

$$\begin{aligned}
 Y_i(\delta_{ik} - n_i n_k) &= \mu \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right) n_j (\delta_{ik} - n_i n_k) - \\
 &- \chi \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right) n_j (\delta_{ik} - n_i n_k) + B R_j (\delta_{ik} - n_i n_k)
 \end{aligned}
 \quad (3.11)$$

Следовательно, с постоянной модели A связаны поверхностные эффекты нормальные к поверхности (3.10), проявляющиеся при нагружении по нормали к поверхности. Постоянная B в (3.11) отвечает за поверхностные эффекты в касательной плоскости в исследуемой точке поверхности. Роль этих эффектов может оказаться существенной, например, при описании тонких пленок.

ГЛАВА 4

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В данной главе анализируются некоторые частные модели механики сплошных сред. Поскольку в рамках данного исследования удается описать новые типы взаимодействий (взаимодействия Визкодействия), не свойственные классической теории упругости, то появляется возможность анализа расширенного спектра свойств сплошной среды. Будет сделана попытка моделирования аномальных свойств тонких структур (пленок, сверхтонких волокон и т.п.), когезионных полей, поверхностных свойств в средах и некоторых родственных с ними явлений.

4.1. Модель несимметричной теории упругости

Как частный случай модели (2.2), рассмотрим модель несимметричной теории упругости с тремя модулями Ламе: μ , λ и κ . Она соответствует существованию внутри объема присущего материалу среды внутреннего винклеровского основания относительно упругих поворотов.

$$\begin{aligned}
 &\iiint_V \left\{ (\mu + \kappa) \Delta R_i + (\mu + \lambda - \kappa) \frac{\partial R_j}{\partial x_i \partial x_j} + X_i \right\} \delta R_i dV + \\
 &+ \iint_F \left\{ -(\mu + \kappa) \frac{\partial R_i}{\partial x_j} n_j - \lambda \frac{\partial R_j}{\partial x_i} n_i - (\mu - \kappa) \frac{\partial R_j}{\partial x_i} n_j \right\} \delta R_i dF = 0 \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

В равенстве (4.1) модуль κ - коэффициент пропорциональности между разностью касательных напряжений и соответствующим упругим поворотом. Для примера возьмем случай двойной плоской деформации, когда вектор перемещений имеет только одну ненулевую компоненту, к примеру, U . Разрешающее уравнение имеет вид:

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\mu + \kappa) \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + X = 0. \quad (4.2)$$

Граничные условия могут быть записываются следующим образом:

$$\text{при } x = \pm a: \quad \frac{\partial U(a, y)}{\partial x} = \frac{Y_x(y)}{(2\mu + \lambda)}, \quad Y_x(y) = \sigma_0(y),$$

$$\text{при } y = \pm b: \quad \frac{\partial U(x, b)}{\partial y} = \frac{Y_v(x)}{(\mu + \kappa)}, \quad Y_v(x) = \tau_0(x) \quad (4.3)$$

Модель (4.2), (4.3) часто используется в качестве одного из простых вариантов сдвиговых моделей теории стержней при исследовании краевых эффектов для нормальных и касательных напряжений в полосе при растяжении и изгибе. При этом формальная постановка задачи вполне соответствует соответствующей задаче, сформулированной на основе классической теории упругости. Результаты решений, естественно, отличаться будут, так как касательные напряжения связаны с производными от перемещений иначе, чем в классической теории (2.2); (4.1). Другими словами, продольная и поперечная сдвиговые жесткости в такой полосе будут различными.

4.2. Модель тонких пленок

Значительный интерес к исследованию деформации тонких и супертонких пленок вызван потребностью получения новых конструкционных материалов и покрытий, а также широким применением пленок в изделиях, связанных с развитием информационных технологий (полупроводниковых элементах больших интегральных схем), голографии и других отраслях. Известно, однако, что с точки зрения классической теории упругости невозможно описать некоторые аспекты поведения тонких пленок [1], [2], [4].

В данной главе модель тонких структур построена с использованием вариационного формализма (главы 2,3) и дает описание сред с поверхностными эффектами и внутренними взаимодействиями когезионного типа. Размерность дополнительных физических постоянных с точки зрения классической теории определяется величинами $\sim \mu/l^2$ и $\sim \mu/l$, где μ - модуль сдвига, l - некоторый характерный параметр размерности длины. Будем считать, что физическая модель поведения тонких структур определяется базовой моделью (2.2). В дальнейшем предполагается, что усилия, аналогичные усилиям в винклеровских пружинках с жесткостью равной величине C (новая упругая постоянная) моделируют внутренние взаимодействия когезионных полей. В дальнейшем, для модели тонких пленок полагаем, что $D = 0$.

Построим вариант теории тонких пленок. Для простоты, рассмотрим пример деформирования свободных пленок в рамках плоской задачи. Закрепленные пленки, контактирующие с поверхностью какого-либо тела, здесь рассматриваться не будут. Положим, $x_1 = x$ и, соответственно, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = 0$. Координаты x и y отнесем, соответственно, к полудлине пленки $-l$ и к половине ее толщины $-h$. Имея в виду соотношения (4.2), запишем следующую систему уравнений.

$$\begin{aligned} (2\mu + \lambda)u_{,xx} + l^2(\mu + \chi)u_{,yy} + \\ + l(\mu + \lambda - \chi)v_{,xy} - \bar{C}u + X = 0 \\ l^2(2\mu + \lambda)v_{,yy} + (\mu + \chi)v_{,xx} + \\ + l(\mu + \lambda - \chi)u_{,xy} - \bar{C}v + Y = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

здесь $\bar{C} = Cl^2$, $l = 1/h$

Учитывая общий вид граничных условий (3.10), (3.11), запишем соответствующие граничные условия плоской задачи на поверхностях $y = \pm l$

$$Y_n = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} \bar{l} + Av \quad (4.5)$$

$$Y_s = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \bar{l} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \chi \left(\frac{\partial u}{\partial y} \bar{l} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \bar{B}u, \quad (4.6)$$

где $\bar{A} = Al$, $\bar{B} = Bl$

Считаем, что граничные условия в усилиях на торцевой поверхности $x = const$ в силу предположения о малой толщине могут быть записаны интегральной форме. Граничные условия (4.5)-(4.6) представляют наибольший интерес с точки зрения свободных, тонких пленок. Уравнениями (4.4)-(4.6) дается математическая модель тонких пленок с несимметричным тензором напряжений, в предположении о существовании поверхностных эффектов. Полагая $\chi = 0$, получим вариант теории с симметричным тензором напряжений.

В качестве примера рассмотрим задачу о растяжении пленки растягивающими усилиями, приложенными на торцах $x = \pm l$. Покажем на простом примере, что предложенный вариант модели дает

возможность описания тонких объектов, позволяя выявить нетривиальные, с точки зрения классической теории упругости, особенности их деформирования. В дальнейшем при построении решения будем использовать некоторые упрощения, позволяющие найти аналитические выражения, удобные для анализа. Будем в первом приближении полагать, что перемещение w медленно изменяется в отношении координаты y $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$. Тогда первое уравнение системы (4.4) приводится к уравнению Гельмгольца относительно перемещения $u(x, y)$:

$$u_{,xx} + m^2 u_{,yy} - \bar{C}u = 0, \quad (4.7)$$

где $m^2 = l^2 (\mu + \chi) / (2\mu + \lambda)$, $\bar{C} = \bar{C} / (2\mu + \lambda)$

Приближенное решение задачи можно найти как решение уравнения (4.7), удовлетворяющее граничному условию (4.6):

$$Y_s = (\mu + \chi) \frac{\partial u}{\partial y} + \bar{B}u = 0 \quad (4.8)$$

Второе уравнение системы (4.4) и граничное условие (4.5) может быть использовано для уточнения решения первого приближения или при построении точного решения задачи (4.4)-(4.6). Решение уравнения (4.7) естественно искать методом разделения переменных:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (4.9)$$

Полагая, что в силу симметрии задачи $Y(y) = \cos ry$ и используя граничное условие (4.8), получим следующее характеристическое уравнение для определения собственных чисел

$$igr = \frac{B}{(\mu + \chi)r} \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) имеет счетное множество корней (собственных чисел задачи) - r_k . Им соответствуют собственные функции $Y_k(y) = \cos r_k y$. Функции $X(x)$ в представлении (4.9) имеют вид:

$$X_k(x) = d_k s_k sh(s_k x) \quad (4.11)$$

где $s_k^2 = \bar{C} + r_k^2 m^2$.

Постоянные d_k находятся в явной форме из граничных условий $\sigma_x(y) = P/F$ при $x = \pm 1$, учитывая ортогональность собственных функций $Y_k(y)$ (P - приложенное к пленке растягивающее усилие, F - площадь сечения пленки при $x = \pm 1$). Для приближенного анализа поведения решения ограничимся первым членом в разложении решения в ряд по собственным функциям. Имеем:

$$u \approx 4 \frac{P}{EF} \frac{sh(s_1 x) \sin r_1}{s_1 (2r_1 + \sin 2r_1) chs_1} \quad (4.12)$$

Решение для растягиваемого стержня, полученное в рамках классической теории упругости, очевидно, следует непосредственно из (4.12), если в нем перейти к пределу при $r_1 \rightarrow 0$, ($s_1 \approx r_1$). Здесь важно отметить следующее обстоятельство. В зависимости от поверхностного натяжения, определяемого постоянной B , в правой части уравнения (4.10), собственное число r_1 может изменяться в диапазоне $0m < 0 < \partial 0 < \pi/2$. Собственное число r_1 может быть малым, оставаясь отличным от нуля, если только коэффициент B не равен нулю. Возникает ситуация, когда величина s_1 может быть весьма значительной, в то время как r_1 мало (хотя и не равно нулю). Это связано с тем, что величина \bar{C} , характеризующая, по нашему предположению, взаимодействия когезионных связей может быть значительной. В результате, как не трудно убедиться, существуют такие значения параметров B и \bar{C} , что перемещение, найденное в рамках предложенного варианта теории, может быть на порядок меньше чем перемещение, полученное по классической теории упругости. На рисунке 4.1 приведены кривые, показывающие изменение по продольной координате отношения

$U = u/u_{cl}$, $u_{cl} = \frac{P}{EF} x$, ($E = 1$) в зависимости от параметра \bar{C} и

величины r_1 , с которой связана физическая постоянная B , отвечающая за поверхностное натяжение.

Принято, что $r_1^2 = 0.01$, а три кривые отвечают трем различным значениям параметра \bar{C} : $1 - \bar{C} = 10$; $2 - \bar{C} = 14$; $3 - \bar{C} = 18$.

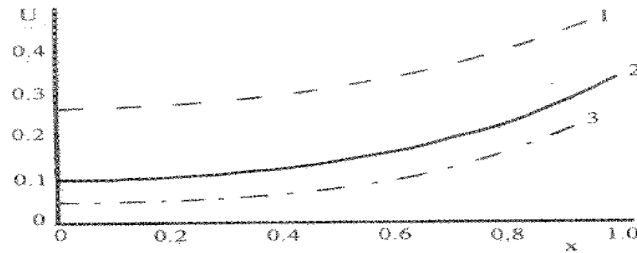


Рис 4.1 Распределение перемещений свободной тонкой пленки при растяжении в зависимости от параметров модели

В результате удается описать известное явление о реализации в тонких пленках жесткостей, близких к теоретическим (явление супермодуля), и показывается, что в рамках предложенной модели удается описать некоторые необычные проявления деформирования тонких пленок.

4.3. Модель когезионных взаимодействий

Когезионное поле, определяющее особый вид взаимодействий, связываемых с силами межатомных связей, может также моделироваться в рамках общей модели (2.2). Рассмотрим вариант частной модели с тремя модулями Ламе: μ , λ и C . Она соответствует существованию внутри объема присущего материалу среды внутреннего винклеровского основания относительно упругих перемещений.

$$\begin{aligned} & \iiint \left\{ \left[\mu \Delta R_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial R_j}{\partial x_i \partial x_j} - CR_i + X_i \right] \delta R_i \right\} dV + \\ & + \iint \left\{ \left[Y_i - \mu \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right) n_j - \lambda \frac{\partial R_j}{\partial x_j} n_i \right] \delta R_i \right\} dF = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Модуль C - коэффициент пропорциональности между вектором внутренних сил и упругим перемещением.

Постоянную C в уравнениях модели (4.13) предлагается связывать с описанием внутренних взаимодействий, аналогичных когезионным силам связи. Величина C имеет размерность $\frac{\mu}{l^2}$ и,

будучи, вероятно, весьма малой, может, однако, оказаться соизмеримой с другими константами модели в зоне действия внутренних связей. Поэтому предлагаемая модель с новой физической постоянной может давать результаты, отличные от результатов классической теории упругости. Существенное различие ожидается в зонах, для которых характерен эффект близкодействия (вершины трещины), или для тонких структур, характерный размер которых (толщина для пленок), соизмерим с длиной зоны изучаемых взаимодействий. Рассмотрим модельную задачу о трещине в рамках двойной плоской задачи. Следовательно, полагаем, что поле перемещений описывается с помощью только одной компоненты перемещений $u(x, y)$. Такая модель приемлема, например, для упругих тел, жесткость которых в направлении поперечной координаты y значительно превышает жесткости в других направлениях. Разрешающее уравнение здесь принимает следующий вид (4.13):

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Cu = 0 \quad (4.14)$$

Граничные условия запишем без учета поверхностных эффектов: на верхнем берегу трещины:

$$y \geq 0, \quad y \rightarrow 0, \quad x > 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}), \quad (4.15)$$

на нижнем берегу трещины:

$$y \leq 0, \quad y \rightarrow 0, \quad x > 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Сделаем ряд важных предварительных замечаний

В гл.5 будет обсуждаться объективная материальность модели когезионного поля и свойства решения этой модели. Приведем здесь без доказательства некоторые важные в дальнейшем особенности решений для модели когезионного поля ($C \neq 0$). Пусть внешние объемные и поверхностные нагрузки самоуравновешены.

$$P_i = \iiint [X_i dV + \oint Y_i dF] = 0$$

$$M_n = - \iiint [X_i(x_m - x_m^0) \partial_{nm}] dV - \oint Y_i(x_m - x_m^0) \partial_{nm}] dF = 0$$

Тогда имеет место следующее необходимое условие инвариантности

$$L(R, R) = L(\bar{R}, \bar{R}),$$

где
$$\bar{R}_i = R_i - \frac{1}{V} \iiint R_i dV$$

Таким образом, задача может быть сформулирована на вектор \bar{R}_i . Этот вектор удовлетворяет следующими свойствами самоуравновешенности

$$\iiint \bar{R}_i dV = 0, \quad \iiint \bar{R}_i(x_j - \frac{S_j}{V}) \partial_{jk} dV = 0$$

Напомним определение когезионных сил: $\sigma_i = \frac{\partial L}{\partial R_i} = \frac{\partial L}{\partial \bar{R}_i} = C \bar{R}_i$.

Тогда, очевидно, имеют место следующие свойства самоуравновешенности когезионных сил:

$$\iiint \sigma_i dV = 0, \quad \iiint \sigma_i(x_j - \frac{S_j}{V}) \partial_{jk} dV = 0$$

Наконец, отметим наиболее важное далее свойство ортогональности классического решения и решения модели когезионного поля. Может быть установлено (см. гл. 5), что если имеют место однородные статические граничные условия, то выполняется соотношение ортогональности:

$$C \iiint R_\alpha^k \bar{R}_\alpha dV = 0$$

Здесь, R_α^k вектор перемещения (решение), найденный по классической теории упругости.

Вернемся к рассматриваемой однородной задаче. Вариационная формулировка этой задачи может быть представлена в виде

$$\delta L = \int \left[(\mu + \chi) \nabla^2 u + (\mu + \lambda - \chi) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Cu \right] \delta u dV = 0$$

В соответствии с изложенным, учтем ортогональность решения когезионного поля с классическим решением, вводя в записанный функционал соответствующее изопериметрическое условие. Имеем

$$\delta L = \int \left[(\mu + \chi) \nabla^2 u + (\mu + \lambda - \chi) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Cu \right] \delta u dV + C^* \delta \int u u_k dV = 0$$

Здесь C^* - некоторая произвольная константа; $u_k(x, y)$ классическое решение - в данном случае решение соответствующего гармонического уравнения (см. (4.14))

Учитывая, что $u_k(x, y)$ является по построению решением однородного гармонического уравнения с граничными условиями (4.15), можем переписать вариационную формулировку в следующем виде:

$$\delta L = \int \left[(\mu + \chi) \nabla^2 (u - C^* u_k) + (\mu + \lambda - \chi) \frac{\partial^2 (u - C^* u_k)}{\partial x^2} - C(u - C^* u_k) \right] \delta u dV = 0$$

Таким образом, для модели когезионного поля решение однородной краевой задачи в напряжениях инвариантно относительно решения соответствующей задачи в классической постановке. Поэтому решение для когезионного поля в общем случае может быть сформулировано в форме соответствующей линейной комбинации. В рассматриваемом случае, надо иметь в виду, что задача (4.14), (4.15) сформулирована для произвольной линейной комбинации классического решения (решение гармонической задачи) и решения уравнения Гельмгольца

$$U(r, \varphi) = u(r, \varphi) + C^* u_k(r, \varphi)$$

где $u(r, \varphi)$ - решение уравнения Гельмгольца ($C \neq 0$), а $u_k(r, \varphi)$ - решение соответствующего гармонического уравнения ($C = 0$).

Решение гармонического уравнения, удовлетворяющее граничным условиям (4.15) и условию затухания производных (напряжений) на бесконечности, имеет вид

$$u_k(r, \varphi) = u_k^0 r^\alpha \cos(\alpha\varphi), \quad (4.16)$$

где $\alpha = 1/2$

Решение определяется с точностью до неизвестной амплитуды $-u_k^0$. Убывающее на бесконечности решение задачи (4.15), (4.16), записанное для касательного напряжения $\tau = \mu \partial u / \partial y$, имеет соответственно вид:

$$\tau = \mu G_r K_\alpha \left(r \sqrt{\frac{C}{\mu + \chi}} \right) \sin(\alpha\varphi)$$

Здесь K_α - функция Макдональда с показателем α ($\alpha = 1/2$), G_r - неизвестная амплитуда.

При $r \rightarrow 0$ правая часть последнего выражения имеет с точностью до амплитуды такое же изменение что и соответствующее выражение для τ , найденное с помощью формулы (4.16). Комбинируя полученные решения, можно найти такое выражение, для которого отсутствует сингулярность при $r \rightarrow 0$. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = G_r \left[\sqrt{\frac{2(\mu + \chi)}{\pi C}} K_\alpha \left(r \sqrt{\frac{C}{\mu + \chi}} \right) - r^\alpha \right] \sin(\alpha\varphi), \quad (4.17)$$

где $\alpha = 1/2$, $r = \sqrt{\frac{(\mu + \chi)}{(2\mu + \lambda)} x^2 + y^2}$

При $r \rightarrow \infty$ решение (4.17), ведет себя как классическое решение, ибо функция Макдональда убывает как экспоненциальная функция. Считаем, что полученное решение описывает межатомные взаимодействия [9], [10], а параметр C связан с размером зоны взаимодействия.

Рисунок 4.2. показывает качественное распределение деформаций в вершине трещины в зависимости от параметра модели C .

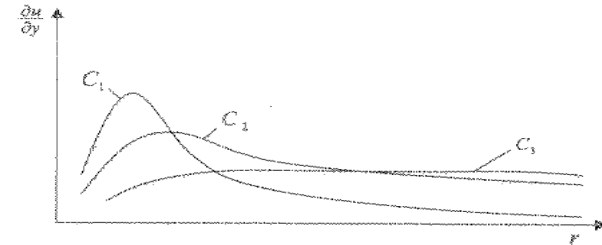


Рис. 4.2. Распределение деформаций в вершине разреза для различных значений параметра C ($C_1 < C_2 < C_3$)

4.4. Об оценке области межатомных взаимодействий

Покажем, что постоянная связана с размером области межатомных взаимодействий [17], [18]. Рассмотрим снова модель среды когезионного поля в рамках дважды плоской задачи $E_y \rightarrow \infty$, $w(x, y) \rightarrow 0$. Попытаемся оценить длину зоны когезионных взаимодействий. Считается, что ограниченность напряжений в вершине разреза определяется именно взаимодействиями этого вида, а длина зоны действия этих сил характеризуется величиной r_0 , при которой достигается максимум у кривых деформаций (рис. 4.2).

Чтобы получить уравнение, определяющее величину r_0 , вычислим первую производную по переменной r от выражения в правой части равенства (4.17) и приравняем полученное соотношение нулю. Найдем

$$1 + 2ar_0 = \exp(ar_0), \quad (4.18)$$

где $a = \sqrt{\frac{C}{\mu + \chi}}$

Нетрудно видеть, что в области положительных действительных чисел уравнение (4.18) имеет единственное решение, значение которого зависит от параметра a , т.е. от величины постоянной модели C . Будем далее полагать, что r_0 совпадает с

величиной раскрытия берегов трещины η в окрестности кончика трещины [18].

$$\eta = 2\gamma / \sigma_c.$$

Здесь σ_c - предел прочности на разрыв

Подставляя величину η вместо r_0 в уравнение (4.18), получим следующее соотношение для определения постоянной модели C

$$1 + 2a\eta = \exp(a\eta), \quad a = \sqrt{\frac{C}{(\mu + \lambda)}}$$

4.5. Модель адгезионных взаимодействий

Рассмотрим модель адгезионных взаимодействий для твердых тел. Она определяется физическими постоянными A и B в определяющих соотношениях (2.2) и соответствует существованию на поверхности тела внутреннего анизотропного винклеровского основания относительно упругих перемещений. Таким образом, модель адгезионных взаимодействий можно представить следующим вариационным уравнением:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[\mu \Delta R_i + (\mu + \lambda) \frac{\partial R_j}{\partial x_i \partial x_j} + X_j \delta R_j \right] dV + \\ & + \iint_F \left[Y_i - \mu \left(\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + \frac{\partial R_j}{\partial x_i} \right) n_j - \lambda \frac{\partial R_j}{\partial x_i} n_i - A_j R_j \right] \delta R_i dF = 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $A_j = An_i n_j + B(\delta_{ij} - n_i n_j)$.

Ранее в разд. 4.2. было установлено, что в рамках предложенной модели успешно моделируется эффект сверхупругости, проявляющийся в сверхтонких структурах. Для этого оказалось необходимым использовать модель с новыми модулями C и B . Постоянная B при этом определяет интенсивность взаимодействий в поверхностном слое, соответствующих тангенциальным смещениям. Влияние постоянных C и B , вероятно, может быть весьма существенным в тонких однородных и слоистых пленках. Модуль A - коэффициент пропорциональности между нормальными проекциями

векторов внутренних сил и упругого перемещения. Покажем, что природа модуля A отличается от природы поверхностного натяжения. Пусть $C=0$ и $B=0$. Обозначим за $p=\lambda\theta$ давление в жидкости. Рассмотрим свободную поверхность жидкости. Граничное условие на свободной поверхности ($x=x_0$) запишется в виде:

$$\sigma(x_0, y, z) = \mu \frac{\partial R_i}{\partial x_j} n_i n_j + AR_k n_k + p = 0 \quad (4.20)$$

Учтем предварительно, что имеет место соотношение:

$$\iint \frac{\partial R_i}{\partial x_j} n_i n_j dF = - \iint \frac{\partial R_i}{\partial x_j} (\delta_{ij} - n_i n_j) dF = -\Delta F. \quad (4.21)$$

Здесь ΔF - относительное изменение площади свободной от напряжений поверхности жидкости.

Учитывая также, что для объема V холма жидкости, ограниченного плоскостью $x=x_0$ и поверхностью $x=R_k n_k$ можно считать справедливым следующее равенство:

$$\iint R_k n_k dF = V = hF, \quad (4.22)$$

где h - высота цилиндра, имеющего тот же объем V и ту же площадь основания F .

Проинтегрируем теперь соотношение (4.20), по площади свободной поверхности, имея в виду равенства (4.21), (4.22). Получим:

$$0 = -\mu \Delta F + pF + AhF$$

Отсюда найдем

$$p = \mu \frac{\Delta F}{F} - Ah \quad (4.23)$$

Пусть $\mu=0$, что будет соответствовать модели идеальной жидкости. Из уравнения (4.23) следует, что для невязкой жидкости ($\mu=0$) в рамках классической теории ($A=0$) уравновесить гидростатическое давление невозможно. Равновесие представляется возможным осуществить лишь за счет винклеровской реакции на поверхности тела, определяемой постоянной A .

Таким образом, из уравнения (4.23) следует, что природа взаимодействия, связанного с A , отлична от природы поверхностного натяжения в классическом смысле. Действительно, обычно

поверхностное натяжение принято связывать с изменением свободной от напряжений поверхности, т.е. со слагаемым $\mu \frac{\Delta F}{F}$. В связи с этим предлагается трактовать взаимодействия, связанные с модулем A как адгезионные взаимодействия.

Наконец, соотношение (4.23) позволяет предложить формулу для определения постоянной A из эксперимента. Выберем параметр P в качестве управляющего параметра. Тогда из (4.23) найдем

$$A = \mu \frac{\frac{dF}{dP}}{\frac{dP}{dP}} - \frac{F}{dP}$$

4.6. Модель сдвигового поля

Как частный случай модели (2.2), рассмотрим модель чистого сдвига, когда $\kappa \rightarrow \lambda \rightarrow \infty$ и построим краевую задачу для соответствующего кинематического состояния. Тогда обозначая $\frac{(2\mu+\lambda)}{C}\theta = \Phi$ и $\frac{(\mu+\kappa)}{C}2\omega_\alpha = \Psi_\alpha$, получим: $\theta = 0$, $\omega_k = 0$. Из общего представления решения

$$R_i = \frac{(2\mu+\lambda)}{C} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{(\mu+\kappa)}{C} \frac{\partial 2\omega_\alpha}{\partial x_\beta} \mathcal{E}_{\alpha\beta} + \frac{X_i}{C} = \\ = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\beta} \mathcal{E}_{\alpha\beta} + \frac{X_i}{C}$$

следует, что Φ и Ψ_k - гармонические функции:

$$\Delta \Phi + \frac{1}{C} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\Delta \Psi_k + \frac{1}{C} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \mathcal{E}_{jk} = 0$$

Таким образом, модель чистого сдвига описывается гармоническим вектором перемещений. Само по себе выделение

кинематического состояния чистого сдвига интересно с точки зрения моделирования динамического и статического трения, "схватывания" и связанных с ними задач [2].

4.7. Модели линейного и углового формоизменения

В соответствии с общей процедурой принципа возможных перемещений, использование кинематических связей вида (1.51), (1.52) позволяет установить новый список аргументов функционала Лагранжа:

$$\delta U = - \iiint [\sigma_{ij} \delta (\frac{\partial R_i}{\partial x_j} - a_k A_{ijk} - d_k D_{ijk} - \frac{1}{3} \theta \delta_{ij} + \omega_k \mathcal{E}_{ijk}) dV \\ = \iiint [(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}) \delta R_i + (\sigma_{ij} A_{ijk}) \delta a_k + (\sigma_{ij} D_{ijk}) \delta d_k + \\ + (\frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}) \delta \theta + (-\sigma_{ij} \mathcal{E}_{ijk}) \delta \omega_k] dV - \iint (\sigma_{ij} n_j) \delta R_i dF$$

Отметим, что формально тождественная замена тензора дивергатора его разложением по двум векторам ведет к расширению аргументов лагранжиана и как следствие - к расширению списка квадратичных инвариантов. Соответственно, полагая интегрируемость потенциальной энергии деформации, нетрудно установить, что потенциальная энергия представляется в виде:

$$U = \iiint W_V(a_k, b_k, \theta, \omega_k, R_k) dV + \iint W_F(R_k) dF \quad (4.24)$$

В результате, учитывая (4.24) для линейно упругой среды будем иметь

$$W_V = \frac{1}{2} \mu_1 a_i a_i + \frac{1}{2} \mu_3 d_i d_i + 2\chi \omega_k \omega_k + \\ + \frac{1}{2} C R_k R_k + \frac{1}{6} (2\mu + 3\lambda) \theta^2 + \\ + \mu_2 a_i d_i + C_1 a_i \omega_i + C_2 a_i R_i + \\ + C_3 d_i \omega_i + C_4 d_i R_i + 2D \omega_k R_k \quad (4.25)$$

Расширение списка квадратичных инвариантов привело к расширению спектра упругих свойств изотропной среды и дает основание к обобщению понятия изотропной сплошной среды. Теперь нетрудно определить и внутренние силовые факторы, установив общую

форму определяющих уравнений, отвечающих выражению для удельной потенциальной энергии (4.25). Положим в целях упрощений, что в функционале Лагранжа отсутствуют слагаемые (инварианты), не соответствующие классической теории упругости, т.е.

$$\mu_2 = C = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = \chi = 0$$

Тогда система определяющих уравнений может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} A_{ijk} &= \mu_1 a_k + \mu_2 d_k & \sigma_{ij} D_{ijk} &= \mu_2 a_k + \mu_3 d_k, \\ \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} &= \left(\frac{2}{3} \mu_3 + \lambda\right) \theta \end{aligned} \quad (4.26)$$

Таким образом, введение новой формы представления тензора девиатора деформаций в виде разложения на два вектора и использование общей вариационной процедуры построения моделей, позволило сделать вывод о том, что даже изотропная упругая сплошная среда обладает гораздо большим разнообразием упругих свойств, чем это представлялось до сих пор. Более того, описание такой обобщенно-изотропной среды дается сформулированным лагранжианом с объемной плотностью потенциальной энергии W_V (4.25) и поверхностной плотностью потенциальной энергии W_P . Упругие свойства материала, связанные с линейным формоизменением и угловым формоизменением могут быть различным. Также модель допускает взаимное возмущение указанных выше кинематических состояний, что обусловлено наличием модуля упругости μ_2 в соотношениях (4.26).

4.8. Модель обобщенной среды Коссера

Предположим, что соотношения Папковича не выполняются, т.е. являются неоднородными (1.39). Эту неоднородность, как и ранее, будем определять тензором Ξ_{ij} . Следуя общей процедуре, построим возможную работу внутренних сил:

$$\bar{\delta}U = \iiint m_{ij} \delta \left[\frac{\partial}{\partial x_m} (\gamma_{in} + \frac{1}{3} \theta \delta_{in}) \partial_{nmj} - \frac{\partial \omega_k}{\partial x_m} \partial_{ink} \partial_{nmj} - \Xi_{ij} \right] dV$$

Проведем интегрирование по частям соответствующих производных и записанном выражении. Получим:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}U &= \iiint \left[-\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m} \partial_{nmj} \delta \gamma_{in} - \frac{1}{3} \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m} \partial_{imj} \delta \theta + \right. \\ &+ \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m} (\delta_{km} \delta_{ij} - \delta_{kj} \delta_{im}) \delta \omega_k - m_{ij} \delta \Xi_{ij} \left. \right] dV + \\ &+ \iint \left[m_{ij} n_m \partial_{nmj} \delta \gamma_{in} + \frac{1}{3} m_{ij} n_m \partial_{imj} \delta \theta - \right. \\ &\left. - m_{ij} n_m (\delta_{km} \delta_{ij} - \delta_{kj} \delta_{im}) \delta \omega_k \right] dF \end{aligned} \quad (4.27)$$

Представим тензор несоответствий в виде разложения на девиатор, шаровой и антисимметричный тензоры:

$$\begin{aligned} \Xi_{ij} &= \xi_{ij} + \frac{1}{3} \xi \delta_{ij} - \xi_k \partial_{ijk} \\ \xi_{ij} &= \frac{1}{2} (\Xi_{ij} + \Xi_{ji}) - \frac{1}{3} \Xi_{pp} \delta_{ij} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{im}}{\partial x_m} \partial_{nmj} + \frac{\partial \gamma_{jm}}{\partial x_m} \partial_{nmi} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ \xi &= \Xi_{ij} \delta_{ij} = -2 \frac{\partial \omega_k}{\partial x_k} \\ \xi_k &= -\frac{1}{2} \Xi_{ij} \partial_{ijk} = -\frac{\partial \gamma_{kj}}{\partial x_i} + \frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_n}{\partial x_m} \partial_{nmk} \end{aligned} \quad (4.28)$$

С учетом (4.28) равенство (4.27) после некоторых преобразований переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}U &= \iiint \left[-\frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m} \partial_{nmj} \delta \gamma_{in} - \frac{1}{3} \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m} \partial_{imj} \delta \theta + \right. \\ &+ \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m} (\delta_{km} \delta_{ij} - \delta_{kj} \delta_{im}) \delta \omega_k - \\ &\left. - \left(\frac{1}{2} m_{ij} + \frac{1}{2} m_{ji} - \frac{1}{3} m_{ip} \delta_{ij} \right) \delta \xi_{ij} - \frac{1}{3} m_{ip} \delta \xi + m_{ij} \partial_{ijk} \delta \xi_k \right] dV + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iiint \{ m_{ij} n_m \mathcal{E}_{nmj} \delta \gamma_{qp} (\delta_{iq} - n_i n_q) (\delta_{np} - n_n n_p) + \\
& + m_{ij} n_i n_m \mathcal{E}_{nmj} \delta \gamma_{qp} n_q (\delta_{np} - n_n n_p) + m_{ik} n_i \delta \omega_q (\delta_{kq} - n_k n_q) - \\
& - \frac{1}{3} m_{ij} n_m \mathcal{E}_{imj} \delta \theta - (m_{pp} - m_{ik} n_i n_k) \delta \omega_q n_q \} dF = 0
\end{aligned}$$

Полученная вариационная форма позволяет определить списки аргументов объемной и поверхностной плотностей потенциальной энергии.

Введем следующие обозначения, выделяющие кинематические факторы, в направлении, ортогональном к поверхности тела.

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_{qp} &= \gamma_{qp} (\delta_{iq} - n_i n_q) (\delta_{np} - n_n n_p) \\
\gamma_n &= \gamma_{qp} n_q (\delta_{np} - n_n n_p) \\
\bar{\omega}_k &= \omega_q (\delta_{kq} - n_k n_q) \\
\omega &= \omega_q n_q
\end{aligned}$$

Тогда можно записать следующие разложения:

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \omega_q (\delta_{kq} - n_k n_q) + (\omega_q n_q) n_k = \bar{\omega}_k + \omega n_k \\
\gamma_{in} &= \gamma_{qp} (\delta_{iq} - n_i n_q) (\delta_{np} - n_n n_p) + \\
& + 2\gamma_{qm} n_q (\delta_{np} - n_n n_p) n_i + (\gamma_{qp} n_q n_p) n_i n_n \\
\gamma_{ij} &= \bar{\gamma}_{ij} + \gamma_j n_i + \gamma_i n_j + \gamma_n n_i n_j
\end{aligned}$$

В результате, предполагая интегрируемость вариационной линейной формы (существование потенциальной энергии), можем записать

$$\begin{aligned}
U_V &= U_V(\gamma_{in}; \xi_{in}; \omega_k; \xi_k; \theta; \xi) \\
U_F &= U_F(\bar{\gamma}_{qp}; \gamma_n; \bar{\omega}_k; \omega; \theta)
\end{aligned}$$

Предполагая физическую линейность формулируемой модели (т.е. квадратичность лагранжиана), представим лагранжиан рассматриваемой модели в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta A - \frac{1}{2} \iiint [C_{\gamma\gamma}^{\Xi} \gamma_{ij} \gamma_{ij} + 2C_{\gamma\xi}^{\Xi} \gamma_{ij} \xi_{ij} + C_{\xi\xi}^{\Xi} \xi_{ij} \xi_{ij} + \\
& + C_{\omega\omega}^{\Xi} \omega_k \omega_k + 2C_{\omega\xi}^{\Xi} \omega_k \xi_k + \bar{C}_{\xi\xi}^{\Xi} \xi_k \xi_k +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_{\theta\theta}^{\Xi} \theta \theta + 2C_{\theta\xi}^{\Xi} \theta \xi + \bar{C}_{\xi\xi}^{\Xi} \xi \xi] dV + \\
& - \frac{1}{2} \iint \{ M \bar{\gamma}_{ij} \bar{\gamma}_{ij} + \\
& + B_{\omega\omega}^{\Xi} \omega_k \omega_k + 2B_{\omega\gamma}^{\Xi} \omega_k \bar{\gamma}_k + B_{\gamma\gamma}^{\Xi} \bar{\gamma}_k \bar{\gamma}_k + \\
& + A_{\omega\theta}^{\Xi} \omega \theta + 2A_{\omega\xi}^{\Xi} \omega \xi + A_{\theta\theta}^{\Xi} \theta \theta \} dF = 0
\end{aligned}$$

Парцируя, перепишем последнее выражение следующим образом:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta A - \iiint \{ (C_{\gamma\gamma}^{\Xi} \gamma_{ij} + C_{\gamma\xi}^{\Xi} \xi_{ij}) \delta \gamma_{ij} + \\
& + (C_{\omega\omega}^{\Xi} \omega_k + C_{\omega\xi}^{\Xi} \xi_k) \delta \omega_k + (C_{\theta\theta}^{\Xi} \theta + C_{\theta\xi}^{\Xi} \xi) \delta \theta + \\
& + \{ C_{\gamma\xi}^{\Xi} \gamma_{ij} + C_{\xi\xi}^{\Xi} \xi_{ij} - \frac{1}{2} (C_{\omega\xi}^{\Xi} \omega_k + \bar{C}_{\xi\xi}^{\Xi} \xi_k) \mathcal{E}_{ijk} + \\
& + (C_{\theta\xi}^{\Xi} \theta + \bar{C}_{\xi\xi}^{\Xi} \xi) \delta_{ij} \} \delta \Xi_{ij} \} dV - \\
& - \iint \{ M \bar{\gamma}_{ij} \delta \bar{\gamma}_{ij} + \\
& + (B_{\omega\omega}^{\Xi} \omega_k + B_{\omega\gamma}^{\Xi} \bar{\gamma}_k) \delta \omega_k + (B_{\omega\gamma}^{\Xi} \omega_k + B_{\gamma\gamma}^{\Xi} \bar{\gamma}_k) \delta \bar{\gamma}_k + \\
& + (A_{\omega\theta}^{\Xi} \omega + A_{\omega\xi}^{\Xi} \theta) \delta \omega + (A_{\omega\theta}^{\Xi} \omega + A_{\theta\theta}^{\Xi} \theta) \delta \theta \} dF = 0
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Выражение (4.29) позволяет определить тензор внутренних моментов m_{ij} в среде, совершающих работу на тензорах несовместности Ξ_{ij}

$$\begin{aligned}
m_{ij} &= [C_{\gamma\xi}^{\Xi} \gamma_{ij} + C_{\xi\xi}^{\Xi} \xi_{ij} - \\
& - \frac{1}{2} (C_{\omega\xi}^{\Xi} \omega_k + \bar{C}_{\xi\xi}^{\Xi} \xi_k) \mathcal{E}_{ijk} + (C_{\theta\xi}^{\Xi} \theta + \bar{C}_{\xi\xi}^{\Xi} \xi) \delta_{ij}]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Получим, наконец, разрешающие уравнения, записанные относительно m_{ij} . Для этого воспользуемся определяющими соотношениями (4.30) и неоднородными соотношениями Папковича, чтобы выразить вариацию величины Ξ_{ij} через вариации основных кинематических переменных γ_{ij} , ω_i , θ . После ряда преобразований, в результате получим следующую систему уравнений и естественных граничных условий для обобщенной модели Коссера.

$$\begin{aligned}
\delta L = \delta A - \iiint [& (C_{\gamma\gamma}^{\Xi} \gamma_{ij} + C_{\gamma\xi}^{\Xi} \xi_{ij} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{in}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{jmn} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{jm}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{imn} + \frac{1}{3} \frac{\partial m_{kn}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{kmn} \delta_{ij}) \delta \gamma_{ij} + \\
& + (C_{\omega\omega}^{\Xi} \omega_k + C_{\omega\xi}^{\Xi} \xi_k + \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{ink} \mathcal{E}_{nmj}) \delta \omega_k + \\
& + (C_{\theta\theta}^{\Xi} \theta + C_{\theta\xi}^{\Xi} \xi - \frac{\partial m_{kn}}{\partial x_m} \mathcal{E}_{kmn}) \delta \theta] dV - \\
& - \iint \{ (M \bar{\gamma}_{ij} + \frac{1}{2} m_{in} n_m \mathcal{E}_{jmn} + \frac{1}{2} m_{in} n_m \mathcal{E}_{jmn}) \delta \bar{\gamma}_{ij} + \\
& + (B_{\omega\omega}^{\Xi} \omega_k + B_{\omega\gamma}^{\Xi} \bar{\gamma}_k - m_{ij} n_m \mathcal{E}_{ink} \mathcal{E}_{nmj}) \delta \omega_k + \\
& + (B_{\omega\gamma}^{\Xi} \omega_k + B_{\gamma\gamma}^{\Xi} \bar{\gamma}_k + \frac{1}{2} m_{in} n_m n_i \mathcal{E}_{kmn} + \frac{1}{2} m_{in} n_m n_i \mathcal{E}_{kmn}) \delta \bar{\gamma}_k + \\
& + (A_{\omega\omega}^{\Xi} \omega + A_{\omega\theta}^{\Xi} \theta - m_{ij} n_m n_k \mathcal{E}_{ink} \mathcal{E}_{nmj}) \delta \omega + \\
& + (A_{\omega\theta}^{\Xi} \omega + A_{\theta\theta}^{\Xi} \theta + m_{kn} n_m \mathcal{E}_{kmn}) \delta \theta \} dF = 0
\end{aligned}$$

4.9. Модель кавитации

В качестве одного частного случая общей модели сред Коссера рассмотрим модель кавитации. Итак, полагаем, что тензор несовместности Ξ_{ij} порожден только градиентами изменения объема, распределенными непрерывно в исследуемой среде. Тогда следует принять

$$\Xi_{ij} = -\frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} \quad (4.31)$$

В соответствии с общей процедурой, вариация функционала Лагранжа запишется в виде

$$\delta L = \delta A - \iiint m_{ij} \delta \left[\left(\frac{1}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} + \Xi_{ij} \right) \right] dV$$

Учитывая (4.31), получим после интегрирования по частям

$$\begin{aligned}
\delta L = \delta A - \iiint (m_{ij} \delta \Xi_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ijk} \delta \theta) dV \\
- \delta \frac{1}{3} \iint m_{ij} n_k \mathcal{E}_{ijk} \delta \theta dF
\end{aligned}$$

Записанный функционал позволяет установить список аргументов функционала θ, Ξ_{ij} . Следовательно, в рамках линейной теории можно записать

$$\begin{aligned}
\delta L = \delta A - \delta \frac{1}{2} \iiint (C_{\Xi\Xi} \Xi_{ij} \Xi_{ij} + C_{\theta\theta} \theta^2) dV - \\
- \delta \frac{1}{3} \iint B \theta^2 dF \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Последнее равенство позволяет получить определяющее соотношение для соответствующих внутренних моментов m_{ij} и позволяет построить разрешающее уравнение исследуемой среды, записанное относительно объемной деформации θ и естественные граничные условия. Действительно, воспользуемся формулой (4.31) и после интегрирования по частям получим из (4.32) следующее вариационное уравнение

$$\begin{aligned}
\delta L = \delta A - \iiint \left(-\frac{4}{9} C_{\Xi\Xi} \Delta \theta + C_{\theta\theta} \theta \right) \delta \theta dV - \\
- \delta \iint \left(\frac{4}{9} C_{\Xi\Xi} \dot{\theta} + B \theta \right) \delta \theta dF
\end{aligned}$$

Замечание. Приведенные в последних двух разделах модели сред с непрерывно распределенным полем дефектов даются без их связи с общей постановкой для неповрежденной среды. Такие задачи будем называть свободными краевыми задачами (моделями) для поврежденной среды, например, свободная модель кавитации (Разд. 4.9). В общем случае следует рассматривать связанные модели сред. Не трудно убедиться, что с точки зрения общего вариационного подхода разлагаемого в данной работе общая связанная постановка задачи полностью определяется общей квадратичной формой (для линейной задачи) для плотности потенциальной энергии в лагранжиане. При этом

предполагается, что список аргументов для объемной и поверхностной плотностей потенциальной энергии известен и определяется как совокупность списков аргументов для моделей среды без дефектов и списков аргументов для свободных моделей поврежденностей. Так например, для связной модели кавитации (свободная модель сформулирована в разд. 4.9.) можно записать следующий функционал Лагранжа:

$$\begin{aligned} \delta L = & \delta A + \delta \int_V [\mu \gamma_y \gamma_y + \\ & + \frac{1}{2} (\frac{2\mu}{3} + \lambda) \theta^2 + 2C_3^{\equiv} \theta \tilde{\theta} + \frac{1}{2} C_2^{\equiv} \tilde{\theta} \tilde{\theta} + \\ & + \chi \omega_i \omega_i + D \omega_i R_i + C_3^{\equiv} \omega_i \tilde{\theta}_i + \\ & + DR_i \omega_i + \frac{1}{2} CR_i R_i + C_4^{\equiv} R_i \tilde{\theta}_i + \\ & + C_3^{\equiv} \tilde{\theta}_i \omega_i + C_4^{\equiv} R_i \tilde{\theta}_i + \frac{1}{2} C_1^{\equiv} \tilde{\theta}_i \tilde{\theta}_i] dV + \\ & + \delta \int_S [\frac{1}{2} AR_i R_i n_i n_i + A_i^{\equiv} R_i n_i \tilde{\theta}_i + \\ & + \frac{1}{2} A^{\equiv} \tilde{\theta} \tilde{\theta} + BR_i R_i (\delta_{ij} - n_i n_j)] dF \end{aligned}$$

Записанный функционал дает полную формулировку связанной задачи, включая систему определяющих уравнений, разрешающую систему уравнений и систему естественных граничных условий. Отметим, что в данном случае система разрешающих уравнений состоит из четырех уравнений второго порядка относительно R_i и θ , а полная и корректная математическая формулировка содержит еще четыре пары естественных граничных условий. Связанность задачи проявляется как в разрешающих уравнениях, так и в граничных условиях.

ГЛАВА 5. МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

В главе излагается метод представления общего решения в форме разложения по системе заданных кинематических состояний. Предлагается общий метод ортогонализации кинематических состояний и некоторые следствия использования подобных разложений. Развиваемый метод представления решений и все связанные с ним построения, как правило, справедливы и для трехмерной среды и для четырехмерной среды Минковского. Поэтому все формулировки и выводы будут приводиться, как правило, для трехмерной среды в предположении их естественного обобщения на четырехмерный случай.

5.1. Определение кинематических состояний. Определение скалярного произведения

Рассмотрим анизотропное упругое тело, свойства которого описываются тензором упругих жесткостей $C_{\alpha\beta\gamma}$. Уравнение равновесия в перемещениях имеет вид:

$$C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^2 R_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} + X_i = 0 \quad (5.1)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям на поверхности, ограничивающей упругую область:

$$C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} n_\gamma - Y_i = 0 \quad (5.2)$$

ищется в классе кинематических состояний R^n из пространства, определяемого экстремальными соответствующего лагранжиана [1], [2], [3]. В качестве нормы $[R, R] = 2U$ выбирается потенциальная энергия деформации:

$$2U = \int_V C_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_\gamma}{\partial x_\gamma} dV$$

где R_i — компоненты вектора перемещений R . Для двух любых элементов из пространства кинематических состояний R^m и R^n соответствующим образом определяется и скалярное произведение: