ГЛАВА 8
МОДЕЛЬ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В главе предлагается модель сильных взаимодействий в теории поля, которая не может быть получена из уравнений электродинамики и, насколько известно авторам [21], [22], [23], ранее не была описана в рамках единой модели. Предлагается связывать кинематику сильных взаимодействий с шаровым тензором деформаций пространственно-временного континуума. Соответствующим образом определяется и силовая сторона задачи. Последовательность изложения материала в этой главе соответствует структуре главы 7.

8.1 Уравнение Юкавы

Запишем уравнения Эйлера (3.1) в следующем виде

$$(\frac{\mu}{2}+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=$$

$$=C[R_i-\frac{\chi}{C}\frac{\partial\omega_{nm}}{\partial x_j}Э_{nmji}-\frac{\mu}{C}(\frac{3}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\frac{\partial\omega_{nm}}{\partial x_j}Э_{nmji})] \qquad (8.1)$$

Подействуем на уравнение (8.1.) оператором дивергенции. Легко убедиться; что θ удовлетворяет уравнению типа Юкавы [21], [23], с помощью которого в физике описываются сильные взаимодействия:

$$(2\mu+\lambda)\Delta\theta-C\theta=0$$

Следовательно, можно предположить, что величина, являющаяся аналогом объемной деформации в механике твердого деформируемого тела, при описании материальных процессов для пространственно-временного континуума отвечает за сильные взаимодействия. С уравнением Юкавы связана постановка задачи сильных взаимодействий в перемещениях.

Попытаемся описать силовую сторону сильных взаимодействий. Переходя к шаровому тензору напряжений $\sigma\delta_{ij}$ в (8.1), и оставляя в правой части уравнений (8.1) все члены, не

содержащие $(\frac{\mu}{2}+\lambda)$, получим:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}=4C[R_i-\frac{\chi}{C}\frac{\partial\omega_{nm}}{\partial x_j}Э_{nmji}-\frac{\mu}{C}(\frac{3}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\frac{\partial\omega_{nm}}{\partial x_j}Э_{nmji})] \qquad (8.2)$$

Если толковать правую часть уравнений (8.2) как источник сильного поля, то при соответствующем определении 4-вектора тока «сильных» зарядов Y_i:

$$Y_i=R_i-\frac{\chi}{C}\frac{\partial\omega_{nm}}{\partial x_j}Э_{nmji}-\frac{\mu}{C}[\frac{3}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\frac{\partial\omega_{nm}}{\partial x_j}Э_{nmji}], \qquad (8.3)$$

получим следующее уравнение, определяющее силовую сторону модели сильных взаимодействий:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}=\frac{Y_i}{\varepsilon_Y c^2}, \qquad (8.4)$$

где $\varepsilon_Y c^2=\frac{1}{4C}$.

8.2. Свойство потенциальности тока «сильных» зарядов

Из уравнений (8.4) непосредственно следует свойство потенциальности 4-вектора тока «сильных» зарядов Y_i:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}Э_{ijnm}=0$$

Последнее соотношение можно переписать в виде:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}=\frac{\partial Y_j}{\partial x_i}. \qquad (8.5)$$

Таким образом, ротор вектора сильных токов равен нулю. Иначе говоря, поле сильных токов потенциально и существует скалярная функция, градиент которой определяет вектор сильных токов.

8.3. Уравнения Эйнштейна для тока «сильных» зарядов

С помощью формулы (8.3), определяющей 4-вектор тока «сильных» зарядов Y_i, и с учетом (8.4), запишем уравнение, которое находится путем исключения тензора поворотов. По построению также как и уравнение (7.5) это уравнение является уравнением совместности. По аналогии с (7.5) назовем его уравнением Эйнштейна для токов «сильных» зарядов Y_i:

$$\sigma = 4(2\mu+\lambda)\frac{\partial Y_i}{\partial x_i} \tag{8.6}$$

Таким образом, систему уравнений для модели сильных взаимодействий удалось привести к канонической гамильтоновой форме (8.4) и (8.6). Исключая токи Y_i с помощью (8.4), получим из (8.6) математическую формулировку модели в «напряжениях»:

$$(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i \partial x_i} - C\sigma = 0 \qquad Y_i = \frac{1}{4C}\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \tag{8.7}$$

8.4. Уравнения сильных взаимодействий в токах

Используя процедуру вывода уравнений электродинамики в токах, изложенную в гл. 7, воспользуемся уравнением Эйнштейна для "сильных" токов чтобы получить уравнения сильных взаимодействий.

Исключая из (8.7) потенциал σ, получим систему уравнений, определяющих математическую формулировку модели в «токах»:

$$(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 Y_i}{\partial x_j \partial x_j} - CY_i = 0 \qquad \sigma = 4(2\mu+\lambda)\frac{\partial Y_i}{\partial x_i} \tag{8.8}$$

8.5. Формулировка краевой задачи

Рассмотрим вариационное уравнение единой теории для случая потенциального поля (поле сильных взаимодействий потенциально). Имеем:

$$\delta L = \int [CR_i - (\mu+\chi)\frac{\partial^2 R_i}{\partial x_j \partial x_j} - (\mu+\lambda-\chi)\frac{\partial^2 R_j}{\partial x_i \partial x_j}]\delta R_i dV -$$

$$+\oint [(\mu+\chi)\frac{\partial R_i}{\partial x_j} n_j + \lambda\frac{\partial R_j}{\partial x_j} n_i + (\mu-\chi)\frac{\partial R_j}{\partial x_i} n_j + A_{ij} R_j]\delta R_i dF = 0.$$

Тогда краевая задача теории потенциальных полей относительно потенциальной функции R будет иметь вид:

$$\int [C\frac{\partial R}{\partial x_i} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^3 R}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j}]\delta\frac{\partial R}{\partial x_i} dV -$$

$$+\oint [2\mu\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j} n_j + \lambda\frac{\partial^2 R}{\partial x_j \partial x_j} n_i + A_{ij}\frac{\partial R}{\partial x_j}]\delta\frac{\partial R}{\partial x_j} dF = 0.$$

В дальнейшем будем обозначать нормальную производную на гиперповерхности F точкой над функцией $\frac{\partial R}{\partial x_k} n_k = \dot{R}$. Запишем цепочку равенств, приводящих к замкнутой вариационной постановке краевых задач для сильных взаимодействий:

$$\int [C\frac{\partial R}{\partial x_i} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^3 R}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j}]\delta\frac{\partial R}{\partial x_i} dV -$$

$$+\oint [2\mu\frac{\partial \dot{R}}{\partial x_i} + \lambda\frac{\partial^2 R}{\partial x_j \partial x_j} n_i + A_{ij}\frac{\partial R}{\partial x_j}]\delta\frac{\partial R}{\partial x_i} dF =$$

$$= \int [-C\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_i} + (2\mu+\lambda)\frac{\partial^4 R}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j \partial x_j}]\delta R dV +$$

$$+\oint [C\dot{R} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 \dot{R}}{\partial x_j \partial x_j}]\delta R dF +$$

$$+\oint [2\mu\frac{\partial \dot{R}}{\partial x_i} + \lambda\frac{\partial^2 R}{\partial x_j \partial x_j} n_i +$$

$$+ A\dot{R} n_i + B\frac{\partial R}{\partial x_j}(\delta_{ij} - n_i n_j)]\delta\dot{R} n_i dF +$$

$$+\oint [2\mu\frac{\partial \dot{R}}{\partial x_i} + \lambda\frac{\partial^2 R}{\partial x_j \partial x_j} n_i + A\dot{R} n_i +$$

$$+ B\frac{\partial R}{\partial x_j}(\delta_{ij} - n_i n_j)]\delta\frac{\partial R}{\partial x_k}(\delta_{ik} - n_i n_k) dF =$$

$$= \int [-C\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_i} + (2\mu+\lambda)\frac{\partial^4 R}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j \partial x_j}]\delta R dV +$$

$$+\oint [C\dot{R} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 \dot{R}}{\partial x_j \partial x_j}]\delta R dF +$$

$$+\oint [(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 R}{\partial x_j \partial x_j} - 2\mu\Delta R + A\dot{R}]\delta \dot{R} dF +$$

$$+\oint [2\mu\frac{\partial \dot{R}}{\partial x_j} + B\frac{\partial R}{\partial x_j}](\delta_{ij} - n_i n_j)\delta\frac{\partial R}{\partial x_k}(\delta_{ik} - n_i n_k)dF = 0.$$

Взяв по частям выражение в последней строке записанного выражения, получим окончательно:

$$\int [-C\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_i} + (2\mu+\lambda)\frac{\partial^4 R}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j \partial x_j}]\delta R dV +$$

$$+\oint [(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_i} - 2\mu\Delta R + A\dot{R}]\delta \dot{R} dF +$$

$$+\oint \{C\dot{R} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 \dot{R}}{\partial x_i \partial x_i} - \Delta[2\mu\dot{R} + BR]\}\delta R dF +$$

$$+\sum \oint \frac{\partial}{\partial x_k}[2\mu\dot{R} + BR]v_k \delta R df = 0 \quad . \tag{8.9}$$

8.6. Уравнение Шредингера

Путем разделения переменных $\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} = a_j \sigma$ в операторе в уравнении Эйлера (8.7), его можно представить в виде системы двух операторов:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}N_j = (a_j N_j)\sigma,$$

$$\Delta\sigma = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_j \partial x_k}(\delta_{jk} - N_j N_k) = [\frac{C}{(2\mu+\lambda)} - a_j a_k N_j N_k]\sigma,$$

где a_j - пространственно-подобный 4-вектор собственных чисел с чисто мнимой четвертой компонентой, $\Delta(\ldots)$ - трехмерный оператор Лапласа. Исключая из этой системы уравнений саму функцию σ, получим релятивистски-инвариантное уравнение типа Шредингера [23], [24]:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}N_j = \frac{a_j N_j}{[\frac{C}{(2\mu+\lambda)} - a_j a_k N_j N_k]}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_j \partial x_k}(\delta_{jk} - N_j N_k)$$

Приводя его к традиционному виду и учитывая определение радиуса Юкавы $r_Y = \sqrt{\frac{(2\mu+\lambda)}{C}}$ и комптоновской длины $r_K = \frac{\hbar c}{E}$ [21], получим:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}N_j = (a_j N_j)\frac{\Delta\sigma}{[\frac{C}{(2\mu+\lambda)} - a_j a_k N_j N_k]} =$$

$$= \frac{\frac{E}{\hbar c}}{[\frac{C}{(2\mu+\lambda)} - (\frac{E}{\hbar c})^2]}\Delta\sigma,$$

где $\quad a_j N_j = \frac{E}{\hbar c}.$

В результате последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$i\hbar\frac{\partial\sigma}{\partial t}=-\frac{\hbar c}{2}\frac{(\frac{1}{r_Y}+\frac{E}{\hbar c})-(\frac{1}{r_Y}-\frac{E}{\hbar c})}{[(\frac{1}{r_Y})^2-(\frac{E}{\hbar c})^2]}\Delta\sigma=$$

$$=-\frac{\hbar c}{2}[\frac{1}{(\frac{1}{r_Y}-\frac{E}{\hbar c})}-\frac{1}{(\frac{1}{r_Y}+\frac{E}{\hbar c})}]\Delta\sigma\approx-\frac{E}{2}\frac{r_K}{(\frac{1}{r_Y}-\frac{1}{r_K})}\Delta\sigma \quad , \tag{8.10}$$

где $\frac{1}{r_K}=\frac{E}{\hbar c}$

Полученное соотношение (8.10) определяет линейную связь производной по времени и оператором Лапласа и поэтому является уравнением типа Шредингера. Последнее выражение показывает, что при $v<<c$ из релятивистки инвариантного уравнения типа Шредингера (8.10) можно прийти к традиционной форме уравнения Шредингера [23].

8.7. Тензор энергии-импульса потенциальных полей

Уравнение (8.7) дает возможность сформулировать дифференциальный закон сохранения энергии-импульса. Сначала получив выражение для тензора энергии импульса. Для этого умножим левую часть (8.7) на $\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}$:

$$[(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i\partial x_i}-C\sigma]\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}=0$$

Взяв по частям, получим определение тензора энергии-импульса потенциальных полей:

$$(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_j\partial x_j}\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}-C\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}=$$

$$=(2\mu+\lambda)\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}\frac{\partial\sigma}{\partial x_i})-(2\mu+\lambda)\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x_i\partial x_j}-C\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}=$$

$$=(2\mu+\lambda)\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}\frac{\partial\sigma}{\partial x_i})-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[(2\mu+\lambda)\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}+C\sigma^2]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_j}\{(2\mu+\lambda)\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}-\frac{1}{2}\delta_{ij}[(2\mu+\lambda)\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}+C\sigma^2]\} \tag{8.11}$$

$$=\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}=0$$

Здесь по определению,

$$T_{ij}=(2\mu+\lambda)\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}-\frac{1}{2}\delta_{ij}[(2\mu+\lambda)\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}\frac{\partial\sigma}{\partial x_j}+C\sigma^2], \tag{8.12}$$

где тензор T_{ij} - тензор энергии-импульса потенциальных полей.

Таким образом, уравнение (8.11) является законом сохранения энергии-импульса потенциальных полей.

Проинтегрируем (8.11) по 4-объему и воспользуемся теоремой Остроградского - Гаусса:

$$0=\iiiint\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}dV=\oiiint T_{ij}n_jdF.$$

Разобьем гиперповерхность интегрирования на гиперцилиндрическую поверхность, удаленную в пространственную бесконечность, с осью, параллельной орту времени N_i, и две гиперплоскости, перпендикулярные орту времени N_i. В дальнейшем мы будем называть эти гиперплоскости "временными донышками".

$$0=\oiiint T_{ij}n_jdF=\oiiint_{Цилиндр} T_{ij}n_jdF+\iiint T_{ij}N_jdV_3\Big|_{x_4=x_4^0}^{x_4=x_4^1}$$

Заметим, что для локальных физических процессов $T_{ij}\to 0$ на гиперцилиндрической поверхности, поэтому:

$$\oiiint\limits_{Цилиндр} T_{ij} n_j dF = 0, \quad \iiint T_{ij} N_j dV_3 \Big|_{x_4 = x_4^0}^{x_4 = x_4^1} = 0$$

Из второго равенства следует:

$$\iiint T_{ij} N_j dV_3 \Big|^{x_4 = x_4^1} = \iiint T_{ij} N_j dV_3 \Big|_{x_4 = x_4^0} = T_i \quad (8.13)$$

Следовательно поток тензора энергии - импульса через любое "временное донышко" постоянен и равен векторной константе T_i, которую будем называть вектором энергии - импульса. Следуя СТО [20], [21], представим T_i в виде:

$$T_i = p_i c + iEN_i \qquad (8.14)$$

где p_i - 3-импульс ($p_i N_i = 0$), а E - энергия потенциального поля.

Естественно ввести и понятие массы m потенциального поля, используя (8.14):

$$T_i T_i = p_i p_i c^2 - E^2 = -m^2 c^4 \qquad (8.15)$$

Возвращаясь к методу разделения переменных $\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} = a_j \sigma$, запишем (8.13) через a_j и σ, чтобы связать волновой вектор a_i с вектором энергии-импульса T_i. Тем самым мы пытаемся «заменить» гипотезу Де Бройля о коллинеарности этих векторов соответствующей теоремой.

8.8 «Теорема Де Бройля»

Подставляя $\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} = a_j \sigma$ в (8.13), с учетом (8.12) получим:

$$T_i = \iiint T_{ij} N_j dV_3 = \iiint \{(2\mu + \lambda) \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} -$$

$$- \frac{1}{2} \delta_{ij} [(2\mu + \lambda) \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} + C\sigma^2]\} N_j dV_3 =$$

$$= \iiint \{(2\mu + \lambda) a_i a_j \sigma^2 -$$

$$- \frac{1}{2} \delta_{ij} [(2\mu + \lambda) a_k a_k \sigma^2 + C\sigma^2]\} N_j dV_3 =$$

$$= \{(2\mu + \lambda) a_i a_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} [(2\mu + \lambda) a_k a_k + C]\} N_j \iiint \sigma^2 dV_3$$

Учитывая, что в соответствии с (8.7) a_i удовлетворяет условию

$$(2\mu + \lambda) a_k a_k = C \qquad (8.16)$$

перепишем найденное выражение для T_i в виде:

$$T_i = \{(2\mu + \lambda) a_i a_j N_j - CN_i\} \iiint \sigma^2 dV_3 \qquad (8.17)$$

Соотношение (8.17) дает формулировку «теоремы де Бройля» как альтернативу гипотезе де Бройля и устанавливает связь между вектором энергии импульса и волновым 4–вектором. В частности из (8.17) строго следует коллениарность пространственных проекций этих векторов.

Однако наряду с этим фактом из (8.17) в общем случае одновременно следует и ортогональность волнового вектора a_i и вектора энергии-импульса T_i:

$$\begin{aligned} T_i a_i &= \{(2\mu + \lambda) a_i a_i a_j N_j - C a_i N_i\} \iiint \sigma^2 dV_3 = \\ &= \{C a_j N_j - C a_i N_i\} \iiint \sigma^2 dV_3 = 0 \end{aligned} \qquad (8.18)$$

Покажем, что волновой вектор выражается через компоненты вектора энергии импульса. Используя (8.18), получим:

$$T_i T_i = \{(2\mu + \lambda) a_i T_i a_j N_j - CT_i N_i\} \iiint \sigma^2 dV_3 =$$

$$= -CT_i N_i \iiint \sigma^2 dV_3$$

Отсюда следует связь:

$$C \iiint \sigma^2 dV_3 = -\frac{T_k T_k}{T_i N_i} \qquad (8.19)$$

Равенством (8.19) определяется интеграл от потенциала сильных взаимодействий (нормировка) через C и компоненты вектора энергии импульса. Подставляя (8.19) в (8.17), получим последовательно:

$$-T_i = \{\frac{(2\mu+\lambda)}{C} a_i a_j N_j - N_i\} \frac{T_n T_n}{T_m N_m}$$

$$-T_i \frac{T_m N_m}{T_n T_n} = \frac{(2\mu+\lambda)}{C} a_i a_j N_j - N_i$$

$$N_i - \frac{T_i T_j N_j}{T_n T_n} = \frac{(2\mu+\lambda)}{C} a_i a_j N_j$$

$$\frac{(2\mu+\lambda)}{C} a_i a_j N_j = N_j(\delta_{ij} - \frac{T_i T_j}{T_n T_n})$$

Свертывая последнее равенство с ортом времени N_i, найдем:

$$a_j N_j = \sqrt{\frac{C}{(2\mu+\lambda)}} \sqrt{N_i N_j(\delta_{ij} - \frac{T_i T_j}{T_n T_n})}$$

и окончательно:

$$a_i = \sqrt{\frac{C}{(2\mu+\lambda)}} \frac{N_j(\delta_{ij} - \frac{T_i T_j}{T_n T_n})}{\sqrt{N_p N_q(\delta_{pq} - \frac{T_p T_q}{T_m T_m})}}$$

Таким образом, волновой вектор определяется через компоненты вектора энергии импульса. Полученное соотношение, будучи подставлено в релятивистский аналог уравнения Шредингера принципиально позволяет идентифицировать константу С через постоянную Планка.

ГЛАВА 9
МОДЕЛЬ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В данной славе предлагается модель "слабых взаимодействий" как модель, кинематика которой определяется тензором-девиатором деформаций, а силовая сторона - тензором девиатором напряжений. Последовательность изложения материала, повторяет последовательность, принятую в гл. 7.

9.1. Определение "слабых" токов

Запишем уравнения Эйлера (3.1) в следующем виде

$$2\mu \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_j} = CR_i - \chi \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x_j} Э_{nmji} - (\frac{\mu}{2} + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} . \quad (9.1)$$

Переходя к тензору-девиатору напряжений τ_{ij} в соответствии с (3.1), и оставляя в правой части уравнений (9.1) все члены, не содержащие μ, получим:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = C\{R_i - \frac{\chi}{C} \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x_j} Э_{nmji} - \frac{(\frac{\mu}{2} + \lambda)}{C} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\} . \quad (9.2)$$

Будем толковать правую часть уравнений (9.2) как источник слабого поля и дадим соответствующее определение 4-вектора тока «слабых» зарядов G_i :

$$G_i = R_i - \frac{\chi}{C} \frac{\partial \omega_{nm}}{\partial x_j} Э_{nmji} - \frac{(\frac{\mu}{2} + \lambda)}{C} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} . \quad (9.3)$$

Тогда получим следующие уравнения для модели слабых взаимодействий:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{G_i}{\varepsilon_G c^2} , \quad (9.4)$$

где $\varepsilon_Y c^2 = \frac{1}{C}$.