omega_k Э_{ijk}n_j \qquad (3.9)$$

Учитывая (3.9), окончательно равенство (3.8) перепишем в виде

$$Y_i n_i = 2\mu\gamma_{ij}n_i n_j + \lambda\theta + A(R_i n_i) \qquad (3.10)$$

Проекция на плоскость, касательную к нормали, дает следующие составляющие:

$$Y_i(\delta_{ik} - n_i n_k) = \sigma_{ij}n_j(\delta_{ik} - n_i n_k) - BR_j(\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{ik} - n_i n_k)$$

Последним соотношениям можно также придать следующую форму

$$Y_i(\delta_{ik} - n_i n_k) = \mu\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) n_j(\delta_{ik} - n_i n_k) -$$
$$- \chi\left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i}\right) n_j(\delta_{ik} - n_i n_k) + BR_j(\delta_{ik} - n_j n_k) \qquad (3.11)$$

Следовательно, с постоянной модели A связаны поверхностные эффекты нормальные к поверхности (3.10), проявляющиеся при нагружении по нормали к поверхности. Постоянная B в (3.11) отвечает за поверхностные эффекты в касательной плоскости в исследуемой точке поверхности. Роль этих эффектов может оказаться существенной, например, при описании тонких пленок.

ГЛАВА 4
НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В данной главе анализируются некоторые частные модели механики сплошных сред. Поскольку в рамках данного исследования удается описать новые типы взаимодействий (взаимодействия близкодействия), не свойственные классической теории упругости, то появляется возможность анализа расширенного спектра свойств сплошной среды. Будет сделана попытка моделирования аномальных свойств тонких структур (пленок, сверхтонких волокон и т.п.), когезионных полей, поверхностных свойств в средах и некоторых родственных с ними явлений.

4.1. Модель несимметричной теории упругости

Как частный случай модели (2.2), рассмотрим модель несимметричной теории упругости с тремя модулями Ламе: μ, λ и κ. Она соответствует существованию внутри объема присущего материалу среды внутреннего винклеровского основания относительно упругих поворотов.

$$\iiint \{[(\mu+\kappa)\Delta R_i + (\mu+\lambda-\kappa)\frac{\partial R_j}{\partial x_i \partial x_j} + X_i]\delta R_i\} dV +$$
$$+ \oint\!\!\oint [Y_i - (\mu+\kappa)\frac{\partial R_i}{\partial x_j} n_j - \lambda \frac{\partial R_j}{\partial x_j} n_i - (\mu-\kappa)\frac{\partial R_j}{\partial x_i} n_j]\delta R_i dF = 0 \qquad (4.1)$$

В равенстве (4.1) модуль κ - коэффициент пропорциональности между разностью касательных напряжений и соответствующим упругим поворотом. Для примера возьмем случай двойной плоской деформации, когда вектор перемещений имеет только одну ненулевую компоненту, к примеру, U. Разрешающее уравнение имеет вид:

$$(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\mu+\kappa)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + X = 0. \qquad (4.2)$$

Граничные условия могут быть записываются следующим образом:

при $x = \pm a$: $\quad \dfrac{\partial U(a,y)}{\partial x} = \dfrac{Y_x(y)}{(2\mu+\lambda)}, \quad Y_x(y) = \sigma_0(y),$