1960 ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА Том II, в. 7
1960 SOLID STATE PHYSICS Vol. II, № 7

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СРЕД С ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ ЧАСТИЦ

Э. Л. Аэро и *Е. В. Кувшинский*

Известно, что классическая теория упругости воспроизводит свойства тел, у которых между частицами действуют центральные силы [1]. Эта теория не всеобъемлюща. Она, в частности, не может передать закономерности распространения коротких акустических волн в кристаллах и (в некоторых случаях) законы пьезоэлектрических явлений [2, 3]. Удовлетворительная их трактовка возможна пока лишь в молекулярных теориях кристаллических решеток, допускающих нецентральное взаимодействие частиц [1, 3, 4].

С целью объяснения некоторых аномалий динамической упругости пластиков [5] нами была развита феноменологическая теория упругости сплошных сред, учитывающая вращательное взаимодействие частиц.

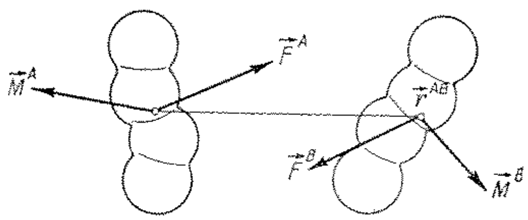

Рис. 1.

Будем исходить из того, что частицы вещества не точки, а пространственные образования, расположенные на расстояниях, сравнимых с их размерами. В этом случае действие одной частицы на другую определяется целой системой сил (и моментов). Известно, что даже система одних сил в общем случае не может быть сведена к одной лишь равнодействующей, — необходимо введение еще и равнодействующего момента [6]. Тогда взаимодействие любых двух частиц, например A и B (рис. 1), необходимо воспроизводить с помощью двух нецентральных сил F_i^A и F_i^B (можно считать, что они приложены к центрам инерции частиц) и двух моментов M_i^A и M_i^B. Очевидно, что

$$F_i^A + F_i^B = 0, \tag{1}$$

$$M_i^A + M_i^B + r_m^{AB} F_n^A \epsilon_{imn} = 0, \tag{2}$$

где r_m^{AB} — вектор, соединяющий центры инерции частиц; ϵ_{imn} — единичный аксиальный антисимметрический тензор (тензор Леви—Чивита).

Рассмотрим действие одной соприлегающей части тела на другую.[1] Его следует характеризовать не только силами, непрерывно распределенными на поверхности соприкосновения соприлегающих частей, но и непрерывно распределенными моментами.[2] Будем считать, что расстояние

[1] Тела будем считать непрерывными средами.

[2] Объемно распределенными силами и моментами, характеризующими взаимодействие частей тела, пренебрегаем.

между частицами, „соприкасающимися“ по поверхности раздела, малы настолько, что моментом $r_m^{AB} F_n^A \epsilon_{imn}$ можно пренебречь по сравнению с M_i^A и M_i^B. Тогда силы и моменты, действующие на прилегающих поверхностях, должны быть равными по величине и обратными по знаку.

Уравнения движения. Тензор напряжений и тензор микромоментов

Рассмотрим движение участка среды, ограниченного некоторой замкнутой поверхностью. Наличие вращательных взаимодействий не отражается на виде уравнений поступательного движения. Так же как и в классической теории силы $\mathscr{F}_{i(s)}\, dS$, приложенные к элементу поверхности dS участка среды, могут быть связаны с полем тензора напряжений σ_{ik} равенством Коши

$$\mathscr{F}_{i(s)} dS = \sigma_{ik} dS_k, \tag{3}$$

а уравнение поступательного движения имеет привычную дифференциальную форму

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i = \rho \frac{dv_i}{dt}, \tag{4}$$

где ρ — плотность среды; f_i — плотность массовых сил; v_i и $\frac{dv_i}{dt}$ — скорость и ускорение участка среды в точке с координатой x_k; $\frac{d}{dt}$ — субстанциональная производная по времени.

Примем, что изменение кинетической энергии и момента количества движения среды определяется лишь поступательным движением ее частиц (собственным их вращением пренебрегаем). Тогда уравнение вращательного движения принимает вид

$$\oint_S M_{i(s)} dS + \int_V \rho m_i dV + \oint_S x_l F_{n(s)} \epsilon_{iln} dS + \int_V \rho x_l f_n \epsilon_{iln} dV = \\ = \int_V \rho x_l \frac{dv_n}{dt} \epsilon_{iln} dV, \tag{5}$$

где $M_{i(s)} dS$ — поверхностный момент, действующий на площадке dS; $\rho m_i dV$ — массовый момент, приложенный к элементу объема среды dV. Интегралы в (5) распространены по всей поверхности S и объему V участка среды.

Первый и второй интегралы в (5) определяют равнодействующие поверхностных и объемно распределенных моментов; третий и четвертый — равнодействующие моментов поверхностных и массовых сил. Интеграл в правой части равенства (5) учитывает изменение момента количества движения участка среды.

Преобразуем третий интеграл уравнения (5) в объемный. Принимая во внимание (3) и (4) и группируя члены, получим вместо (5) уравнение

$$\oint_S M_{i(s)} dS + \int_V \rho \left(m_i + \sigma_{nl} \epsilon_{iln}\right) dV = 0. \tag{6}$$

Далее рассуждаем так же, как и в задаче Коши при нахождении тензора напряжений. Рассмотрим частный случай, когда выделенный участок среды представляет собой тетраэдр, три грани которого перпендикулярны координатным осям, а четвертая имеет нормаль ν_k (рис. 2). Устремим к нулю размеры тетраэдра. Тогда второй интеграл уравнения (6), пропорциональный кубу линейных размеров, будет убывать быстрее первого, пропорционального квадрату линейных размеров. В пределе

$$\oint\limits_{S} M^0_{i(s)}dS = M^0_{i(1)}S_1 + M^0_{i(2)}S_2 + M^0_{i(3)}S_3 + M^0_{i(\nu)}S_\nu = 0, \tag{7}$$

откуда

$$M^0_{i(\nu)} = -\left(M^0_{i(1)}\frac{S_1}{S_\nu} + M^0_{i(2)}\frac{S_2}{S_\nu} + M^0_{i(3)}\frac{S_3}{S_\nu}\right), \tag{8}$$

где $M^{(0)}_{i(1)}$, $M^0_{i(2)}$, $M^0_{i(3)}$ и $M^0_{i(\nu)}$ — плотность поверхностных моментов на площадках граней, перпендикулярных координатным осям, и на скошенной грани; S_1, S_2, S_3 и S_ν — площади этих граней; $\frac{S_1}{S_\nu}$, $\frac{S_2}{S_\nu}$, $\frac{S_3}{S_\nu}$ — косинусы углов между нормалями соответствующих граней.

Уравнение (8) является определением некоторого тензора μ_{ik}.[3] Назовем его тензором микромоментов. Компоненты этого тензора равны по величине и обратны по знаку плотностям поверхностных моментов на трех взаимно перпендикулярных площадках.[4] Поэтому момент, действующий на произвольно ориентированной площадке, выражается через компоненты тензора μ_{ik} соотношением, аналогичным (3)

$$M_{i(s)}dS = \mu_{ik}dS_k. \tag{9}$$

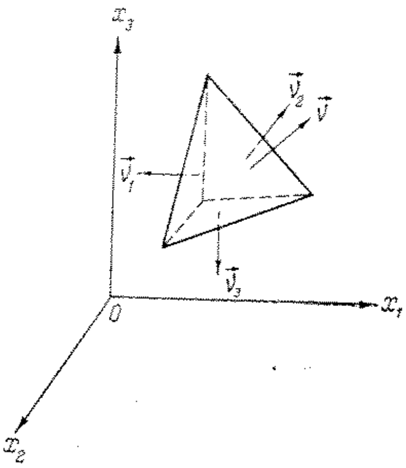

Рис. 2.

Преобразуем теперь в уравнении (6) поверхностный интеграл в объемный, воспользовавшись прежде соотношением (9). Тогда (6) примет вид

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial \mu_{ik}}{\partial x_k} + \sigma_{nl}\epsilon_{iln} + \rho m_i\right) dV = 0. \tag{10}$$

Так как это равенство справедливо для участка среды произвольной формы и произвольного объема, то

$$\frac{\partial \mu_{ik}}{\partial x_k} + \sigma_{nl}\epsilon_{iln} + \rho m_i = 0. \tag{11}$$

Момент

$$\sigma_{nl}\epsilon_{iln} = \frac{1}{2}(\sigma_{nl} - \sigma_{ln})\epsilon_{iln} = \sigma^a_{nl}\ \epsilon_{iln}$$

определяется только антисимметрической частью тензора напряжений σ^a_{ik}.

Дифференциальное уравнение вращательного движения (11) показывает, что тензор напряжений σ_{ik} в обобщенной теории может быть асимметрическим в отличие от классической теории и что его симмет-

[3] В случае поступательного движения уравнение, аналогичное (8), определяет тензор напряжений.

[4] Диагональные компоненты тензора μ_{ik} характеризуют моменты, направленные вдоль координатных осей и перпендикулярно к граням тетраэдра, т. е. скручивающие моменты. Недиагональные компоненты определяют моменты, касательные к граням тетраэдра, т. е. изгибающие моменты.

рия связана с пренебрежением не только вращательными взаимодействиями, но и внешним объемно распределенным воздействием на вещество.

Итак, напряженное состояние в обобщенной теории упругости описывается наряду с асимметрическим тензором напряжений σ_{ik} и тензором микромоментов μ_{ik} (тоже асимметрическим).

Работа деформирования элемента среды

Над элементом среды при его движении совершают работу как поверхностные и объемные силы, так и моменты. Для расчета работы моментов необходимо знать соответствующие им обобщенные скорости Ω_i — средние угловые скорости поворота частиц. Они могут являться как самостоятельными величинами, так и производными, обусловленными поступательным движением частиц. Ограничимся учетом поворотов второго типа. Всегда можно найти подвижную систему взаимно ортогональных координатных осей, такую, чтобы отнесенное к этим осям поле скоростей в окрестности заданной точки обладало бы тремя взаимно перпендикулярными плоскостями зеркальной симметрии. Для такого поля нельзя выделить какого-либо полярного направления, могущего быть осью вращения. Очевидно, среднюю угловую скорость частиц среды следует приравнять скорости вращения координатных осей. В таком случае

$$\Omega_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial v_l}{\partial x_m}\epsilon_{ilm}. \tag{12}$$

Теперь можно рассчитать работу W, совершаемую над участком среды в единицу времени

$$W = \oint_S (\sigma_{ik}v_i + \mu_{ik}\Omega_i)\, dS_k + \int_V \rho(f_i v_i + m_i\Omega_i)\, dV. \tag{13}$$

Преобразуем поверхностный интеграл равенства (13) в объемный. Учтем также соотношения (4) и (11). Тогда

$$W = \int_V \left[\left(\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \mu_{ik}\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} - \sigma_{lk}\Omega_i\epsilon_{ikl}\right) + \frac{d}{dt}\left(\rho\frac{v_i^2}{2}\right)\right] dV. \tag{14}$$

В силу (12) имеем

$$\sigma_{lk}\epsilon_{ikl}\Omega_i = \sigma_{ik}\Omega_l\epsilon_{lki} = -\frac{1}{2}\sigma_{ik}\frac{\partial v_m}{\partial x_n}\epsilon_{lki}\epsilon_{lmn} = -\frac{1}{2}\sigma_{ik}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right), \tag{15}$$

что вместе с (14) дает

$$W = \int_V \left[\sigma_{ik}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \mu_{ik}\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k} + \frac{d}{dt}\left(\rho\frac{v_i^2}{2}\right)\right] dV. \tag{16}$$

Очевидно, что dL — работа деформирования среды, отнесенная к единице объема, совершаемая за время dt, равна

$$dL = \sigma_{ik}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) dt + \mu_{ik}\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}\, dt. \tag{17}$$

Положим, что перемещения U_i частиц меняются плавно от точки к точке так, что $\left|\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right| \ll 1$ и $\left|\frac{\partial U_i}{\partial y_k}\right| \ll 1$. В этом случае можно не различать дифференцирования по лагранжевым (y_k) и эйлеровым (x_k) координатам. В самом деле,

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_i}{\partial y_j}\right)\left(\delta_{jk}-\frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right)\simeq\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_i}{\partial y_k}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\left(\delta_{jk}-\frac{\partial U_j}{\partial y_k}\right)\right]\simeq\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)dt\simeq\frac{1}{2}d\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)=de_{ik} \tag{18}$$

и

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_k}dt\simeq-\frac{1}{2}d\left(\frac{\partial^2 U_l}{\partial x_k\partial x_m}\epsilon_{ilm}\right)=dr_{ik}. \tag{19а}$$

Так как dr_{ik} является девиатором ($dr_{ll}=0$), то $\mu_{ik}dr_{ik}\equiv\operatorname{dev}\mu_{ik}dr_{ik}$. Имея это в виду, получим окончательно

$$dL=\sigma^s_{ik}de_{ik}+\operatorname{dev}\mu_{ik}dr_{ik}. \tag{20}$$

Здесь учтено, что в силу симметричности тензора e_{ik}

$$\sigma_{ik}de_{ik}\equiv\sigma^s_{ik}de_{ik},$$

где σ^s_{ik} — симметрическая часть тензора σ_{ik}.

Тензор e_{ik} известен в классической теории как тензор „чистой“ деформации. Тензор r_{ik} является дополнительной характеристикой деформированного состояния.

Тензор малого кручения и изгиба

Для выяснения физического смысла и свойств тензора r_{ik} запишем его в виде

$$r_{ik}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\epsilon_{ilm}\right)=\frac{\partial\omega_i}{\partial x_k}, \tag{19б}$$

где ω_i — угол малых поворотов участка среды.

Очевидно, что диагональные компоненты r_{ik} характеризуют изменение вдоль какой-либо из координатных осей угла поворота участка среды около этой же оси, т. е. характеризуют степень закрученности участка среды. Недиагональные же компоненты характеризуют изменение вдоль координатной оси угла поворота участка среды вокруг оси, перпендикулярной первой, т. е. степень изогнутости окрестности точки x_k. Значит, тензор r_{ik} характеризует малые кручение и изгиб среды. Поэтому будем его называть тензором малого кручения и изгиба. Из свойств тензора r_{ik} отметим следующие два. След его r_{ll} равен нулю, а сам тензор r_{ik} является псевдотензором: он меняет знак при инверсии координат в отличие от истинного тензора 2-го ранга. Это легко показать, анализируя выражение (19б).

Рассмотрим поле смещений в малой окрестности некоторой точки среды с координатой x^0_k и выясним ту роль, которую играет в его описании тензор r_{ik}. Разложим в ряд Тэйлора смещения $U_i(x_k)$ по степеням $(x_k-x^0_k)=\Delta x_k$

$$\Delta U_i=\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\Delta x_k+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k\partial x_l}\Delta x_k\Delta x_l+\ldots \tag{21}$$

Коэффициенты при линейном члене разложения, описывающие аффинное преобразование малого участка среды, могут быть представлены, как известно, в виде

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = e_{ik} + a_{ik}, \tag{22}$$

где e_{ik} — тензор „чистой" деформации; a_{ik} — тензор малых углов поворота участка среды как целого. Легко видеть, что коэффициенты при квадратичном члене являются суммами вида

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial e_{ik}}{\partial x_l} + r_{ml} \mathfrak{E}_{ikm}. \tag{23}$$

Член $\frac{\partial e_{ik}}{\partial x_l}$ описывает „прогрессивную чистую" деформацию, а член $r_{ml} \mathfrak{E}_{ikm}$, как это уже выяснялось, — малое кручение и изгиб участка среды. Отметим, что первый член в (23) и второй в (22) не вносят вклада в работу деформирования участка среды, как это видно из (20).

Упругий потенциал и закон Гука для изотропного тела

Рассмотрим тело неизменной массы (M), постоянного состава, взаимодействие частей которого сводится к поверхностно распределенным силам и моментам. В этом случае работу деформирования (изотермического) можно связать с локальным приращением свободной энергии тела

$$\oint_M d\left(\frac{F}{\rho_0}\right) dM = \oint_{V(t)} \frac{\rho}{\rho_0} dF dV = \oint_{V(t)} (\sigma^s_{ik} de_{ik} + \operatorname{dev} \mu_{ik} dr_{ik})\, dV, \tag{24}$$

где $\left(\frac{F}{\rho_0}\right)$ — плотность свободной энергии вещества в данной точке (отнесенная к единице массы); F — так называемый упругий потенциал, объемная (в лагранжевых координатах y_k) плотность свободной энергии; ρ_0, ρ — плотность вещества в исходном и деформированном состояниях. Отсюда

$$dF = \left(\sigma^s_{ik} de_{ik} + \operatorname{dev} \mu_{ik} dr_{ik}\right)\left(1 + e_{ll}\right), \tag{25}$$

где $(1 + e_{ll}) = \frac{\rho_0}{\rho}$ — относительное изменение удельного объема среды в результате деформации.

Величина F является функцией состояния среды в данной точке и отражает изменения в расположении частиц. Она должна определяться величинами вида $\varepsilon_{ik} = \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$, $\varepsilon_{ikl} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l}$, ... Изменение же dF есть полный дифференциал, поэтому

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ik}} d\varepsilon_{ik} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ikl}} d\varepsilon_{ikl} + \ldots \tag{26}$$

Но e_{ik} и r_{ik} — линейные функции величин ε_{ik} и ε_{ikl} согласно (18) и (19), а первые части (25) и (26) есть тождественные выражения для полного дифференциала F. Поэтому величины e_{ik} и r_{ik} есть независимые переменные, полностью определяющие функции $F = F(\varepsilon_{ik}, \varepsilon_{ikl}, \varepsilon_{iklm}, \ldots) = F(e_{ik}, r_{ik})$. Отсюда

$$\left(\frac{\partial F}{\partial e_{ik}}\right)_{r_{ik}} = (1 + e_{ll}) \sigma^s_{ik}, \tag{27а}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r_{ik}}\right)_{e_{ik}} = (1 + e_{ll}) \operatorname{dev} \mu_{ik}. \tag{27б}$$

Итак, с термодинамической точки зрения, фундаментальными характеристиками напряженного состояния являются величины $(1+e_{ll})\sigma^s_{ik}$ и $(1+e_{ll})\operatorname{dev}\mu_{ik}$, а не σ^s_{ik} и $\operatorname{dev}\mu_{ik}$. Но так как в инфинитизимальной теории изменения плотности в процессе деформирования считаются пренебрежимо малыми ($e_{ll}\ll 1$), то вместо (25) можно написать, что

$$dF\simeq\sigma^s_{ik}de_{ik}+\operatorname{dev}\mu_{ik}dr_{ik}. \tag{28}$$

Найдем теперь явный вид упругого потенциала F как функции e_{ik} и r_{ik}, считая их малыми величинами, а процесс деформации изотермическим. Примем также, что температура одинакова во всех точках среды и что в недеформированном состоянии напряжения в теле отсутствуют. Разложим свободную энергию (точнее, ту ее часть, которая связана с деформированием) по степеням компонент e_{ik} и r_{ik}. Разложение, учитывающее члены не выше второй степени, имеет вид

$$F=A_{iklm}e_{ik}e_{lm}+B_{iklm}\operatorname{dev}e_{ik}r_{lm}+C_{iklm}r_{ik}\operatorname{dev}e_{lm}+D_{iklm}r_{ik}r_{lm}. \tag{29}$$

Коэффициенты A_{iklm}, B_{iklm}, C_{iklm}, D_{iklm} являются тензорами четвертого ранга и могут быть названы тензорами модулей упругости. Выше было отмечено, что r_{ik} является псевдотензором. В силу того, что F — истинный скаляр, тензоры B_{iklm} и C_{iklm} должны быть также псевдотензорами, а A_{iklm} и D_{iklm} — истинными тензорами.

Изотропное упругое тело характеризуется тем, что материальные характеристики остаются неизменными при поворотах системы координат. При инверсии же координат они либо остаются неизменными (истинные тензоры четного ранга), либо меняют знак (псевдотензоры четного ранга). Первые (A_{iklm} и D_{iklm}) называются абсолютными, вторые (B_{iklm} и C_{iklm}) — относительными тензорами. Относительные тензоры как материальные константы характеризуют так называемые активные среды, примером которых являются оптически активные среды.

Можно показать, что в общем случае абсолютный тензор 4-го ранга можно записать в виде суммы

$$A_{iklm}=A_1\delta_{ik}\delta_{lm}+A_2\delta_{lk}\delta_{im}+A_3\delta_{il}\delta_{km}. \tag{30}$$

Здесь A_1, A_2, A_3 — постоянные, δ_{ik} — единичный тензор.

Выражение для относительного тензора B_{iklm} отличается от (30) только постоянным множителем — определителем преобразования, равным $+1$ при поворотах системы координат и -1 при инверсии. В силу этого постоянные B_1, B_2, B_3 являются в отличие от A_1, A_2, A_3 не истинными скалярами, а псевдоскалярами.

С учетом (30) выражение (29) примет вид

$$\begin{gathered}F=A_1e_{ll}e_{kk}+A_2e_{ik}e_{ki}+A_3e_{ik}e_{ik}+B_2\operatorname{dev}e_{ik}r_{ki}+\\+B_3\operatorname{dev}e_{ik}r_{ik}+C_2r_{ik}\operatorname{dev}e_{ki}+C_3r_{ik}\operatorname{dev}e_{ik}+\\+D_1r_{ll}r_{kk}+D_2r_{ik}r_{ki}+D_3r_{ik}r_{ik}=A_1e_{ll}e_{kk}+\\+(A_2+A_3)e_{ik}e_{ik}+(B_2+B_3+C_2+C_3)r_{ik}\operatorname{dev}e_{ik}+\\+D_2r_{ik}r_{ki}+D_3r_{ik}r_{ik}.\end{gathered} \tag{31}$$

Здесь принято во внимание, что $r_{ii}=0$, $e_{ik}=e_{ki}$, $r_{ki}\operatorname{dev}e_{ik}\equiv r_{ik}\operatorname{dev}e_{ki}=r_{ik}\operatorname{dev}e_{ik}$ и что $r_{ik}\operatorname{dev}e_{ik}\equiv\frac{1}{2}(r_{ik}+r_{ki})\operatorname{dev}e_{ik}$.

Обозначим $A_1=\frac{\lambda}{2}$, $A_2+A_3=\mu$, $\frac{1}{2}(B_2+B_3+C_2+C_3)=\chi$, $D_2=\tau$ и $D_3=\theta$. Окончательно

$$F=\frac{\lambda}{2}e^2_{ll}+\mu e_{ik}e_{ik}+\chi(r_{ik}+r_{ki})\operatorname{dev}e_{ik}+\tau r_{ik}r_{ki}+\theta r_{ik}r_{ik}. \tag{32}$$

Первые два члена определяют упругий потенциал в классической теории, где λ и μ являются коэффициентами Ламэ. Третий член $\chi(r_{ik}+r_{ki})\operatorname{dev} e_{ik}$, содержащий характеристики как классического, так и неклассического деформированного состояния, обусловлен существованием „правых" и „левых" механически активных сред (напомним, что χ есть псевдоскаляр). Для первых $\chi>0$, для вторых $\chi<0$.

Установим теперь связь между характеристиками деформированного (e_{ik}, r_{ik}) и напряженного $(\sigma^s_{ik}, \mu_{ik})$ состояний. В силу (29) полный дифференциал упругого потенциала равен

$$\begin{aligned} dF = {} & [\lambda e_{ll}\delta_{ik} + 2\mu e_{ik} + \chi(r_{ik}+r_{ki})]\, de_{ik} + \\ & + (2\theta r_{ik} + 2\chi \operatorname{dev} e_{ik} + 2\tau r_{ki})\, dr_{ik}. \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь учтено, что $de_{ll}=\delta_{ik}de_{ik}$.

Из (33) на основании (27) имеем

$$\sigma^s_{ik} = \lambda e_{ll}\delta_{ik} + 2\mu e_{ik} + \chi(r_{ik}+r_{ki}), \tag{32а}$$

$$\operatorname{dev}\mu_{ik} = 2\chi \operatorname{dev} e_{ik} + 2\theta r_{ik} + 2\tau r_{ki}. \tag{32б}$$

Решим эту систему относительно e_{ik} и r_{ik}. Это дает

$$\begin{aligned} e_{ik} = {} & -\frac{3\lambda + \dfrac{2\chi^2}{\tau+\theta}}{6(3\lambda+2\mu)\left(\mu - \dfrac{\chi^2}{\tau+\theta}\right)}\,\sigma^s_{ll}\delta_{ik} + \frac{1}{2\left(\mu - \dfrac{\chi^2}{\tau+\theta}\right)}\,\sigma^s_{ik} - \\ & - \frac{\chi}{4(\tau+\theta)\left(\mu - \dfrac{\chi^2}{\tau+\theta}\right)}(\operatorname{dev}\mu_{ik} + \operatorname{dev}\mu_{ki}), \end{aligned} \tag{33а}$$

$$\begin{aligned} r_{ik} = {} & -\frac{\chi}{2(\tau+\theta)\left(\mu - \dfrac{\chi^2}{\tau+\theta}\right)}\operatorname{dev}\sigma^s_{ik} + \\ & + \left[\frac{\theta+\tau}{4(\theta^2-\tau^2)} + \frac{\mu}{4(\tau+\theta)\left(\mu - \dfrac{\chi^2}{\tau+\theta}\right)}\right]\operatorname{dev}\mu_{ik} + \\ & + \left[\frac{\tau+\theta}{4(\theta^2-\tau^2)} - \frac{\mu}{4(\tau+\theta)\left(\mu - \dfrac{\chi^2}{\tau+\theta}\right)}\right]\operatorname{dev}\mu_{ki}. \end{aligned} \tag{33б}$$

Эти линейные соотношения между компонентами тензоров деформированного и напряженного состояний есть обобщение обычных законов Гука классической теории упругости.

Обобщенное уравнение движения

Антисимметрическая часть σ^a_{ik} тензора упругих напряжений и „изотропная" составляющая $\frac{1}{3}\mu_{ll}\delta_{ik}$ тензора микромоментов не могут быть найдены с помощью законов упругости (32). В уравнения движения (4) и (11) они входят так, что могут быть исключены из (4) подстановкой в него (11). Это дает обобщенное уравнение движения среды, содержащее только симметрическую часть σ^s_{ik} тензора напряжений и девиаторную — $\operatorname{dev}\mu_{ik}$ тензора микромоментов

$$\frac{\partial\sigma^s_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\operatorname{dev}\mu_{mk})}{\partial x_k \partial x_n}\cdot \epsilon_{inm} + \frac{\rho}{2}\frac{\partial m_m}{\partial x_n}\cdot \epsilon_{inm} + \rho f_i = \rho\frac{dv_i}{dt}\ \ldots \tag{34}$$

В свою очередь, исключив из него σ^s_{ik} и $\operatorname{dev}\mu_{mk}$ с помощью (32а), (32б), (18) и (19а) можно получить уравнение движения, содержащее только компоненты перемещений U_i. То, что σ^a_{ik} и $\frac{1}{3}\mu_{ll}\delta_{ik}$ не связаны с деформацией среды, является результатом принятого нами определения (12) обобщенной характеристики углов поворота частиц среды.

Связь между компонентами тензоров деформаций. Обобщенные тождества Сент-Венана

Восемнадцать функций координат e_{ik} и r_{ik} зависят, согласно (18) и (19), только от трех функций U_i — проекций вектора смещения точек среды. Это означает, что между функциями e_{ik}, r_{ik} существуют определенные тождественные соотношения. Для их нахождения рассмотрим, как e_{ik}, r_{ik} связаны с U_i,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)=e_{ik}, \tag{35а}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 U_l}{\partial x_k \partial x_m}\cdot \epsilon_{ilm}=r_{ik}. \tag{35б}$$

Эти 18 соотношений можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений, определяющую по данным 18 функциям e_{ik} и r_{ik} три неизвестных функции U_i. Для совместности этой системы необходимо наложить на правые части этих уравнений определенные связи. Для нахождения необходимых и достаточных условий совместности системы (35) рассмотрим эквивалентную (в смысле условий совместности) ей систему

$$r_{ik}=\frac{\partial\omega_i}{\partial x_k}, \tag{36а}$$

$$\omega_i=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial U_m}{\partial x_n}\cdot\epsilon_{nmi}, \tag{36б}$$

$$e_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k}+\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right). \tag{36в}$$

Покажем необходимость и достаточность условий совместности системы (36) для совместности исходной системы (35).

Пусть нарушены условия совместности системы (36а), тогда нельзя подобрать такие величины ω_i, чтобы r_{ik} имели наперед заданные значения, а значит, нельзя подобрать и значения U_i, т. е. выполнение условий совместности систем (36а) необходимо для нахождения величин U_i по величинам r_{ik}. Аналогичны рассуждения и относительно системы (36б).

Если же условия совместности для системы (36а) выполнены, то по величинам r_{ik} можно найти величины ω_i. Если выполнены и условия совместности для системы (36б), то по величинам ω_i можно найти величины U_i. Таким образом, при выполнении этих условий, можно найти U_i по величинам r_{ik}, т. е. решить систему (35б), что и доказывает их достаточность для совместности системы (35б).

Преобразуем 12 уравнений (36б) и (36в) в эквивалентные им 9 уравнений вида

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_k}=e_{ik}+\omega_l\cdot\epsilon_{ilk}, \tag{37}$$

что вместе с (36а) дает окончательно:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} = r_{ik}, \tag{38а}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = e_{ik} + \omega_l \epsilon_{ilk}. \tag{38б}$$

Система (38) выгодно отличается от системы (35) тем, что она первого порядка и содержит слева одинокие производные. Как известно [7], для совместности системы двух дифференциальных уравнений первого порядка (с одной неизвестной функцией) вида

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f_1(x, y),$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = f_2(x, y)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}. \tag{39}$$

Распространяя эти равенства на всевозможные пары уравнений (38а), получим необходимые и достаточные условия совместности (38а) в виде

$$\frac{\partial r_{ik}}{\partial x_p} \epsilon_{kpn} = 0. \tag{40}$$

Аналогично для системы (38б) имеем

$$\frac{\partial e_{ik}}{\partial x_p} + \frac{\partial}{\partial x_p}(\omega_l \epsilon_{ilk}) = \frac{\partial e_{ip}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\omega_l \epsilon_{ilp}). \tag{41}$$

Преобразование этих условий с учетом соотношений (19б) дает вместо (41) выражение

$$r_{ik} = \frac{\partial e_{lk}}{\partial x_p} \epsilon_{lpi}. \tag{42}$$

Условия (40) и (42) являются обобщением известных тождеств Сент-Венана, которые содержатся в (40) и (42). В самом деле, исключим r_{ik} из (40) с помощью (42), тогда

$$\frac{\partial^2 e_{lk}}{\partial x_p \partial x_n} \epsilon_{lni} = \frac{\partial^2 e_{lp}}{\partial x_k \partial x_n} \epsilon_{lni}. \tag{43}$$

Легко проверить непосредственно, что эти соотношения совпадают с известными тождествами Сент-Венана.

Аналогичные соотношения могут быть получены и для тензоров σ^s_{ik} и μ_{ik}, если заменить в (40) и (42) e_{ik} и r_{ik}, согласно (33), на σ^s_{ik} и μ_{ik}. Эти новые соотношения и уравнение (34) позволяют (с учетом граничных условий), по крайней мере принципиально, определить 15 неизвестных функций σ^s_{ik} и μ_{ik}.

Заключение

На основании допущения о вращательном взаимодействии частиц обобщена феноменологическая теория упругости сплошных сред. Напряженное состояние характеризуется наряду с асимметричным тензором напряжений σ_{ik} также и тензором микромоментов μ_{ik}. Получены уравнения движения. Основываясь на законе сохранения энергии, найдены характеристики деформированного состояния: тензор „чистой“ деформации e_{ik} и тензор малого кручения и изгиба r_{ik}. Установлен явный вид упругого потенциала для случая малых деформаций изотропного упругого тела; из него получены линейные соотношения (законы Гука) между характеристиками напряженного и деформированного состояний. Выведены тождественные соотношения между компонентами тензоров e_{ik} и r_{ik} (тождества Сент-Венана).

Литература

[1] М. Борн и Хуан Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток, М., 1958. — [2] Y. Le Corre. Bull. Soc. Franc. Miner Crist., *76*, 464, 1953; *77*, 1363, 1393, 1954; *78*, 33, 1955. — [3] C. V. Raman a. K. S. Viswanathan. Proc. Ind. Acad. Sci., *42*, № 2, 3, 1955. — [4] J. Laval. L'état solide, Rapports et Discussions Congress Solvay, 1951. — [5] L. Nielsten. ASTM Bulletin, № 165, 48, 1950. — [6] Макс Планк. Общая механика, стр. 114, ГТТИ, 1932. — [7] В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, М., 1959.

Институт высокомолекулярных соединений
АН СССР
Ленинград

Поступило в Редакцию
3 декабря 1959 г.