энергии импульса. Подставляя (8.19) в (8.17), получим последовательно:

$$-T_i = \{\frac{(2\mu+\lambda)}{C} a_i a_j N_j - N_i\}\frac{T_n T_n}{T_m N_m}$$

$$-T_i \frac{T_m N_m}{T_n T_n} = \frac{(2\mu+\lambda)}{C} a_i a_j N_j - N_i$$

$$N_i - \frac{T_i T_j N_j}{T_n T_n} = \frac{(2\mu+\lambda)}{C} a_i a_j N_j$$

$$\frac{(2\mu+\lambda)}{C} a_i a_j N_j = N_j(\delta_{ij} - \frac{T_i T_j}{T_n T_n})$$

Свертывая последнее равенство с ортом времени N_i, найдем:

$$a_j N_j = \sqrt{\frac{C}{(2\mu+\lambda)}}\sqrt{N_i N_j(\delta_{ij} - \frac{T_i T_j}{T_n T_n})}$$

и окончательно:

$$a_i = \sqrt{\frac{C}{(2\mu+\lambda)}}\,\frac{N_j(\delta_{ij} - \frac{T_i T_j}{T_n T_n})}{\sqrt{N_p N_q(\delta_{pq} - \frac{T_p T_q}{T_m T_m})}}$$

Таким образом, волновой вектор определяется через компоненты вектора энергии импульса. Полученное соотношение, будучи подставлено в релятивистский аналог уравнения Шредингера принципиально позволяет идентифицировать константу С через постоянную Планка.

ГЛАВА 9
МОДЕЛЬ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В данной славе предлагается модель "слабых взаимодействий" как модель, кинематика которой определяется тензором-девиатором деформаций, а силовая сторона - тензором девиатором напряжений. Последовательность изложения материала, повторяет последовательность, принятую в гл. 7.

9.1. Определение "слабых" токов

Запишем уравнения Эйлера (3.1) в следующем виде

$$2\mu\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial x_j} = CR_i - \chi\frac{\partial\omega_{nm}}{\partial x_j}\text{Э}_{nmji} - (\frac{\mu}{2}+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}. \quad (9.1)$$

Переходя к тензору-девиатору напряжений τ_{ij} в соответствии с (3.1), и оставляя в правой части уравнений (9.1) все члены, не содержащие μ, получим:

$$\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} = C\{R_i - \frac{\chi}{C}\frac{\partial\omega_{nm}}{\partial x_j}\text{Э}_{nmji} - \frac{(\frac{\mu}{2}+\lambda)}{C}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\}. \quad (9.2)$$

Будем толковать правую часть уравнений (9.2) как источник слабого поля и дадим соответствующее определение 4-вектора тока «слабых» зарядов G_i:

$$G_i = R_i - \frac{\chi}{C}\frac{\partial\omega_{nm}}{\partial x_j}\text{Э}_{nmji} - \frac{(\frac{\mu}{2}+\lambda)}{C}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}. \quad (9.3)$$

Тогда получим следующие уравнения для модели слабых взаимодействий:

$$\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{G_i}{\varepsilon_G c^2}, \quad (9.4)$$

где $\varepsilon_Y c^2 = \frac{1}{C}$.

Из определения 4-вектора тока «слабых» зарядов G_i (9.3), с учетом (8.4) и (7.3) следует следующее соотношение:

$$G_i = R_i - J_i - Y_i . \qquad (9.5)$$

9.2. Уравнения Эйнштейна для слабых токов

Выясним некоторые свойства 4-вектора тока «слабых» зарядов G_i, вытекающие из равенств (9.5). Учитывая (8.6) и (7.4), найдем:

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_i} = \frac{6\mu}{(2\mu+\lambda)} \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} \qquad (9.6)$$

Соотношения (9.5) и (8.5), (7.5) позволяют записать следующие равенства:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial G_i}{\partial x_j} Э_{ijnm} = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{\chi} \frac{\partial J_i}{\partial x_j} Э_{ijnm} \qquad (9.7)$$

Уравнения (9.6), (9.7) по аналогии с (7.5) назовем уравнениями Эйнштейна для токов «слабых» зарядов G_i.

9.3. Выделение "собственно слабых" токов

Рассмотрим систему (9.6)-(9.7) как неоднородную систему уравнений относительно токов «слабых» зарядов G_i с известными правыми частями («сильными» токами Y_i и электротоками J_i). Решение G_i можно представить в виде суммы функций:

$$G_i = G_i^G + G_i^M + G_i^Y . \qquad (9.8)$$

Здесь G_i^G - общее решение однородной системы (9.6)-(9.7):

$$\frac{\partial G_i^G}{\partial x_i} = 0 , \qquad \frac{\partial G_i^G}{\partial x_j} Э_{ijnm} = 0 , \qquad (9.9)$$

G_i^Y - частное решение неоднородной системы:

$$\frac{\partial G_i^Y}{\partial x_i} = \frac{6\mu}{(2\mu+\lambda)} \frac{\partial Y_i}{\partial x_i} , \qquad \frac{\partial G_i^Y}{\partial x_j} Э_{ijnm} = 0 , \qquad (9.10)$$

G_i^M - частное решение неоднородной системы:

$$\frac{\partial G_i^M}{\partial x_i} = 0 , \qquad \frac{\partial G_i^M}{\partial x_j} Э_{ijnm} = \frac{\mu}{\chi} \frac{\partial J_i}{\partial x_j} Э_{ijnm} . \qquad (9.11)$$

Тогда можно придать физический смысл однородному решению этой системы G_i^G - как «собственно слабому току», а частным решениям неоднородной задачи G_i^Y и G_i^M — как слабым токам, индуцированным соответственно сильными и электромагнитными взаимодействиями.

В соответствии с (9.9) «собственно слабый ток» обладает одновременно и свойством электротока (7.4) — свойством соленоидальности, и свойством «сильного» тока (8.5) — свойством потенциальности.

9.4. Кинематическая интерпретация слабых токов

Вектору перемещений и токам, в соответствии с (9.5), можно дать геометрическую интерпретацию. Запишем (9.5) в виде:

$$R_i = Y_i + J_i + G_i \qquad (9.12)$$

С точки зрения (9.12) токи разного рода являются частями перемещений, обладающими разными свойствами (7.4), (8.5) и (9.6)-(9.7).

Для более строгого разделения по свойствам, в соответствии с (9.8) и (9.12), целесообразно ввести определения:

- «сильно-слабый» ток $Y_i^Y = Y_i + G_i^Y$,
- «электро-слабый» ток $J_i^M = J_i + G_i^M$,
- «собственно слабый» ток G_i^G.

Тогда расщепление по свойствам токов (перемещений с разными свойствами) в (9.12) приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned} R_i &= Y_i + J_i + (G_i^G + G_i^Y + G_i^M) = \\ &= (Y_i + G_i^Y) + (J_i + G_i^M) + G_i^G = \qquad (9.13) \\ &= Y_i^Y + J_i^M + G_i^G . \end{aligned}$$

В соотношении (9.13), определяющем перемещения, «сильно-слабый» ток $Y_i^Y = Y_i + G_i^Y$ - составляет потенциальную часть перемещений R_i, «электро-слабый» ток $J_i^M = J_i + G_i^M$ - определяет вихревую часть перемещений R_i, а «собственно слабый» ток G_i^G - гармоническую часть перемещений R_i, так как он является одновременно и потенциальным и вихревым.

9.5. Формулировка уравнений модели слабого поля в напряжениях

По аналогии с механикой деформируемых тел и с моделью электродинамики, построенной выше, запишем систему уравнений совместности (1.14) (аналог уравнений Фарадея) для слабых взаимодействий

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_n \partial x_n} - \frac{\partial^2 \tau_{jn}}{\partial x_i \partial x_n} - \frac{\partial^2 \tau_{in}}{\partial x_j \partial x_n} + \frac{1}{3}\frac{\partial^2 \tau_{nm}}{\partial x_n \partial x_m}\delta_{ij}\right]Э_{jk\alpha\beta} = 0$$

в совокупности с уравнениями равновесия (9.4) (аналог уравнений Ампера).

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{G_i}{\varepsilon_G c^2}.$$

Эту систему уравнений, записанную относительно компонентов тензора-девиатора напряжений, можно интерпретировать как континуальную теорию слабых взаимодействий. Здесь конечно, следует учесть, что слабые токи G_i связаны с напряжениями τ_{ij} через следующую цепочку соотношений: (9.3), (1.16), (1.15), (1.13) и (3.2).

9.6. Модель теории нейтрино как модель "чисто слабых" взаимодействий

Рассмотрим краевую задачу единой теории поля (3.1) для полей, которые не обладают электромагнитными свойствами

$$\omega_{ij} = 0 \tag{9.14}$$

и свойствами сильных взаимодействий

$$\theta = 0. \tag{9.15}$$

Будем полагать, что таким комплексом свойств обладают только нейтрино. Из первого условия (9.14) следует потенциальность поля перемещений

$$R_i = \frac{\partial R}{\partial x_i} \tag{9.16}$$

из второго (9.15) - гармоничность поля перемещений

$$\theta = \frac{\partial R_i}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \tag{9.17}$$

Выше, в гл. 8 рассматривалась постановка краевых задач для потенциальных полей общего вида. Имея в виду (8.9) и (9.17) приведем математическую постановку исследуемой модели:

$$\oint \left[(2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_i} - 2\mu\Delta R + A\dot{R}\right]\delta\dot{R}dF +$$

$$+\oint \left\{C\dot{R} - (2\mu + \lambda)\frac{\partial^2 \dot{R}}{\partial x_i \partial x_i} - \Delta[2\mu\dot{R} + BR]\right\}\delta R dF +$$

$$+\sum \oint \frac{\partial}{\partial x_k}[2\mu\dot{R} + BR]v_k \delta R df = 0$$

(9.18)

Сформулируем связи, вытекающие из гармоничности R, вводя их на неопределенном множителе Лагранжа R^*:

$$\int CR^*\delta\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_i}dV - C\oint [R^*\delta\dot{R} - \dot{R}^*\delta R]dF = 0.$$

В результате, вариационное уравнение (9.18) принимает следующий вид условной вариационной задачи:

$$\int C\frac{\partial^2 R^*}{\partial x_i \partial x_i}\delta R dV + \oint [2\mu\ddot{R} + A\dot{R} - CR^*]\delta\dot{R}dF +$$

$$+\oint \{C\dot{R} + [2\mu\ddot{R} + B\dot{R}] + C\dot{R}^*\}\delta R dF +$$

$$+\sum \oint \frac{\partial}{\partial x_k}[2\mu\dot{R} + BR]v_k \delta R df = 0$$

Отсюда непосредственно следует, что для рассматриваемой модели имеется три основных варианта краевых задач:

Вариант 1. Краевая задача сводится к последовательности двух задач Дирихле - на искомую функцию и, соответственно, на сопряженную

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

$R = 0$ *на гиперповерхности*

$$\frac{\partial^2 R^*}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

$CR^* = 2\mu\ddot{R} + A\dot{R}$ *на гиперповерхности*

Вариант 2. Краевая задача сводится к последовательности двух задач Неймана - на искомую функцию и, соответственно, на сопряженную:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

$\dot{R}_i = 0$ *на гиперповерхности*

$$\frac{\partial^2 R^*}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

$C\dot{R}^* = -C\dot{R} - [2\mu\dddot{R} + B\ddot{R}]$ *на гиперповерхности*

Вариант 3. Краевая задача сводится к связанной системе двух краевых смешанных задач:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_i} = 0, \frac{\partial^2 R^*}{\partial x_i \partial x_i} = 0$$

$$2\mu\ddot{R} + A\dot{R} - CR^* = 0$$

$$C\dot{R} + [2\mu\dddot{R} + B\ddot{R}] + C\dot{R} = 0$$

В результате показано, что для данной модели существует только триосновных типа краевых задач для "чисто слабых" взаимодействий, которые не взаимодействуют не сильным образом (т.к. $\theta = 0$), не электромагнитным образом (т.к. $\omega_{ij} = 0$). Поэтому эти

три краевые задачи мы связываем с тремя известными типами нейтрино.

Для решения связанной краевой задачи может быть использован метод [25], [26], [27] трансформации исходных краевых проблем к последовательности распадающихся краевых задач с операторными краевыми условиями, полученными с использованием алгебры псевдо-дифференциальных операторов.

Если трактовать R^* как потенциал антинейтрино, а R как потенциал нейтрино, то из сформулированных краевых задач следует их асимметрия.

9.7. Разложение напряжений слабых взаимодействий на составляющие

Рассмотрим произвольный тензор второго ранга. В гл.I было установлено, что для тензора второго ранга имеет место разложение по системе 3- векторов a_k, b_k, c_k, d_k, e_k:

$$T_{ij} = \frac{1}{4}\delta_{ij}T + \frac{1}{4}d_k D_{ijk} + \frac{1}{2}a_k A_{ijk} +$$

$$+ \frac{1}{2}b_k B_{ijk} + \frac{1}{2}c_k C_{ijk} + \frac{1}{2}e_k E_{ijk}$$

где соответствующие векторы определяются равенствами

$$T_{nm}(X_n X_m - \frac{1}{4}\delta_{nm}) = d_k X_k$$

$$T_{nm}(Y_n Y_m - \frac{1}{4}\delta_{nm}) = d_k Y_k$$

$$T_{nm}(Z_n Z_m - \frac{1}{4}\delta_{nm}) = d_k Z_k$$

$$T_{nm}(N_n N_m - \frac{1}{4}\delta_{nm}) = d_k N_k$$

Четырехмерные по определению векторы a_k, b_k, c_k, d_k, e_k имеют по три независимые компоненты в силу существования для каждого из них одной скалярной связи:

$a_k N_k = 0$, $b_k N_k = 0$, $c_k N_k = 0$,

$$d_k(X_k + Y_k + Z_k + N_k) = 0, \quad e_k N_k = 0$$

Тензоры третьего ранга в приведенном разложении определяются соотношениями:

$$A_{ijk} = (Y_i Z_j + Z_i Y_j) X_k +$$
$$+ (Z_i X_j + X_i Z_j) Y_k + (X_i Y_j + Y_i X_j) Z_k$$
$$B_{ijk} = (Y_i Z_j - Z_i Y_j) X_k +$$
$$+ (Z_i X_j - X_i Z_j) Y_k + (X_i Y_j - Y_i X_j) Z_k$$
$$C_{ijk} = (X_i N_j + N_i X_j) X_k +$$
$$+ (Y_i N_j + N_i Y_j) Y_k + (Z_i N_j + N_i Z_j) Z_k$$
$$D_{ijk} = (4 X_i X_j - \delta_{ij}) X_k + (4 Y_i Y_j - \delta_{ij}) Y_k +$$
$$+ (4 Z_i Z_j - \delta_{ij}) Z_k + (4 N_i N_j - \delta_{ij}) N_k$$
$$E_{ijk} = (X_i N_j - N_i X_j) X_k +$$
$$+ (Y_i N_j - N_i Y_j) Y_k + (Z_i N_j - N_i Z_j) Z_k$$
$$\delta_{ij} = X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j + N_i N_j$$

Свойства введенных в рассмотрение тензоров третьего ранга, указаны в гл. 1. Из полученных свойств тензоров следует:

$$T_{ij}\delta_{ij} = T \qquad T_{ij} D_{ijq} = 4d_q \qquad T_{ij} A_{ijq} = a_q \qquad T_{ij} B_{ijq} = b_q$$
$$T_{ij} C_{ijq} = c_q \qquad T_{ij} E_{ijq} = e_q$$

Если тензор $T_{ij} = \dfrac{\partial R_i}{\partial x_j}$, то классическое представление соотношений Коши для пространства Минковского получает дальнейшую детализацию структуры тензора дисторсии:

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = \frac14 \delta_{ij}\theta +$$
$$+ \left(\frac14 \varepsilon_k D_{ijk} + \frac12 \gamma_k A_{ijk} + \frac12 c_k C_{ijk}\right) + \left(\frac12 b_k B_{ijk} + \frac12 e_k E_{ijk}\right)$$

где:

$$\gamma_{ij} = \left(\frac14 \varepsilon_k D_{ijk} + \frac12 \gamma_k A_{ijk} + \frac12 c_k C_{ijk}\right)$$
$$-\omega_{nm} Э_{nmij} = (b_k B_{ijk} + e_k E_{ijk})$$

В трехмерных сплошных средах вектор ε_k можно назвать вектором линейного формоизменения, вектор γ_k можно назвать вектором чистых сдвигов, вектор b_k можно назвать вектором пространственных поворотов.

В четырехмерной сплошной среде Минковского векторы b_k и e_k мы связываем с векторами напряженностей магнитного и электрического поля, θ - с потенциалом сильных взаимодействий, векторы a_k, c_k и d_k назовем соответственно векторами квазимагнитного, квазиэлектрического и диагонального поля, пытаясь в будущем связать их с напряженностями полей цветовых зарядов.