ГЛАВА 7
МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Предлагается естественное обобщение моделей сплошной среды на четырехмерный пространственно-временной континуум. Установлено, что полученные разрешающие уравнения в целом непротиворечивы, включают в себя полную систему уравнений электродинамики Максвелла. Этой задаче и некоторым родственным проблемам посвящена настоящая глава.

7.1. Уравнения Ампера

Запишем уравнения Эйлера базовой модели (3.1) в следующем виде

$$\chi \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x_j} Э_{nmji} =$$

$$= CR_i - \left(\frac{\mu}{2} + \lambda\right)\frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \mu\left[\frac{3}{2}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x_j} Э_{nmji}\right] \qquad (7.1)$$

Переходя в левой части к антисимметричному тензору напряжений H_{ij} в соответствии с (2.8), (3.2), и оставляя в правой части уравнений (7.1) члены, не содержащие χ, получим:

$$\frac{\partial H_{nm}}{\partial x_j} Э_{nmji} =$$

$$= 2C\left\{R_i - \frac{\left(\frac{\mu}{2} + \lambda\right)}{C}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{\mu}{C}\left[\frac{3}{2}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x_j} Э_{nmji}\right]\right\}$$

Если толковать правую часть этих уравнений как источник электромагнитного поля, то при соответствующем определении 4-вектора электрического тока:

$$J_i = R_i - \frac{\left(\frac{\mu}{2} + \lambda\right)}{C}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \frac{\mu}{C}\left[\frac{3}{2}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x_j} Э_{nmji}\right] \qquad (7.2)$$

уравнения (7.1) совпадают с известными уравнениями Ампера:

$$\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} Э_{\alpha\beta\gamma i} = \frac{J_i}{\varepsilon_M c^2} \qquad (7.3)$$

где $\varepsilon_M c^2 = \dfrac{1}{2C}$

Из (7.3) непосредственно следует свойство электрического тока (закон сохранения токов):

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (7.4)$$

Из определения электрического тока (7.2) и уравнений Ампера (7.3) вытекают уравнения, которые назовем уравнениями Эйнштейна для токов:

$$\frac{(\mu + \chi)}{\chi C}\frac{\partial J_i}{\partial x_j} Э_{ijnm} = -2\omega_{nm}$$

$$H_{nm} = -\frac{(\mu + \chi)}{C}\frac{\partial J_i}{\partial x_j} Э_{ijnm} \qquad (7.5)$$

Для электрических токов эти уравнения впервые были получены другим путем Эйнштейном еще 1923г. [20] при создании первого варианта единой теории поля.

Соответственно через проекции вектора электрического тока определим плотность трехмерного вектора электрического тока I_i и плотность электрического заряда ρ, а также напряженности электрического E_i и магнитного B_i полей:

$$J_i = I_i(\delta_{ij} - N_i N_j) + ic\rho N_i$$

$$I_i = J_k(\delta_{ik} - N_i N_k)$$

$$\rho = -\frac{i}{c} J_k N_k$$

$$H_{ij} = -\frac{1}{2}(B_i N_j - B_j N_i) + \frac{i}{2c} E_n N_m Э_{nmij} \qquad (7.6)$$

В развернутой форме, в проекциях на временную и пространственные оси, уравнения Ампера с учетом (7.6) перепишутся в виде

$$\frac{i}{c}\left[\frac{\partial E_n}{\partial x_m}(\delta_{nm} - N_n N_m) - \frac{\rho}{\varepsilon_M}\right]N_i +$$

$$+\left[-\frac{\partial B_n}{\partial x_m}Э_{mnj}N_j - \frac{i}{c}\frac{\partial E_i}{\partial x_k}N_k - \frac{I_j}{\varepsilon_M c^2}(\delta_{ij} - N_i N_j)\right] = 0$$

В векторной форме они примут следующий традиционный вид:

$$div\overline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_M}, \qquad c^2 rot\overline{B} - \frac{\partial\overline{E}}{\partial t} = \frac{\overline{I}}{\varepsilon_M} \qquad (7.7)$$

7.2 Уравнения Фарадея

Рассмотрим уравнения совместности

$$\frac{\partial\omega_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad (7.8)$$

Учитывая уравнения (3.1), перепишем равенства (7.8)

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial B_n}{\partial x_m}(\delta_{nm} - N_n N_m)\right]N_i +$$

$$+\frac{i}{2c}\left[\frac{\partial B_k}{\partial t}(\delta_{ki} - N_k N_i) - \frac{\partial E_n}{\partial x_m}Э_{nmk}N_k\right] = 0$$

Последние соотношения нетрудно представить в векторной форме:

$$div\overline{B} = 0, \qquad \frac{\partial\overline{B}}{\partial t} + rot\overline{E} = 0 \qquad (7.9)$$

Уравнения (7.9) в точности совпадают с уравнениями Фарадея. Совокупность уравнений (7.7) и (7.9) образуют систему уравнений Максвелла. Таким образом, сформулированная теория содержит в качестве подсистемы уравнения Максвелла.

7.3. Уравнения Эйнштейна для токов

Известно, что из уравнений Максвелла напряженности E_i и B_i, а значит, и антисимметричные тензоры поворотов ω_{ij} и напряжений H_{ij} определяются через известный 4-вектор тока J_i. Уравнения на J_i

в рамках теории Максвелла сформулированы лишь частично (7.4), и токи задаются произвольно. В развиваемой здесь модели имеется возможность построить уравнения для токов и, тем самым, замкнуть модель.

Заменяя H_{ij} в левой части (7.5) через напряженности E_i и B_i, получим уравнения неразрывности токов, записанные в векторной форме:

$$\begin{cases} B_i = 2\dfrac{(\mu+\chi)}{C}\dfrac{\partial I_\alpha}{\partial x_\beta}N_j Э_{\alpha\beta j} \\ E_i = 2\dfrac{(\mu+\chi)}{C}\left[-\dfrac{\partial\rho}{\partial x_j}(\delta_{ij} - N_i N_j) + \dfrac{\partial I_i}{\partial t}\right] \end{cases} \qquad (7.10)$$

$$\begin{cases} \overline{B} = -2\dfrac{(\mu+\chi)}{C}rot\overline{I} \\ \overline{E} = -2\dfrac{(\mu+\chi)}{C}\left(grad\rho - \dfrac{\partial\overline{I}}{\partial t}\right) \end{cases}$$

7.4.Уравнения электродинамики в токах

С помощью полученных соотношений (7.5) или (7.10) исключим из уравнений Ампера антисимметричный тензор H_{ij}:

$$(\mu+\chi)\frac{\partial^2 J_i}{\partial x_j \partial x_j} - CJ_i = 0 \qquad (7.11)$$

Отметим, что предложенная форма записи уравнений электродинамики, по-видимому, получена впервые.

7.5. Уравнения Дирака

Путем «факторизации» оператора Клейна-Гордона [23] в уравнениях (7.11), его можно представить в виде произведения двух операторов Дирака:

$$\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{C}{(\mu+\chi)}(\ldots) =$$

$$= [i\gamma^n \frac{\partial(\ldots)}{\partial x_n} + \sqrt{\frac{C}{(\mu+\chi)}}(\ldots)][i\gamma^n \frac{\partial(\ldots)}{\partial x_n} - \sqrt{\frac{C}{(\mu+\chi)}}(\ldots)]$$

где γ^n - матрицы Дирака.

Таким образом, построена новая форма уравнений электродинамики, основными неизвестными которой являются компоненты 4-вектора плотности электрического тока или спинора, построенного по его компонентам, а напряженности вычисляются из уравнений Эйнштейна (7.10).

7.6. О калибровке Лоренца

Отметим, что соленоидальность вектор-потенциала A_i в классической электродинамике приводит к наложению связи, выраженной калибровочным соотношением Лоренца $\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0$. В классической электродинамике имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} Э_{\alpha\beta\gamma i} = \frac{J_i}{\varepsilon_M c^2}, \qquad H_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_n}{\partial x_m} Э_{nm\alpha\beta}$$

и, следовательно:

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_m \partial x_m} = \frac{J_i}{\varepsilon_M c^2}$$

Таким образом, решение системы уравнений Максвелла сводится к решению уравнений Ампера, а уравнения Фарадея при этом удовлетворяются тождественно за счет введения вектор-потенциала. В механике сплошной среды такая постановка задачи эквивалентна представлению решения в перемещениях.

Если уравнения Ампера в потенциалах получать как уравнения Эйлера некоторого функционала

$$\delta \iiiint [H_{ij} H_{ij} + \frac{J_i}{\varepsilon_M c^2} A_i] dV = 0$$

калибровочное соотношение следует учитывать как связь:

$$\iiiint [2H_{ij}\delta H_{ij} + \frac{J_i}{\varepsilon_M c^2}\delta A_i] dV = \iiiint [-H_{\alpha\beta}\delta \frac{\partial A_i}{\partial x_\gamma} Э_{i\gamma\alpha\beta} + \frac{J_i}{\varepsilon_M c^2}\delta A_i] dV =$$

$$= \iiiint [-\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} Э_{\alpha\beta\gamma i}\delta A_i + \frac{J_i}{\varepsilon_M c^2}\delta A_i] dV + \oiiint [H_{\alpha\beta} n_\gamma Э_{\alpha\beta\gamma i}\delta A_i dF = 0$$

Введем ее, воспользовавшись методом неопределенных множителей Лагранжа, на неопределенном множителе $\frac{J}{\varepsilon_M c^2}$:

$$0 = \iiiint [-\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} Э_{\alpha\beta\gamma i}\delta A_i + \frac{J_i}{\varepsilon_M c^2}\delta A_i + \frac{J}{\varepsilon_M c^2}\delta \frac{\partial A_i}{\partial x_i}] dV +$$

$$+ \oiiint [H_{\alpha\beta} n_\gamma Э_{\alpha\beta\gamma i}\delta A_i dF =$$

$$= \iiiint [-\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} Э_{\alpha\beta\gamma i} + \frac{1}{\varepsilon_M c^2}(J_i - \frac{\partial J}{\partial x_i})]\delta A_i dV +$$

$$+ \oiiint [H_{\alpha\beta} n_\gamma Э_{\alpha\beta\gamma i} + \frac{J}{\varepsilon_M c^2} n_i]\delta A_i dF$$

Отсюда следует, что токи в уравнениях Максвелла определены с точностью до градиента функции J:

$$\frac{\partial^2 A_i}{\partial x_m \partial x_m} = \frac{1}{\varepsilon_M c^2}(J_i - \frac{\partial J}{\partial x_i})$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = 0$$

Из полученной системы следует, что скаляр J гармонический.

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = 0$$

С учетом гармоничности J перепишем уравнения Фарадея в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 A_i^*}{\partial x_m \partial x_m} = \frac{1}{\varepsilon_M c^2} J_i$$

$$\varepsilon_M c^2 \frac{\partial A_i^*}{\partial x_i} = 4J + x_i \frac{\partial J}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

что приводит к переопределению исходного вектор-потенциала A_i:

$$A_i = A_i^* - x_i \frac{J}{\varepsilon_M c^2}$$

Таким образом, последовательный учет соленоидальности приводит к однозначному определению вектор-потенциала как решения корректной условной вариационной краевой задачи. Новым моментом здесь является бигармоничность вектор-потенциалов A_i и A_i^*.

7.7. Закон Кулона

Из уравнений электродинамики в токах (7.11) при $C \to 0$ и $I_i = J_j(\delta_{ij} - N_i N_j) = 0$ следует, что одним из частных решений является:

$$J_i N_i = ic\rho = \frac{icQ}{r} \tag{7.12}$$

где $r = \sqrt{x_n x_m (\delta_{ij} - N_i N_j)}$ - пространственное расстояние от начала координат, Q - постоянная интегрирования. Соответственно из уравнений Эйнштейна для токов (7.10) следует:

$B_i = 0$

$$E_i = \frac{Q}{r^3} x_j (\delta_{ij} - N_i N_j) \tag{7.13}$$

Полученное решение описывает электромагнитное поле распределенной по закону (7.12) плотности заряда точно так же, как классическая электродинамика описывает электромагнитное поле

точечного заряда. Тогда Q можно отождествить с величиной электрического заряда, а решение (7.12) будем условно называть «электроном». Условность этого названия определяется наличием у электрона спина, который выделяет некоторое привилегированное пространственное направление, в то время как (7.12) является частным решением пространственно сферически симметричной задачи. Решение (7.12) не удовлетворительно и с той точки зрения, что обладает сингулярностью при $r \to 0$. Ценно оно тем, что при предельной простоте построения решения дает закон Кулона.

7.8. Несингулярный закон Кулона

Рассмотрим пространственно сферически симметричное решение уравнений электродинамики в токах (7.11) не полагая $C = 0$.
Тогда вместо (7.12) получим:

$$J_i N_i = ic\rho = icQ \frac{e^{-r\sqrt{\frac{C}{\chi}}}}{r} \tag{7.14}$$

Несингулярное решение для «электрона» тогда можно построить совершенно аналогично несингурярному решению для трещины, построенному в гл.4 в рамках модели когезионного поля. Строя линейную комбинацию решений (7.12) и (7.14) и определяя коэффициент линейной комбинации из требования ограниченности в нуле, получим:

$$\rho = Q \frac{1 - e^{-r\sqrt{\frac{C}{\chi}}}}{r} \tag{7.15}$$

Это решение ограничено во всем пространстве событий, асимптотически совпадает с законом Кулона на расстояниях, больших «классического радиуса электрона» $r_{кл} \sim \sqrt{\frac{\chi}{C}}$ и дает простейшую пространственно-временную структуру «электрона». Мы надеемся найти такое решение краевых задач модели электродинамики, сформулированной в настоящем разделе, которое описывало бы и спиновые свойства электрона.