предполагается, что список аргументов для объемной и поверхностной плотностей потенциальной энергии известен и определяется как совокупность списков аргументов для моделей среды без дефектов и списков аргументов для свободных моделей поврежденностей. Так например, для связной модели кавитации (свободная модель сформулирована в разд. 4.9.) можно записать следующий функционал Лагранжа:

$$\delta L = \delta A + \delta \int_V \Big[\mu\, \gamma_{ij}\gamma_{ij} +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big(\frac{2\mu}{3} + \lambda\Big)\theta^2 + 2C_5^{\Xi}\,\theta\widetilde{\theta} + \frac{1}{2}C_2^{\Xi}\widetilde{\theta}\widetilde{\theta} +$$

$$+ \chi\,\omega_i\,\omega_i + D\omega_i R_i + C_3^{\Xi}\,\omega_i\widetilde{\theta}_i +$$

$$+ DR_i\omega_i + \frac{1}{2}CR_iR_i + C_4^{\Xi}\,R_i\widetilde{\theta}_i +$$

$$+ C_3^{\Xi}\,\widetilde{\theta}_i\omega_i + C_4^{\Xi}\,R_i\widetilde{\theta}_i + \frac{1}{2}C_1^{\Xi}\widetilde{\theta}_i\widetilde{\theta}_i\,\Big]dV +$$

$$+ \delta \oint \Big[\frac{1}{2}AR_iR_jn_in_j + A_i^{\Xi}R_in_i\widetilde{\theta} +$$

$$+ \frac{1}{2}A^{\Xi}\widetilde{\theta}\,\widetilde{\theta} + BR_iR_j(\delta_{ij} - n_in_j)\Big]dF$$

Записанный функционал дает полную формулировку связанной задачи, включая систему определяющих уравнений, разрешающую систему уравнений и систему естественных граничных условий. Отметим, что в данном случае система разрешающих уравнений состоит из четырех уравнений второго порядка относительно $R_i$ и $\theta$, а полная и корректная математическая формулировка содержит еще четыре пары естественных граничных условий. Связанность задачи проявляется как в разрешающих уравнениях, так и в граничных условиях.

# ГЛАВА 5
# МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ

В главе излагается метод представления общего решения в форме разложения по системе заданных кинематических состояний. Предлагается общий метод ортогонализации кинематических состояний и некоторые следствия использования подобных разложений. Развиваемый метод представления решений и все связанные с ним построения, как правило, справедливы и для трехмерной среды и для четырехмерной среды Минковского. Поэтому все формулировки и выводы будут приводиться, как правило, для трехмерной среды в предположении их естественного обобщения на четырехмерный случай.

## 5.1. Определение кинематических состояний. Определение скалярного произведения

Рассмотрим анизотропное упругое тело, свойства которого описываются тензором упругих жесткостей $C_{\alpha\beta ij}$. Уравнение равновесия в перемещениях имеет вид:

$$C_{\alpha\beta ij}\,\frac{\partial^2 R_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_j} + X_i = 0 \qquad (5.1)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее заданным граничным условиям на поверхности, ограничивающей упругую область:

$$C_{\alpha\beta ij}\,\frac{\partial\, R_\alpha}{\partial x_\beta}n_j - Y_i = 0 \qquad (5.2)$$

ищется в классе кинематических состояний $R^n$ из пространства, определяемого экстремалями соответствующего лагранжиана [1], [2], [5]. В качестве нормы $\big[R, R\big] = 2U$ выбирается потенциальная энергия деформации:

$$2U = \int C_{\alpha\beta ij}\,\frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta}\,\frac{\partial R_i}{\partial x_j}\,dV$$

где $R_i$ – компоненты вектора перемещений $R$. Для двух любых элементов из пространства кинематических состояний $R^m$ и $R^n$ соответствующим образом определяется и скалярное произведение:

$$\left[R^n, R^m\right] = 2U^{mn} = \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial R^n_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R^m_i}{\partial x_j} dV \qquad (5.3)$$

## 5.2. Техника построения ортогональных разложений

Будем, сначала, представлять искомое решение $R_i$ в виде:

$$R_i = r_i + a^k R^k_i \qquad (5.4)$$

где $R^k_i$ - априори известная система кинематических состояний, $a^k$ - искомые коэффициенты разложений, $r_i$ - вектор-функция , являющаяся разностью между истинным решением и разложением решения в ряд по конечной системе известных вектор-функций $R^k_i$ , т.е. ошибка при приближенном представлении решения.

Подставляя перемещения (5.4) в выражение для Лагранжиана, и вычисляя первую вариацию, получим

$$\delta L(R,R) =$$

$$= \delta L(r,r) + [A^k - \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R^m_i}{\partial x_j} dV - 2U^{km} a^m]\delta a^k , \qquad (5.5)$$

где: $A^k = \iiint X_i R^k_i dV + \oiint Y_i R^k_i dF$

Обратим внимание на выражения, стоящие в квадратных скобках в (5.5). Если эти выражения приравнять нулю, то получим:

$$\delta L(R,R) = \delta L(r,r)$$

Следовательно выражения

$$[A^k - \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R^m_i}{\partial x_j} dV - 2U^{km} a^m]\delta a^k ,$$

содержащие вариацию $\delta a^k$ следует понимать как изопериметрические условия, выполнение которых является необходимым условием инвариантности вариации Лагранжиана относительно преобразования (5.4). На этой основе предлагается новая процедура определения коэффициентов в искомых разложениях, в соответствии с которой в выражении для первой вариации Лагранжиана должны быть равными нулю множители при $\delta a^k$ . При этом вариационные формулировки



задач в терминах $R$ и $r$ полностью совпадают, имеет место инвариантность в указанном смысле.

Определим тензор обобщенных податливостей $\overline{U}^{nk}$ через тензор обобщенных жесткостей, каковыми можно считать величины $U^{km}$ :

$$\overline{U}^{nk} U^{km} = \delta^{nm} \qquad (5.6)$$

Тогда приравнивая нулю множители при $\delta a^k$ , можем получить:

$$a^n = \frac{\overline{U}^{nk}}{2} [A^k - \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R^k_i}{\partial x_j} dV] \qquad (5.7)$$

Подставляя найденные с помощью (5.7) коэффициенты $a^k$ в выражение для перемещений (5.4), запишем:

$$R_i = [r_i - R^n_i \frac{\overline{U}^{nm}}{2} \int C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R^m_\gamma}{\partial x_\delta} dV] + R^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} A^m \qquad (5.8)$$

Соотношение (5.8) весьма примечательно. Действительно, оно дает разложение в виде прямой суммы двух функциональных подпространств. Одно из них определено совокупностью заданных кинематических состояний $R^n$ (в общем случае не ортогональных и не нормированных). Второе подпространство является замыканием первого. Существенно, что скалярное произведение, определенное ранее, для любых функций из этих подпространств равно нулю. Таким образом, все элементы из указанных подпространств ортогональны в указанном смысле в энергетической норме (5.3).

Как следствие, из (5.8) следует равенство:

$$\int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R^k_i}{\partial x_j} dV = A^k \qquad (5.9)$$

Для того, чтобы его доказать, достаточно найти из (5.8) градиент вектора $R$ , составить скалярное произведение $\left[R, R^k\right]$ и воспользоваться соотношением (5.6), учтя определение обобщенной податливости. Исключим теперь из равенства (5.8) величину $A^k$ с помощью соотношения (5.9). В результате получим следующее важное выражение:

$$\overline{R}_i = R_i - R_i^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} \int C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_\gamma^m}{\partial x_\delta} dV = \qquad (5.10)$$

$$= r_i - R_i^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} \int C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial r_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_\gamma^m}{\partial x_\delta} dV$$

Используя (5.10) перепишем соотношение (5.8) окончательно в следующем виде:

$$R_i = \overline{R}_i + a^n R_i^n \qquad (5.11)$$

Здесь, очевидно,

$$a^n = A^m \frac{\overline{U}^{nm}}{2}$$

$$\overline{R}_i = R_i - R_i^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} \int C_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial R_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_\gamma^m}{\partial x_\delta} dV . \qquad (5.12)$$

Формула (5.11) определяет искомое разложение решения и является одним из основных результатов данного раздела. Важно отметить, что коэффициенты разложения $a^n$ в (5.11) находятся явным образом только по известным кинематическим состояниям, с помощью интегрирования по объему и поверхности. Величина $\overline{R}_i$ является новым определением вектора погрешности искомого решения, который по построению всегда ортогонален пространству заданных кинематических состояний $R^n$. Таким образом, пространство решений представимо в виде прямой суммы кинематических состояний, принадлежащих пространству $R^k$ и ортогональному пространству $\overline{R}$. Полученный здесь результат может быть сформулирован в виде следующей Теоремы:

**Теорема 1.** *Все кинематические состояния, принадлежащие пространству $\overline{R}$, определяющие компоненты вектора погрешности, в энергетической норме ортогональны любому элементу, принадлежащему пространству $R^k$:*

$$\left[\overline{R_\alpha}, R_i^k\right] = \int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} dV = 0 \qquad (5.13)$$



Доказательство теоремы непосредственно следует из определения $\overline{R}$, достаточно провести очевидные вычисления.

Можно предложить следующую трактовку теоремы. Вектор-функция погрешности $\overline{R}$ ортогональна вектору (приближенному решению), построенному как линейная комбинация вектор-функций заданных кинематических состояний $R^k$. Если разложение искомого решения с коэффициентами $a^n$ считать приближенным решением, а величину $\overline{R}_i$ в (5.11) - погрешностью этого решения, то предложенный алгоритм обеспечивает наилучшую аппроксимацию, т.к. вектор-функция ошибки всегда находится в ортогональном подпространстве к приближенному решению.

### 5.3. Некоторые следствия

Следующее следствие относительно заданной системы функций $R_i^k$ и системы функций $\overline{R}_i$ из ортогонального подпространства, определяемой равенствами (5.12), непосредственно вытекает из свойства ортогональности (5.13).

**Теорема 2.** *Вариации Лагранжиана инвариантны относительно преобразования (5.11):*

$$\delta L(R, R) = \delta L(\overline{R}, \overline{R}) \qquad (5.14)$$

Доказательство следует из выражения для функционала Лагранжа, записанного с помощью соотношения (5.11):

$$L(R, R) =$$

$$= L(\overline{R}, \overline{R}) - a^k \iiint C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} dV + [A^k a^k - U^{nm} a^n a^m] =$$

$$= L(\overline{R}, \overline{R}) - 0 + [A^k a^k - U^{nm} a^n \frac{\overline{U}^{mk}}{2} A^k] = L(\overline{R}, \overline{R}) + \frac{1}{2} A^k a^k$$

Таким образом:

$$L(R, R) = L(\overline{R}, \overline{R}) + \frac{1}{2} A^k a^k = L(\overline{R}, \overline{R}) + \frac{1}{4} A^n A^m U^{nm} \qquad (5.15)$$

Из равенства (5.15) следует, что лагранжианы каждой из двух указанных систем функций отличаются на постоянную заданную величину (т.к. система функций $R_i^k$ является априори заданной), а это и означает инвариантность, т.к. вариация заданной величины по определению равна нулю.

*Следствие.* Если для некоторой системы кинематических состояний $R_i^k$ ошибка $\overline{R}_i$ равна нулю, то соответствующее разложение по заданной системе кинематических состояний дает точное решение проблемы теории упругости.

Докажем далее ряд теорем, касающихся разложений по заданной системе функций $R_i^k$ всех величин, определяющих формальное описание сред на базе вариационного принципа Лагранжа. Предварительно введем следующие определения

*Определение 1.* $X_i^k$ - объемная сила, возбуждающая кинематическое состояние $R_i^k$, вычисляется по следующей формуле:

$$X_i^k = -C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_\alpha^k}{\partial x_\beta \partial x_j}$$

*Определение 2.* $\overline{X}_i$ - объемная сила, возбуждающая кинематическое состояние $\overline{R}_i$, вычисляется по следующей формуле:

$$\overline{X}_i = -C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_j}$$

*Определение 3.* $Y_i^k$ - поверхностная сила, возбуждающая кинематическое состояние $R_i^k$, вычисляется по следующей формуле:

$$Y_i^k = C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial R_\alpha^k}{\partial x_\beta}$$

*Определение 4.* $\overline{Y}_i$ - поверхностная сила, возбуждающая кинематическое состояние $\overline{R}_i$, вычисляемая по следующей формуле:

$$\overline{Y}_i = C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta}$$



Будем также говорить, что кинематическими состояниями $R_i^k$ и $\overline{R}_i$ задаются соответственно нагрузки $X_i^k$, $Y_i^k$ и $\overline{X}_i$, $\overline{Y}_i$.

Имеют место следующие утверждения.

**Теорема 3.** *Объемные $X_i$ и поверхностные $Y_i$ силы представляются в виде разложений по системе заданных по $R_i^k$ сил $X_i^k$ и $Y_i^k$ и дополнений к ним - заданных по $\overline{R}_i$ сил $\overline{X}_i$ и $\overline{Y}_i$.*

Для доказательства рассмотрим уравнение равновесия

$$C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_j} + X_i = 0$$

преобразуем его, воспользовавшись разложением (5.11). В результате уравнения равновесия преобразуются к виду:

$$C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_j} + a^k C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_\alpha^k}{\partial x_\beta \partial x_j} + X_i = 0$$

Последнее уравнение с учетом *Определения 1* и *Определения 2* дает разложение объемной нагрузки:

$$X_i = \overline{X}_i + a^k X_i^k \qquad (5.16)$$

Совершенно аналогичным путем, рассматривая статические граничные условия, получим:

$$Y_i = \overline{Y}_i + a^k Y_i^k \qquad (5.17)$$

**Теорема 4.** *Для заданных системой кинематических состояний $\overline{R}_i$ нагрузок $\overline{X}_i$ и $\overline{Y}_i$, работа на любом кинематическом состоянии, принадлежащем подпространству $R_i^k$, равна нулю.*

Доказательство следует из **Теоремы 1** и следующих равенств

$$\int \overline{X}_i R_i^k dV + \oint \overline{Y}_i R_i^k dF =$$

$$= -\int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_j} R_i^k dV + \oint C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta} R_i^k dF =$$

$$= -\int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j} dV = 0 \qquad (5.18)$$

Теорема доказана.

**Теорема 5.** *Для заданных системой кинематических состояний $R_i^k$ нагрузок $X_i^k$ и $Y_i^k$, работа на любом кинематическом состоянии, принадлежащем подпространству $\overline{R}_i$, равна нулю.*

Доказательство следует из Теоремы 1 и следующих равенств

$$\int X_i^n \overline{R}_i dV + \oint Y_i^n \overline{R}_i dF =$$

$$= -\int C_{\alpha\beta ij} \frac{\partial^2 R_\alpha^n}{\partial x_\beta \partial x_j}\overline{R}_i dV + \oint C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial R_\alpha^n}{\partial x_\beta}\overline{R}_i dF = \quad (5.19)$$

$$= -\int C_{\alpha\beta ij}\frac{\partial R_\alpha^n}{\partial x_\beta}\frac{\partial \overline{R}_i}{\partial x_j} dV = 0$$

**Теорема 6**. *Для любых двух элементов подпространства $R_i^k$ и соответствующих им нагрузок справедлив аналог теоремы Бетти, т.е.*

$$\iiint X_i^n R_i^m dV + \oint\!\!\int Y_i^n R_i^m dF = \quad (5.20)$$

$$= \iiint X_i^m R_i^n dV + \oint\!\!\int Y_i^m R_i^n dF$$

Для доказательства достаточно воспользоваться определением входящих сюда величин. В результате найдем:

$$\int X_i^n R_i^m dV + \oint Y_i^n R_i^m dF =$$

$$= -\int C_{\alpha\beta ij}\frac{\partial^2 R^n_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_j} R_i^m dV + \oint C_{\alpha\beta ij} n_j \frac{\partial R^n_\alpha}{\partial x_\beta} R_i^m dF =$$

$$= \int C_{\alpha\beta ij}\frac{\partial R^n_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial R^m_i}{\partial x_j} dV = 2U^{nm}$$

Теорема доказана.

Заметим здесь, что последняя теорема имеет место, если форма определяющая $U^{nm}$ является симметричной по паре индексов $\alpha\beta$ и $ij$, т.е. если тензор $C_{\alpha\beta ij}$ симметричен по соответствующей паре индексов. В теории упругости это всегда имеет место.

Теоремы, доказанные выше, позволяют сформулировать более общее утверждение относительно предлагаемого алгоритма



представления решения исходной задачи теории упругости в форме разложений по кинематическим состояниям $R_i^k$ и свойств этих разложений.

**Теорема 7**. *Для задач теории упругости при статических граничных условиях и при смешанных граничных условиях, но однородных на той части поверхности, где заданы перемещения, представление искомого решения в форме разложения по системе заданных кинематических состояний, а также соответствующие разложения для внешних объемных и поверхностных усилий и разложения для работы этих усилий на искомых перемещениях являются однотипными, а именно: осуществляются с одними и теми же коэффициентами разложений $a^k$.*

$$R_i = \overline{R}_i + a^n R_i^n$$

$$X_i = \overline{X}_i + a^k X_i^k$$

$$Y_i = \overline{Y}_i + a^k Y_i^k$$

$$A = \overline{A} + a^n A^n$$

Первое равенство доказано при выводе формулы (5.11). Второе и третье равенства доказаны при выводе **Теоремы 3.** Четвертое равенство доказывается, если в определение работы подставить $R_i = \overline{R}_i + a^n R_i^n$ и учесть **Теоремы 3, 4 и 5**. В результате получим:

$$A = \left[\oint \overline{Y}_i \overline{R}_i dF + \int \overline{X}_i \overline{R}_i dV\right] + a^n\left[\oint \overline{Y}_i R_i^n dF + \int \overline{X}_i R_i^n dV\right] +$$

$$+ a^k\left[\oint Y_i^k \overline{R}_i dF + \int X_i^k \overline{R}_i dV\right] + a^n a^m \left[\oint Y_i^n R_i^m dF + \int X_i^n R_i^m dV\right] =$$

$$= \overline{A} + a^n 0 + a^k 0 + a^n a^m 2U^{nm} =$$

$$= \overline{A} + a^n \frac{\overline{U}^{mk} A^k}{2} 2U^{nm} = \overline{A} + a^n \delta^{nk} A^k = \overline{A} + a^n A^n$$

Что и требовалось доказать.

Приведенный выше алгоритм построения разложения искомого решения по заданной системе кинематических состояний обеспечивает: во-первых, ортогональность вектор-функции погрешности к подпространству, определенному заданной базисной системой кинематических состояний, а во-вторых, дает зависимости для приближенного решения сводится к прямому вычислению интегралов по объему, занимаемому упругим телом и по поверхности, ограничивающей этот объем. Все это делает изложенные выше результаты, привлекательными для построения приближенных решений прикладных задач теории упругости. При этом форма области и характер анизотропии свойств среды может быть произвольным, а алгоритм построения приближенного решения, основанный на использовании энергетической нормы, дает большие возможности для обобщения предлагаемого подхода, ибо достаточно лишь сформулировать лагранжиан и воспользоваться для нахождения коэффициентов теми же формулами (5.3), (5.6) и (5.12). Здесь, в дополнение к изложенному требуется определить величину погрешности приближенного решения, которая бы позволяла оценить степень близости приближенного решения к точному и допускала бы достаточно простое вычисление. В качестве такой величины введем следующее выражение:

$$\Delta = \frac{A_{ij}\int \overline{X}_i \overline{X}_j dV + B_{ij}\int \overline{Y_i Y_j} dF}{A_{ij}\int X_i X_j dV + B_{ij}\int Y_i Y_i dF}$$

Из соображений размерности коэффициенты можно ввести в следующем виде:

$$A_{ij} = V\delta_{ij} \text{ и } B_{ij} = F\delta_{ij}$$

Тогда

$$\Delta = \frac{V\int \overline{X}_i \overline{X}_i dV + F\int \overline{Y_i Y_i} dF}{V\int X_i X_i dV + F\int Y_i Y_i dF} \qquad (5.21)$$

Нетрудно видеть, что если разложение искомых перемещений по заданной системе кинематических состояний $R_i^k$ удовлетворяет системе уравнений равновесия и граничным условиям на поверхности, то $\Delta = 0$. Если для разложения перемещений не выполняется точно граничное условие, то интеграл по поверхности в равенстве (5.21) будет не равен нулю, определяя погрешность выполнения граничных условий. Такая ситуация возникает, когда в качестве заданных кинематических состояний принимается поле перемещений, построенное с привлечением однородных решений, удовлетворяющих уравнению внутри области и части граничных условий [25], [26], [27]. Для таких этом построенный алгоритм оказывается весьма эффективным. В



приложениях удобно также, чтобы выбранные в качестве координатных функций кинематические состояния образовывали ортогональное семейство функций. Легко видеть, что любая заданная система кинематических состояний может быть преобразована в ортогональную систему в рассматриваемом энергетическом пространстве путем последовательного применения представления (5.8).

### 5.4. Ортогонализация кинематических состояний в модели когезионного поля

Рассмотрим модель когезионного поля (Гл. 4). Исследуем инвариантность вариации лагранжиана когезионного поля относительно преобразования (5.4). Запишем Лагранжиан когезионного поля:

$$L(R,R) = A - \frac{1}{2}\iiint \{C_{nmij}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + CR_i R_i\}dV \qquad (5.22)$$

Преобразуем (5.22). Используя разложение (5.4), получим:

$$L(R,R) = L(r,r) +$$

$$+ A^k a^k - \frac{2a^k}{2}\iiint (C_{nmij}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial r_n}{\partial x_m} + CR_i^k r_i)dV -$$

$$- \frac{a^k a^l}{2}\iiint (C_{nmij}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial R_n^l}{\partial x_m} + CR_i^k R_i^l)dV$$

Чтобы вариация лагранжиана не зависела от $\delta a^k$, следует принять:

$$\frac{dL}{da^k} = A^k - \iiint (C_{nmij}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial r_n}{\partial x_m} + CR_i^k r_i)dV -$$

$$- a^l\iiint (C_{nmij}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial R_n^l}{\partial x_m} + CR_i^k R_i^l)\}dV = 0$$

Отсюда найдем:

$$a^l 2U^{kl} = A^k - \iiint (C_{nmij}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial r_n}{\partial x_m} + CR_i^k r_i)dV \qquad (5.23)$$

Здесь, как и в разд. 5.1 вводится энергетическая норма:

$$U^{kl} = \frac{1}{2}\iiint (C_{nmij}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial R_n^l}{\partial x_m} + CR_i^k R_i^l)\}dV \qquad (5.24)$$

Формулой (5.24) определяется потенциальная энергия взаимного возмущения кинематических состояний $R_i^k$ и $R_n^l$ модели когезионного поля. По аналогии с (5.6) введем тензор податливостей $\overline{U}^{nk}$, как решение системы линейных уравнений:

$$\overline{U}^{lk} U^{km} = \delta^{nm} \qquad (5.25)$$

при заданных $U^{km}$.

Необходимые условия инвариантности (5.23) можно записать в виде, разрешенном относительно коэффициентов разложения $a^k$:

$$a^p = \frac{\overline{U}^{kp}}{2}[A^k - \iiint (C_{nmij}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial r_n}{\partial x_m} + CR_i^k r_i)dV]$$

и записать преобразование (5.4) в следующем виде:

$$R_i =$$

$$= [r_i - R_i^p \frac{\overline{U}^{kp}}{2}\iiint (C_{nm\alpha\beta}\frac{\partial R_\alpha^k}{\partial x_\beta}\frac{\partial r_n}{\partial x_m} + CR_\alpha^k r_\alpha)dV] + \qquad (5.26)$$

$$+ R_i^p \frac{\overline{U}^{kp}}{2} A^k$$

Отсюда следует формула, аналогичная (5.9):

$$\iiint (C_{nm\alpha\beta}\frac{\partial R_\alpha^k}{\partial x_\beta}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + CR_\alpha^q R_\alpha)dV = A^k$$

Исключая из (5.26) $A^k$, получим определение элемента подпространства экстремалей $\overline{R}$, инвариантное относительно преобразования(5.4):

$$R_i - R_i^p \frac{\overline{U}^{qp}}{2}\iiint (C_{nm\alpha\beta}\frac{\partial R_\alpha^q}{\partial x_\beta}\frac{\partial R_n}{\partial x_m} + CR_\alpha^q R_\alpha)dV =$$

$$(5.27)$$

$$= r_i - R_i^p \frac{\overline{U}^{kp}}{2}\iiint (C_{nm\alpha\beta}\frac{\partial R_\alpha^k}{\partial x_\beta}\frac{\partial r_n}{\partial x_m} + CR_\alpha^k r_\alpha)dV = \overline{R}_i$$



Отсюда получим конкретное представление разложения (5.4) в виде прямой суммы элементов ортогональных подпространств $R^k$ и $\overline{R}$:

$$R_i = \overline{R}_i + R_i^p \frac{\overline{U}^{qp}}{2} A^q \qquad (5.28)$$

$$\iiint (C_{nm\alpha\beta}\frac{\partial R_\alpha^k}{\partial x_\beta}\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial x_m} + CR_\alpha^k \overline{R}_\alpha)dV] = 0 \qquad (5.29)$$

Используя (5.28), (5.29), можно записать следующую цепочку равенств:

$$L(R,R) = A - \frac{1}{2}\iiint \{C_{nmij}\frac{\partial R_n}{\partial x_m}\frac{\partial R_i}{\partial x_j} + CR_i R_i\}dV =$$

$$= \overline{A} + A^k a^k -$$

$$-\frac{1}{2}\iiint \{C_{nmij}(\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial x_m}\frac{\partial \overline{R}_i}{\partial x_j} + 2a^k\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial x_m} + a^k a^l \frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial R_n^l}{\partial x_m}) +$$

$$+ C(\overline{R}_i\overline{R}_i + 2a^k R_i^k \overline{R}_i + a^k a^l R_i^k R_i^l)\}dV =$$

$$= \overline{A} - \frac{1}{2}[\iiint \{C_{nmij}\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial x_m}\frac{\partial \overline{R}_i}{\partial x_j} + C\overline{R}_i\overline{R}_i\}dV +$$

$$+ A^k a^k - \frac{2a^k}{2}\iiint (C_{nmij}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{R}_n}{\partial x_m} + CR_i^k \overline{R}_i)dV -$$

$$-\frac{a^k a^l}{2}\iiint (C_{nmij}\frac{\partial R_i^k}{\partial x_j}\frac{\partial R_n^l}{\partial x_m} + CR_i^k R_i^l)dV =$$

$$= L(\overline{R},\overline{R}) + A^k a^k - a^k a^l U^{kl} =$$

$$= L(\overline{R},\overline{R}) + A^k a^k - a^k \frac{\overline{U}^{lp} U^{lk}}{2} A^p =$$

$$= L(\overline{R},\overline{R}) + A^k a^k - a^k \frac{1}{2} A^k =$$

$$= L(\overline{R},\overline{R}) + \frac{1}{2} A^k a^k = L(\overline{R},\overline{R}) + \frac{1}{4} A^n A^m \overline{U}^{nm}$$

Следовательно, необходимые и достаточные условия инвариантности лагранжиана модели когезионного поля можно сформулировать в форме равенства:

$$A^k = 0 \qquad (5.30)$$

*Следствие 1.* При $R_i^k = R_i^0$ из (5.30) получим необходимые и достаточные условия инвариантности лагранжиана модели когезионного поля относительно трансляций тела как жесткого целого:

$$A^0 = [\iiint X_i dV + \oint\!\!\oint Y_i dF]R_i^0 = 0, \ \textit{отсюда}$$

$$P_i = \iiint X_i dV + \oint\!\!\oint Y_i dF = 0$$

*Следствие 2.* При $R_i^k = \omega_n^0(x_m - \frac{S_m}{V})Э_{nmi}$ уравнение (5.30) дает необходимые и достаточные условия инвариантности лагранжиана модели когезионного поля относительно вращений тела как жесткого целого.

$$A^1 = [\iiint X_i(x_j - \frac{S_j}{V})Э_{ijk}dV + \oint\!\!\oint Y_i(x_j - \frac{S_j}{V})Э_{ijk}dF](-\omega_k^0) = 0$$

*следовательно*:

$$M_k = \iiint X_i(x_j - \frac{S_j}{V})Э_{ijk}dV + \oint\!\!\oint Y_i(x_j - \frac{S_j}{V})Э_{ijk}dF = 0$$

*Следствие 3.* Пусть теперь $R_i^k$ являются решениями статически однородной краевой задачи классической теории упругости:

$$C_{nm\alpha\beta}\frac{\partial^2 R_\alpha^k}{\partial x_m \partial x_\beta} = 0, \ \oint\!\!\oint C_{nm\alpha\beta} n_m \frac{\partial R_\alpha^k}{\partial x_\beta}\overline{R}_n dF = 0$$

Тогда соотношения (5.30) позволяют получить важный для построения модели когезионного поля, фундаментальный результат. Имеем:



$$A^k = \iiint X_i R_i^k dV + \oint\!\!\oint Y_i R_i^k dF =$$

$$= \iiint (-C_{nm\alpha\beta}\frac{\partial^2 \overline{R}_\alpha}{\partial x_m \partial x_\beta} + C\overline{R}_\alpha)R_\alpha^k dV + \oint\!\!\oint C_{nm\alpha\beta} n_m \frac{\partial \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta} R_n^k dF =$$

$$= \iiint (C_{nm\alpha\beta}\frac{\partial \overline{R}_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial R_n^k}{\partial x_m} + C\overline{R}_\alpha R_\alpha^k)dV = C\iiint R_\alpha^k \overline{R}_\alpha dV = 0$$

Следовательно, условие ортогональности кинематических состояний классической теории упругости и модели когезионного поля

$$C\iiint R_\alpha^k \overline{R}_\alpha dV = 0$$

является необходимым и достаточным условием инвариантности лагранжиана модели когезионного поля относительно статически однородных кинематических состояний классического упругого тела.

### 5.5 Ортогонализация кинематических состояний в базовой модели механики сплошной среды

Рассмотрим базовую модель механики сплошной среды (Гл.2). Исследуем инвариантность лагранжиана базовой модели механики сплошной среды. В качестве нормы аналогично норме (5.3), введенной для классической теории упругости, введем для двух любых элементов из пространства кинематических состояний $R^m$ и $R^n$ соответствующим образом определенное скалярное произведение:

$$\left[R^n, R^m\right] = 2U^{mn} =$$

$$= \iiint [2\mu\gamma_{ij}^n\gamma_{ij}^m + (\frac{2\mu}{3} + \lambda)\theta^n\theta^m +$$

$$+ 4\chi\omega_i^n\omega_i^m + D(R_i^n\omega_i^m + \omega_i^n R_i^m) + CR_i^n R_i^m]dV +$$

$$+ \oint\!\!\oint A_{ij}R_i^n R_j^m dF$$

Здесь так же можно считать $U^{mn}$ потенциальной энергией взаимного возмущения кинематических состояний $R^m$ и $R^n$.

Аналогично (5.6), определим тензор обобщеных податливостей $\overline{U^{nk}}$ через тензор $U^{km}$.

$$\overline{U}^{nk} U^{km} = \delta^{nm}$$

Тогда метод ортогональных кинематических состояний даст, как и в (5.11), искомое решение $R_i$ в виде:

$$R_i = \overline{R}_i + a^k R_i^k ,$$

где в отличие от (5.12):

$$a^n = A^m \frac{\overline{U}^{nm}}{2}$$

$$\overline{R}_i = R_i - R_i^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} \{ \iiint [2\mu \gamma_{ij} \gamma_{ij}^m + (\frac{2\mu}{3} + \lambda)\theta\theta^m +$$

$$+ 4\chi\omega_i \omega_i^m + D(R_i \omega_i^m + \omega_i R_i^m) + CR_i R_i^m ]dV +$$

$$+ \oiint A_{ij} R_i R_j^m dF \}$$

Наконец, основная формула метода ортогональных кинематических состояний будет иметь вид, аналогичный (5.13):

$$\left[\overline{R}_i , R_i^k \right] = 0$$

$$\iiint [2\mu \overline{\gamma}_{ij} \gamma_{ij}^m + (\frac{2\mu}{3} + \lambda)\overline{\theta}\theta^m +$$

$$+ 4\chi\overline{\omega}_i \omega_i^m + D(\overline{R}_i \omega_i^m + \overline{\omega}_i R_i^m) + C\overline{R}_i R_i^m ]dV +$$

$$+ \oiint A_{ij} \overline{R}_i R_j^m dF = 0$$

# ГЛАВА 6
# ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Развиваемые авторами математические модели сред основаны на введении кинематических связей и использовании затем вариационного формализма. Анализ обобщенных формул Чезаро, полученных в гл.1 показывает, что вектор перемещений наряду с криволинейным интегралом, зависящим от тензора девиатора деформаций, определяется также внеинтегральным выражением. Это выражение кроме традиционных трансляций и поворотов $R_i^0$, $\omega_i^0$, содержит дополнительные составляющие, определяющие в общем случае квадратичный полином с коэффициентами $\theta^0$, $\theta_i^0$.

В классической теории упругости законы сохранения - интегральные уравнения равновесия для векторов сил и моментов являются условиями инвариантности модели относительно трансляций и поворотов среды как абсолютно твердого тела. В данной главе устанавливается расширенная система условий инвариантности (законов сохранения), относительно параметров $R_i^0$, $\omega_i^0$, $\theta^0$, $\theta_i^0$. Приводятся также некоторые иные, нетрадиционные формы изопериметрических условий.

## 6.1. Линейные изопериметрические условия

Пусть вариации перемещений соответствуют обобщенной на пространство Минковского формуле Чезаро:

$$\delta R_i = \delta R_i^\circ + \frac{1}{2}\delta\omega^\circ_{\alpha\beta}(x_j - x_j^\circ)Э_{\alpha\beta ji} +$$
$$+ \frac{1}{4}\delta\theta^\circ (x_i - x_i^\circ) + \frac{1}{4}\delta\theta_j^\circ P_{ij}(x^\circ) + \delta r_i \quad (6.1)$$

Тогда вариационное уравнение (3.1) примет следующий вид:

$$\delta L = \{ \int [CR_i]dV + \oint [A_{ij} R_j]dF\}\delta R_i^\circ +$$

$$+ \{ \int [4\chi\omega_{nm} + CR_i (x_l - x_l^\circ)Э_{nmli}]dV +$$

$$+ \oint [A_{ij} R_j (x_l - x_l^\circ)Э_{nmli}]dF\} \frac{1}{2}\delta\omega_{nm}^\circ +$$