$$\overline{U}^{ik} U^{jkm} = \delta^{im}$$

Тогда метод ортогональных кинематических состояний даст, как и в (5.11), искомое решение R_i в виде:

$$R_i = \overline{R}_i + a^k R_i^k ,$$

где в отличие от (5.12):

$$a^n = A^m \frac{\overline{U}^{nm}}{2}$$

$$\overline{R}_i = R_i - R_i^n \frac{\overline{U}^{nm}}{2} \{ \iiint [2\mu\gamma_{ij}\gamma_{ij}^m + (\frac{2\mu}{3} + \lambda)\theta\theta^m +$$

$$+ 4\chi\omega_i \omega_i^m + D(R_i \omega_i^m + \omega_i R_i^m) + CR_i R_i^m]dV +$$

$$+ \oiint A_{ij} R_i R_j^m dF \}$$

Наконец, основная формула метода ортогональных кинематических состояний будет иметь вид, аналогичный (5.13):

$$\left[\overline{R}_i, R_i^k\right] = 0$$

$$\iiint [2\mu\overline{\gamma}_{ij}\gamma_{ij}^m + (\frac{2\mu}{3} + \lambda)\overline{\theta}\theta^m +$$

$$+ 4\chi\overline{\omega}_i \omega_i^m + D(\overline{R}_i \omega_i^m + \overline{\omega}_i R_i^m) + C\overline{R}_i R_i^m]dV +$$

$$+ \oiint A_{ij} \overline{R}_i R_j^m dF = 0$$

ГЛАВА 6
ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Развиваемые авторами математические модели сред основаны на введении кинематических связей и использовании затем вариационного формализма. Анализ обобщенных формул Чезаро, полученных в гл.1 показывает, что вектор перемещений наряду с криволинейным интегралом, зависящим от тензора девиатора деформаций, определяется также внеинтегральным выражением. Это выражение кроме традиционных трансляций и поворотов R_i^0, ω_i^0, содержит дополнительные составляющие, определяющие в общем случае квадратичный полином с коэффициентами θ^0, θ_i^0.

В классической теории упругости законы сохранения - интегральные уравнения равновесия для векторов сил и моментов являются условиями инвариантности модели относительно трансляций и поворотов среды как абсолютно твердого тела. В данной главе устанавливается расширенная система условий инвариантности (законов сохранения), относительно параметров R_i^0, ω_i^0, θ^0, θ_i^0. Приводятся также некоторые иные, нетрадиционные формы изопериметрических условий.

6.1.Линейные изопериметрические условия

Пусть вариации перемещений соответствуют обобщенной на пространство Минковского формуле Чезаро:

$$\delta R_i = \delta R_i^{\circ} + \frac{1}{2}\delta\omega^{\circ}{}_{\alpha\beta}(x_j - x_j^{\circ})Э_{\alpha\beta ji} +$$
$$+ \frac{1}{4}\delta\theta^{\circ}(x_i - x_i^{\circ}) + \frac{1}{4}\delta\theta_j^{\circ} P_{ij}(x^{\circ}) + \delta r_i \; . \qquad (6.1)$$

Тогда вариационное уравнение (3.1) примет следующий вид:

$$\delta L = \{ \int [CR_i]dV + \oint [A_{ij} R_j]dF \}\delta R_i^{\circ} +$$

$$+ \{ \int [4\chi\omega_{nm} + CR_i(x_l - x_l^{\circ})Э_{nmli}]dV +$$

$$+ \oint [A_{ij} R_j (x_l - x_l^{\circ})Э_{nmli}]dF \}\frac{1}{2}\delta\omega_{nm}^{\circ} +$$

$$
\begin{aligned}
&+\{\int[-(2\mu+4\lambda)\theta+CR_i(x_i-x_i^\circ)]dV+\\
&+\oint[A_{ij}R_j](x_i-x_i^\circ)dF\}\frac{1}{4}\delta\theta+\\
&+\{\int[-(2\mu+4\lambda)\theta(x_p-x_p^\circ)-2\chi\omega_{\alpha\beta}(x_n-x_n^\circ)Э_{pn\alpha\beta}+\\
&+CR_iP_{ip}(x^\circ)]dV+\oint[A_{ij}R_j]P_{ip}(x^\circ)dF\}\frac{1}{4}\delta\theta_p+\\
&+\{\int[-(\mu+\chi)\frac{\partial^2R_i}{\partial x_j\partial x_j}-(\mu+\lambda-\chi)\frac{\partial^2R_j}{\partial x_i\partial x_j}+CR_i]\delta r_i dV+\\
&+\oint[(\mu+\chi)\frac{\partial R_i}{\partial x_j}n_j+\lambda\frac{\partial R_k}{\partial x_k}n_i+(\mu-\chi)\frac{\partial R_j}{\partial x_i}n_j+\\
&+A_{ij}R_j]\delta r_i dF\}=0.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Необходимым условием инвариантности сформулированного лагранжиана относительно преобразования, порожденного формулой Чезаро, являются следующие изопериметрические условия, полученные путем приравнивания нулю множителей при вариациях δR_i°, $\delta(\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}^\circ)$, $\delta(\frac{1}{4}\theta^\circ)$ и $\delta(\frac{1}{4}\theta_j^\circ)$:

$$\int[CR_i]dV+\oint[A_{ij}R_j]dF=0, \tag{6.3}$$

$$
\begin{aligned}
&\int[4\chi\omega_{nm}+CR_l(x_l-x_l^\circ)Э_{nmli}]dV+\\
&+\oint[A_{ij}R_j(x_l-x_l^\circ)Э_{nmli}]dF=0,
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int[-(2\mu+4\lambda)\theta+CR_i(x_i-x_i^\circ)]dV+\\
&+\oint[A_{ij}R_j](x_i-x_i^\circ)dF=0,
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int[-(2\mu+4\lambda)\theta(x_p-x_p^\circ)-2\chi\omega_{\alpha\beta}(x_n-x_n^\circ)Э_{pn\alpha\beta}+\\
&+CR_iP_{ip}(x^\circ)]dV+\oint[A_{ij}R_j]P_{ip}(x^\circ)dF=0.
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

Таким образом, установлено, что экстремали функционала (6.2) должны принадлежать пространству непрерывных функций, удовлетворяющих полученным пятнадцати изопериметрическим условиям (6.3) - (6.6). Нетрудно показать и обратное. Если выполняются указанные пятнадцать изопериметрических условий, то имеет место инвариантность относительно преобразования выраженного в обобщенных формулах Чезаро. Таким образом, имеет место следующая теорема

Теорема:

Необходимыми и достаточными условиями инвариантности вариации функционала (6.2) относительно преобразований Чезаро (6.1) является принадлежность экстремалей классу дифференцируемых векторных функций, удовлетворяющих пятнадцати изопериметрическим условиям (6.3) - (6.6).

Дадим физическую трактовку полученных уравнений сохранения.

1. Первое векторное равенство (6.3) выражает необходимое условие инвариантности сформулированного лагранжиана относительно трансляций и инверсии во времени. Оно является, с механистической точки зрения, условием глобального равновесия сил и имеет четыре компоненты.

Назовем соответствующее ему преобразование «преобразованием трансляции». Положим $A=0$ и $B=0$.

Требование инвариантности относительно «преобразования трансляции» сведется тогда к условию самоуравновешенности перемещений

$$(\delta_{ij}-N_iN_j)\iint\iint R_i dV=0$$

и глобальной согласованности хода эталонных часов

$$N_i\iint\iint R_i dV=0.$$

во всем объеме пространства событий.

2. Второе тензорное равенство (6.4) выражает необходимое условие инвариантности лагранжиана относительно 4-поворотов (преобразований Лоренца). С механистической точки зрения оно является условием глобального равновесия моментов и имеет шесть компонент.

Назовем соответствующее ему преобразование «преобразованием поворота». Положим $A=0$, $B=0$ и $C=0$.

Требование инвариантности относительно «преобразования поворота» сводится к условию самоуравновешенности поворотов во всем объеме пространства событий:

$$\int [2\chi \frac{\partial R_i}{\partial x_j} Э_{nmji}] dV = 4\chi \int \omega_{ij} dV = 0 .$$

3. Третье скалярное равенство (6.5) не имеет аналогов и выражает необходимое условие инвариантности сформулированного лагранжиана относительно преобразования подобия с постоянным по 4-координатам коэффициентом подобия θ°. Имеет одну компоненту.

Назовем соответствующее ему преобразование «преобразованием подобия». Положим $A = 0$, $B = 0$ и $C = 0$.
Требование инвариантности относительно «преобразования подобия» сведется тогда к условию самоуравновешенности деформации изменения объема

$$(2\mu + 4\lambda) \int \theta dV = 0 .$$

во всем объеме пространства событий.
4. Четвертое, векторное, равенство (6.6) не имеет аналогов и выражает необходимое условие инвариантности сформулированного лагранжиана относительно преобразования подобия с линейными по координатам коэффициентами подобия. Имеет четыре компоненты.
Назовем соответствующее ему преобразование «космологическим преобразованием». Положим $A = 0$, $B = 0$ и $C = 0$.

Требование инвариантности относительно «космологического преобразования» сведется тогда к условию совместной самоуравновешенности деформации изменения объема и поворотов с соответствующими весами во всем объеме пространства событий:

$$(2\mu + 4\lambda) \int \theta (x_p - x_p^{\circ}) dV + 2\chi \int \omega_{\alpha\beta} (x_n - x_n^{\circ}) Э_{pn\alpha\beta} dV = 0 .$$

6.2. Квадратичные изопериметрические соотношения

Помимо линейных изопериметрических соотношений, которые легко трактуются как обобщения законов сохранения энергии - импульса, моментов импульса и т.д. уравнения (3.1) порождают и еще одну группу условий - квадратичные изопериметрические условия в физически-линейных моделях.

Вновь рассмотрим вариационное равенство (3.1) и перепишем его в следующем виде:

$$\delta L = \delta A -$$
$$- \delta \int \left\{ \mu \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{2} + \lambda\right) \theta^2 + 2k\omega_i \omega_i + \frac{1}{2} C R_i R_i \right\} dV -$$
$$- \delta \oint \left\{ \frac{1}{2} A R_i R_j n_i n_j + \frac{1}{2} B R_i R_j \left(\delta_{ij} - n_i n_j\right) \right\} dF .$$

Далее можем записать следующее формальное равенство:

$$\delta L = \delta A - \mu \delta \left(\int \gamma_{ij} \gamma_{ij} dV - C_{\mu} \right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{2} + \lambda\right) \delta \left(\int \theta^2 dV - C_{\lambda} \right) -$$
$$- 2k\delta \left(\int \omega_i \omega_i dV - C_k \right) + \frac{1}{2} C \delta \left(\int R_i R_i dV - C_c \right) -$$
$$- \frac{A}{2} \delta \left(\oint R_i R_j n_i n_j dF - C_A \right) -$$
$$- \frac{B}{2} \delta \left(\oint R_i R_j (\delta_{ij} - n_i n_j) dF - C_B \right) = 0.$$

Последнее выражение можно рассматривать не как работу реактивных сил на связях, выраженных соотношениями Коши (1.4) или (1.23), а как изопериметрические условия, наложенные на квадратичные инварианты аргументов действия. С другой стороны получим эти условия как уравнения Эйлера при вариации расширенного лагранжиана (модифицированного действия) $\tilde{L}$. Определим расширенный лагранжиан следующим образом:

$$- \tilde{L} = \mu \left(\int \gamma_{ij} \gamma_{ij} dV - C_{\mu} \right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{2} + \lambda\right) \left(\int \theta^2 dV - C\lambda \right) +$$
$$+ 2k \left(\int \omega_{ij} \omega_{ij} dV - C_k \right) + \frac{1}{2} C \left(\int R_i R_i dV - C_c \right) +$$
$$+ \frac{A}{2} \left(\oint R_i R_j n_i n_j dF - C_A \right) +$$
$$+ \frac{B}{2} \left(\oint R_i R_j (\delta_{ij} - n_i n_j) dF - C_B \right).$$

Следовательно, можно записать:

$$-\delta L = -\delta L + \left(\int \gamma_{ij}\gamma_{ij}\,dV - C_\mu\right)\delta\mu + \left(\int \theta^2 dV - C_\lambda\right)\delta\frac{(\mu+2\lambda)}{4} +$$

$$+\left(\int \omega_{ij}\omega_{ij}\,dV - C_k\right)\delta(2k) + \left(\int R_i R_i\,dV - C_c\right)\delta\left(\frac{C}{2}\right) +$$

$$+\left(\oint R_i R_j n_i n_j\,dF - C_A\right)\delta\frac{A}{2} +$$

$$+\left(\oint R_i R_j(\delta_{ij} - n_i n_j)\,dF - C_B\right)\delta\frac{B}{2} = 0\,.$$

Таким образом, можно утверждать, что квадратичные изопериметрические соотношения

$$\int \gamma_{ij}\gamma_{ij}\,dV - C_\mu = 0, \quad \int \theta^2 dV - C\lambda = 0,$$

$$\int \omega_{ij}\omega_{ij}\,dV - C_k = 0, \quad \int R_i R_i\,dV - C_c = 0,$$

$$\oint R_i R_j n_i n_j\,dF - C_A = 0, \quad \oint R_i R_j(\delta_{ij} - n_i n_j)\,dF - C_B = 0$$

являются необходимыми и достаточными условиями инвариантности расширенного лагранжиана относительно преобразования физических свойств среды. Заметим, что эти квадратичные изопериметрические соотношения могут являться основой для алгоритма определения эффективных характеристик сред [2], [12].

6.3. Анализ линейных изопериметрических условий

Непосредственно из (6.3) - (6.6) следуют следующие теоремы сохранения.

1. Законы сохранения, соответствующие δR_i°.

$$\iint\!\!\iint [CR_i]dV + \oiint\!\!\int [A_{ij}R_j]dF =$$

$$= \int_{\tilde{x}_4 = x_4^\circ}^{\tilde{x}_4 = x_4} [\iiint CR_i dV_3]d\tilde{x}_4 +$$

$$+ \iiint [AN_iN_jR_j + B(\delta_{ij} - N_iN_j)R_j]dV_3 \Big|_{\tilde{x}_4 = x_4^\circ}^{\tilde{x}_4 = x_4} = 0 \quad .$$

Обозначим:

$$\iiint [AN_iN_jR_j + B(\delta_{ij} - N_iN_j)R_j]dV_3 \Big|_{\tilde{x}_4 = x_4^\circ} = p_i \,. \quad (6.7)$$

Тогда закон сохранения импульса примет вид следующих интегральных уравнений:

$$\iiint [AN_iN_jR_j + B(\delta_{ij} - N_iN_j)R_j]dV_3 \Big|^{\tilde{x}_4 = x_4} =$$

$$= p_i - \int_{\tilde{x}_4 = x_4^\circ}^{\tilde{x}_4 = x_4} [\iiint CR_i dV_3]dx_4 \quad .$$

Получим законы сохранения в дифференциальной форме. Дифференцируя последние равенства по верхнему пределу, перейдем к дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\iiint [AN_iN_jR_j + B(\delta_{ij} - N_iN_j)R_j]dV_3 = -\iiint CR_i dV_3$$

$$\begin{cases} A\dfrac{\partial}{\partial x_4}\iiint [N_jR_j]dV_3 = -C\iiint [N_jR_j]dV_3 \\ B\dfrac{\partial}{\partial x_4}\iiint [(\delta_{ij} - N_iN_j)R_j]dV_3 = -C\iiint [R_j(\delta_{ij} - N_iN_j)]dV_3. \end{cases}$$

Проводя интегрирование записанных уравнений и учитывая (6.7), получим:

$$\begin{cases} \iiint [R_jN_j]dV_3 = \dfrac{1}{A}p_jN_je^{-\frac{C}{A}(x_4 - x_4^\circ)} \\ \iiint [R_j(\delta_{ij} - N_iN_j)]dV_3 = \dfrac{1}{B}p_j(\delta_{ij} - N_iN_j)e^{-\frac{C}{B}(x_4 - x_4^\circ)} \end{cases}$$

или

$$\iiint R_i dV_3 = p_j\{\frac{N_iN_j}{A}e^{-\frac{C}{A}(x_4 - x_4^\circ)} + \frac{(\delta_{ij} - N_iN_j)}{B}e^{-\frac{C}{B}(x_4 - x_4^\circ)}\}\,.$$

Разрешая последнее равенство относительно p_i, найдем:

$$p_i = AN_i e^{\frac{C}{A}(x_4 - x_4^\circ)} \iiint [R_j N_j] dV_3 +$$

$$+ Be^{\frac{C}{B}(x_4 - x_4^\circ)} \iiint [R_j (\delta_{ij} - N_i N_j)] dV_3 .$$

2. Законы сохранения, соответствующие $\delta(\frac{1}{2}\omega^\circ_{\alpha\beta})$.

Представим уравнения закона сохранения момента импульса (6.4) в виде тензорного уравнения:

$$\widetilde{H}_{ij} = 0 .$$

Перепишем эти уравнения в виде системы двух векторных уравнений:

$$\widetilde{B}_i = -2\widetilde{H}_{ij} N_j = 0$$

$$\widetilde{E}_i = ic\widetilde{H}_{\alpha\beta} N_\gamma Э_{\alpha\beta\gamma i} = 0 .$$

Это представление единственно, так как любой антисимметричный тензор $\widetilde{H}_{ij}$ можно представить в виде:

$$\widetilde{H}_{ij} = -\frac{1}{2}(\widetilde{B}_i N_j - \widetilde{B}_j N_i) + \frac{i}{2c} \widetilde{E}_n N_m Э_{nmij} .$$

Таким образом:

$$\widetilde{H}_{nm} = \int CR_i (x_l - x_l^\circ) Э_{nmli} dV +$$

$$+ \oint [BR_i (x_l - x_l^\circ) Э_{nmli} dF +$$

$$+ \oint ((A - B) R_j N_j (x_l - x_l^\circ) - 2\chi R_l) N_i Э_{nmli}] dF = 0 .$$

Разбивая эту систему на две подсистемы, получим:

$$\widetilde{B}_m = -2\widetilde{H}_{nm} N_n =$$

$$= -2 \int CR_i (x_l - x_l^\circ) N_n Э_{nmli} dV -$$

$$-2 \oint [BR_i (x_l - x_l^\circ) N_n Э_{nmli} dF = 0 ,$$

$$\widetilde{E}_k = ic\widetilde{H}_{nm} N_s Э_{nmsk} =$$

$$= 2ic\{ \int [CR_i (\delta_{ik} - N_i N_k)(x_l - x_l^\circ) N_l -$$

$$- CR_i N_i (x_l - x_l^\circ)(\delta_{kl} - N_k N_l)] dV +$$

$$+ \oint [B\dot{R}_i (\delta_{ik} - N_i N_k)(x_l - x_l^\circ) N_l -$$

$$- BR_i N_i (x_l - x_l^\circ)(\delta_{kl} - N_k N_l)] dF +$$

$$- \oint [(A - B) R_i N_i (x_l - x_l^\circ) - 2\chi R_l](\delta_{kl} - N_k N_l) dF\} = 0.$$

По аналогии с алгоритмом, реализованном при выводе законов сохранения импульсов, проведем внутреннее интегрирование, сделаем подстановки, полученные при выводе законов сохранения импульсов, и приведем систему к системе интегральных уравнений. Для этого обозначим за M_m^B и M_k^A члены, не зависящие от x_4:

$$B \iiint R_i (x_l - x_l^\circ) N_n Э_{nmli} dV_3 \Big|_{\widetilde{x}_4 = x_4^\circ} = M_m^B$$

$$A \iiint R_i N_i (x_l - x_l^\circ)(\delta_{kl} - N_k N_l) dV_3 \Big|_{\widetilde{x}_4 = x_4^\circ} =$$

$$= -M_k^A + \frac{2\chi}{B} p_l (\delta_{kl} - N_k N_l) .$$

Получим:

$$B \iiint R_i (x_l - x_l^\circ) N_n Э_{nmli} dV_3 \Big|^{\widetilde{x}_4 = x_4} =$$

$$= M_m^B - C \int_{\widetilde{x}_4 = x_4^\circ}^{\widetilde{x}_4 = x_4} \iiint R_i (x_l - x_l^\circ) N_n Э_{nmli} dV_3 d\widetilde{x}_4$$

и

$$A \iiint R_i N_i (x_l - x_l^\circ)(\delta_{kl} - N_k N_l) dV_3 \Big|^{\widetilde{x}_4 = x_4} = -M_k^A +$$

$$+ \int_{\widetilde{x}_4 = x_4^\circ}^{\widetilde{x}_4 = x_4} [C(\widetilde{x}_4 - x_4^\circ) \iiint R_i (\delta_{ik} - N_i N_k) dV_3 -$$

$$- C \iiint R_i N_i (x_l - x_l^\circ)(\delta_{kl} - N_k N_l) dV_3] d\widetilde{x}_4 -$$

$$-\frac{1}{A}e^{\frac{C}{A}(x_4-x_4^\circ)}\frac{\partial}{\partial x_4}\{[B(x_4-x_4^\circ)+2\chi]\iiint R_l(\delta_{kl}-N_kN_l)dV_3\}-$$

$$-[B(\widetilde{x}_4-x_4^\circ)+2\chi]\iiint R_i(\delta_{ik}-N_iN_k)dV_3\ \Big|^{\widetilde{x}_4=x_4}.$$

Переходя от системы интегральных уравнений к системе дифференциальных уравнений, найдем:

$$B\frac{\partial}{\partial x_4}\iiint R_i(x_l-x_l^\circ)N_n Э_{nmli}dV_3+$$

$$+C\iiint R_i(x_l-x_l^\circ)N_n Э_{nmli}dV_3=0,$$

$$A\frac{\partial}{\partial x_4}\iiint R_iN_i(x_l-x_l^\circ)(\delta_{kl}-N_kN_l)dV_3+$$

$$+C\iiint R_iN_i(x_l-x_l^\circ)(\delta_{kl}-N_kN_l)dV_3=$$

$$=(1+\frac{2\chi C}{B^2})p_i(\delta_{ik}-N_iN_k)e^{-\frac{C}{B}(x_4-x_4^\circ)}.$$

Решая эту систему, получим:

$$B\iiint R_i(x_l-x_l^\circ)N_n Э_{nmli}dV_3=M_m^Be^{-\frac{C}{B}(x_4-x_4^\circ)}$$

$$A\iiint R_iN_i(x_l-x_l^\circ)(\delta_{kl}-N_kN_l)dV_3=$$

$$=[-M_k^A+\frac{2\chi}{B}p_i(\delta_{kl}-N_kN_l)]e^{-\frac{C}{A}(x_4-x_4^\circ)}+$$

$$+\frac{1}{(\frac{C}{A}-\frac{C}{B})}(1+\frac{2\chi_{,,}}{B^2})p_i(\delta_{ik}-N_iN_k)[e^{-\frac{C}{A}(x_4-x_4^\circ)}-e^{-\frac{C}{B}(x_4-x_4^\circ)}].$$

3. Закон сохранения, соответствующий $\delta(\frac{1}{4}\theta^\circ)$

Воспользуемся приведенным выше алгоритмом для преобразования закона сохранения (6.5). Получим следующие интегральные уравнения:

$$\int_{\widetilde{x}_4=x_4^\circ}^{\widetilde{x}_4=x_4}\iiint[CR_i(x_i-x_i^\circ)]dV_3d\widetilde{x}_4+$$

$$+\oiint[A_{ij}R_j(x_i-x_i^\circ)-(2\mu+4\lambda)R_jn_j]dF=0,$$

$$\iiint[A_{ij}R_j(x_i-x_i^\circ)-(2\mu+4\lambda)R_jN_j]dV_3\ \Big|_{\widetilde{x}_4=x_4^\circ}^{\widetilde{x}_4=x_4}+$$

$$+\int_{\widetilde{x}_4=x_4^\circ}^{\widetilde{x}_4=x_4}\iiint[CR_i(x_i-x_i^\circ)]dV_3d\widetilde{x}_4=$$

$$=B\iiint R_i(x_i-x_i^\circ)dV_3\ \Big|_{\widetilde{x}_4=x_4^\circ}^{\widetilde{x}_4=x_4}+$$

$$+[(A-B)(\widetilde{x}_4-x_4^\circ)-(2\mu+4\lambda)]\iiint R_jN_jdV_3\ \Big|_{\widetilde{x}_4=x_4^\circ}^{\widetilde{x}_4=x_4}+$$

$$+C\int_{\widetilde{x}_4=x_4^\circ}^{\widetilde{x}_4=x_4}\iiint R_i(x_i-x_i^\circ)dV_3d\widetilde{x}_4=0.$$

Заменим ранее вычисленные интегралы их значениями:

$$B\iiint R_i(x_i-x_i^\circ)dV_3\ \Big|_{\widetilde{x}_4=x_4^0}^{\widetilde{x}_4=x_4}+$$

$$+[(A-B)(x_4-x_4^\circ)-(2\mu+4\lambda)]\frac{1}{A}p_jN_je^{-\frac{C}{A}(x_4-x_4^0)}+$$

$$+C\int_{\widetilde{x}_4=x_4^0}^{\widetilde{x}_4=x_4}\iiint R_i(x_i-x_i^\circ)dV_3d\widetilde{x}_4=0.$$

Введем определение некоторого экзотического момента при $x_4=x_4^0$:

$$B\iiint R_i(x_i-x_i^\circ)dV_3\ \Big|_{\widetilde{x}_4=x_4^0}=M-\frac{(2\mu+4\lambda)}{A}p_iN_i.$$

Тогда предыдущую формулу можно представить в виде:

$$B\iiint R_i(x_i - x_i^\circ)dV_3 \Big|^{\bar{x}_4 = x_4} =$$

$$=[M - \frac{(2\mu+4\lambda)}{A} p_j N_j] -$$

$$-[(A-B)(x_4 - x_4^\circ) - (2\mu+4\lambda)]\frac{1}{A} p_j N_j e^{-\frac{C}{A}(x_4 - x_4^0)} -$$

$$-C\int\limits_{\bar{x}_4 = x_4^0}^{\bar{x}_4 = x_4} \iiint R_i(x_i - x_i^\circ) dV_3 d\bar{x}_4 = 0 .$$

Дифференцируя по верхнему пределу, перейдем от интегрального уравнения относительно $\iiint R_i(x_i - x_i^\circ)dV_3$ к дифференциальному:

$$B\frac{\partial}{\partial x_4}\iiint R_i(x_i-x_i^\circ)dV_3 + C\iiint R_i(x_i - x_i^\circ)dV_3 =$$

$$=[-(A-B)+(A-B)\frac{C}{A}(x_4-x_4^\circ) -$$

$$-(2\mu+4\lambda)\frac{C}{A}]\frac{1}{A}p_jN_je^{-\frac{C}{A}(x_4-x_4^0)} .$$

Найдем решение записанного дифференциального уравнения методом вариации постоянной. Решение однородного уравнения имеет вид:

$$B\iiint R_i(x_i-x_i^\circ)dV_3 = M(x_4)e^{-\frac{C}{B}(x_4-x_4^0)} .$$

В результате общее решение неоднородного уравнения принимает следующий вид:

$$B\iiint R_i(x_i-x_i^\circ)dV_3 = [M - \frac{(2\mu+4\lambda)}{A}p_jN_j]e^{-\frac{C}{B}(x_4-x_4^0)} +$$

$$+\frac{p_jN_j}{(A-B)}[\frac{A}{C}+\frac{(2\mu+4\lambda)}{A}](e^{-\frac{C}{B}(x_4-x_4^0)} - e^{-\frac{C}{A}(x_4-x_4^0)}) +$$

$$+\frac{p_jN_j}{A}(x_4-x_4^\circ)e^{-\frac{C}{A}(x_4-x_4^0)} .$$

4. Законы сохранения, соответствующие $\delta(\frac{1}{4}\theta_j^\circ)$.

Здесь также можно построить интегральные и дифференциальные формы законов сохранения (6.6). Приведем их к виду:

$$\int[(2\mu+4\lambda)R_p - 6\chi R_p + CR_iP_{ip}(x^\circ)]dV +$$

$$+\oint[A_{ij}R_jP_{ip}(x^\circ) - (2\mu+4\lambda)R_in_i(x_p-x_p^\circ) +$$

$$+\chi R_i n_j \text{Э}_{ij\alpha\beta}(x_n - x_n^\circ)\text{Э}_{pn\alpha\beta}]dF = 0 .$$

Выделяя интегрирование по времени, получим:

$$\int\limits_{\bar{x}_4=x_4^0}^{\bar{x}_4=x_4}\iiint[(2\mu+4\lambda-6\chi)R_p + CR_iP_{ip}(x^\circ)]dV_3 d\bar{x}_4 +$$

$$+\iiint[A_{ij}R_jP_{ip}(x^\circ) - (2\mu+4\lambda)R_iN_i(x_p-x_p^\circ) +$$

$$+\chi(x_n-x_n^\circ)R_iN_j\text{Э}_{ij\alpha\beta}\text{Э}_{pn\alpha\beta}]dV_3 \Big|_{\bar{x}_4=x_4^0}^{\bar{x}_4=x_4} = 0.$$

Соответствующая дифференциальная форма этого закона сохранения приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial x_4}\iiint[A_{ij}R_jP_{ip}(x^\circ) - (2\mu+4\lambda)R_iN_i(x_p-x_p^\circ) +$$

$$+\chi R_iN_j\text{Э}_{ij\alpha\beta}(x_n-x_n^\circ)\text{Э}_{pn\alpha\beta}]dV_3 =$$

$$=-\iiint[(2\mu+4\lambda-6\chi)R_p + CR_iP_{ip}(x^\circ)]dV_3 ,$$

где

$$A_{ij} = AN_iN_j + B(\delta_{ij}-N_iN_j)$$

$$P_{ip}(x^\circ) = (x_i-x_i^\circ)(x_p-x_p^\circ) - \frac{1}{2}\delta_{ip}(x_k-x_k^\circ)(x_k-x_k^\circ)$$

и

$$A_{ij}P_{ip}(x^\circ) = A[(x_i-x_i^\circ)N_i(x_p-x_p^\circ) - \frac{1}{2}N_p(x_k-x_k^\circ)(x_k-x_k^\circ)]N_j +$$

$$+B[(x_i-x_i^\circ)(x_p-x_p^\circ) - \frac{1}{2}\delta_{ip}(x_k-x_k^\circ)(x_k-x_k^\circ)](\delta_{ij}-N_iN_j) .$$