

# МИКРОСТРУКТУРА В ЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ<sup>1)</sup>

Р. Д. Миндлин

## Введение

В предлагаемой работе формулируется линейная теория трехмерной упругой сплошной среды, которая обладает некоторыми из свойств кристаллической решетки в результате внесения в теорию понятия единичной ячейки. Уравнения дают волновые дисперсионные соотношения с акустической и оптической ветвями такого же характера, который имеет место в случае большой длины волны в теории кристаллической решетки, и наблюдаются в экспериментах с рассеянием нейтронов. Хотя частные решения в работе подробно не рассматриваются, из формы уравнений видно, что могут появиться интересные поверхностные эффекты как в случае движения, так и в случае равновесия.

Единичную ячейку можно также интерпретировать как молекулу полимера<sup>2)</sup>, кристаллит поликристалла или частицу зернистого материала. Математическая модель ячейки является линейным вариантом деформируемых направляющих Эриксена и Трусделла [1]. Если ячейка абсолютно жесткая, уравнения сводятся к уравнениям линейного континуума Коссера [2].

Метод вывода уравнений аналогичен методу, использованному при выводе двумерных уравнений высокочастотных колебаний пластинок из трехмерных уравнений классической линейной упругости. Показано, что тем же методом, который служит, между прочим, в теории пластинок для перехода от теорий высших порядков к классической теории, можно свести уравнения при малых частотах и очень больших длинах волн в изотропных материалах к уравнениям упругой сплошной среды с плотностью потенциальной энергии, зависящей от деформации и градиента деформаций, и плотностью кинетической энергии, зависящей от скорости и градиента скорости.

Линейная форма обобщения теории моментных напряжений [5–10], сделанного Тупином [8, разд. 7] получается при помощи исключения различия между деформациями единичной ячейки и окружающей среды; линейная теория моментных напряжений получается путем дальнейшего исключения симметричной части градиента деформаций. Оба этих частных случая ограничиваются малыми частотами и очень большими длинами волн, если они рассматриваются с точки зрения уравнений, которые учитывают микроструктуру.

## 1. Кинематика

Рассмотрим материальный объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ , причем  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , — прямоугольные материальные компоненты радиуса-вектора положения, измеряемые от фиксированного начала,

<sup>1)</sup> Mindlin R. D., Micro-structure in linear elasticity, *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, № 1, 51–78 (1964).

<sup>2)</sup> Скорее как элемент надмолекулярной структуры полимера. — *Прим. ред.*

и  $x_i$  — компоненты в той же прямоугольной системе пространственно-го радиуса-вектора. Компоненты перемещения материальной частицы определяются в виде

$$u_i \equiv x_i - X_i. \quad (1.1)$$

Предполагаем, что в каждую материальную частицу вложен *микрообъем*  $V'$ , в котором  $X'_i$  и  $x'_i$  — компоненты материального и пространственного радиусов-векторов соответственно, отнесенные к осям, параллельным  $x_i$ , с началом, фиксированным в частице, так что начало координат  $x'_i$  движется с перемещением  $\mathbf{u}$ . *Микроперемещение*  $\mathbf{u}'$  определяется компонентами

$$u'_i \equiv x'_i - X'_i. \quad (1.2)$$

Абсолютные значения градиента перемещения считаются малыми по сравнению с единицей:

$$\left| \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right| \ll 1, \quad \left| \frac{\partial u'_j}{\partial X'_i} \right| \ll 1, \quad (1.3)$$

так что мы можем написать

$$\frac{\partial u_j}{\partial X_i} \approx \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \equiv \partial_i u_j, \quad u_j = u_j(x_i, t), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial X'_i} \approx \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \equiv \partial'_i u'_j, \quad u'_j = u'_j(x_i, x'_i, t), \quad (1.5)$$

где  $t$  — время.

Допустим, что микроперемещения можно выразить в виде суммы произведений заданных функций от  $x'_i$  и произвольных функций от  $x_i$  и  $t$ . В качестве приближения, учитывающего только один линейный член ряда, имеем

$$u'_j = x'_k \psi_{kj}, \quad (1.6)$$

где  $\psi_{kj}$  — функция только от  $x_i$  и  $t$ . Тогда градиент перемещения в микросреде имеет вид

$$\partial'_i u'_j = \psi_{ij}, \quad (1.7)$$

т. е. *микродисторсия*  $\psi_{ij}$  должна быть взята однородной в *микросреде*  $V'$  и неоднородной в *макросреде*  $V$ . Учитывая второе неравенство (1.3), имеем  $|\psi_{ij}| \ll 1$ . Симметричная часть от  $\psi_{ij}$  представляет собой *микродеформацию*:

$$\psi_{(ij)} \equiv \frac{1}{2} (\psi_{ij} + \psi_{ji}), \quad (1.8)$$

а антисимметричная часть — *микровращение*:

$$\psi_{[ij]} \equiv \frac{1}{2} (\psi_{ij} - \psi_{ji}). \quad (1.9)$$

Другой интерпретацией микродисторсии является то, что величины  $\psi_{ij}$  пропорциональны компонентам перемещения концов деформируемых направляющих, как это описано Эриксоном и Трусделлом [1]. Тогда  $\psi_{[ij]}$  являются компонентами вращения триэдра Коссера [2, стр. 122].

Определим обычную деформацию (*макродеформацию*) соотношением

$$\varepsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad (1.10)$$

а также *относительную дилатацию* (разность между градиентом макроперемещений и микродилатацией) — соотношением

$$\gamma_{ij} \equiv \partial_i u_j - \psi_{ij} \quad (1.11)$$

и *градиент микродилатации* (макроградиент микродилатации) соотношением

$$\kappa_{ijk} \equiv \partial_i \psi_{jk}. \quad (1.12)$$

Все три тензора  $\epsilon_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  и  $\kappa_{ijk}$  не зависят от микрокоординат  $x'_i$ . Компоненты тензоров  $\gamma_{ij}$  и  $\kappa_{ijk}$  показаны на рис. 1 и 2.

Предполагается, что  $u_i$  и  $\psi_{ij}$  — однозначные функции от  $x_i$ ; это приводит к условиям совместности:

$$e_{mik} e_{nlj} \partial_i \partial_j \epsilon_{kl} = 0, \quad (1.13)$$

$$e_{mij} \partial_i \kappa_{jkl} = 0, \quad (1.14)$$

$$\partial_i (\epsilon_{jk} + \omega_{jk} - \gamma_{jk}) = \kappa_{ijk}, \quad (1.15)$$

где  $\omega_{ij}$  — *макровращение*:

$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\partial_i u_j - \partial_j u_i), \quad (1.16)$$

и  $e_{ijk}$  — *альтернативный тензор*.

## 2. Кинетическая и потенциальная энергии

Пусть микросреда есть параллелепипед, имеющий объем  $V'$  и сторону длиной  $2d_i$ , а  $l_{ij}$  — направляющие косинусы относительно осей  $x'_i$ . Пусть  $x''_i$  — косоугольные декартовы координаты, параллельные сторонам  $d_i$  соответственно. Тогда [3, стр. 153]

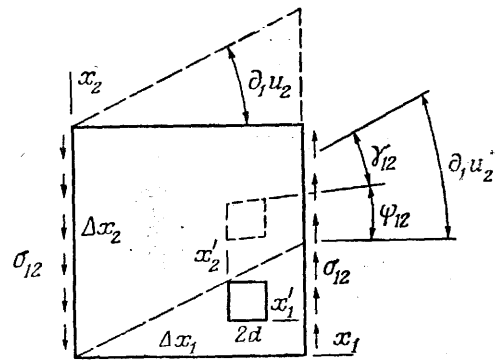
$$x'_i = l_{ij} x''_j, \quad (2.1a)$$

$$V' = 8 \|l_{ij} l_{ik}\|^{1/2} d_1 d_2 d_3, \quad (2.1b)$$

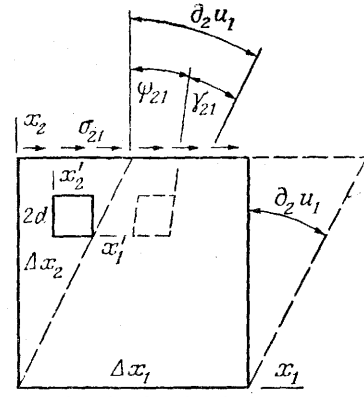
$$dV' = \|l_{ij} l_{ik}\|^{1/2} dx''_1 dx''_2 dx''_3. \quad (2.1v)$$

Пусть  $\rho_M$  — масса макроматериала единицы макрообъема, и пусть  $\rho'$  — масса микроматериала единицы макрообъема. Определим плотность кинетической энергии (кинетическая энергия единицы макрообъема):

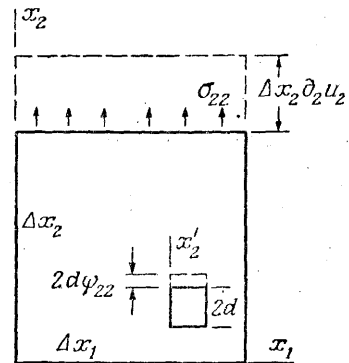
$$T \equiv \frac{1}{2} \rho_M \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{V'} \int_{V'} \frac{1}{2} \rho' (\dot{u}_j + \dot{u}'_j) (\dot{u}_j + \dot{u}'_j) dV', \quad (2.2)$$



$$\gamma_{12} = \partial_1 u_2 - \psi_{12}$$



$$\gamma_{21} = \partial_2 u_1 - \psi_{21}$$



$$\gamma_{22} = \partial_2 u_2 - \psi_{22}$$

Рис. 1. Компоненты относительных напряжений  $\sigma_{ij}$ , градиента перемещения  $\partial_i u_j$ , микродилатации  $\psi_{ij}$  и относительной дилатации  $\gamma_{ij}$ .

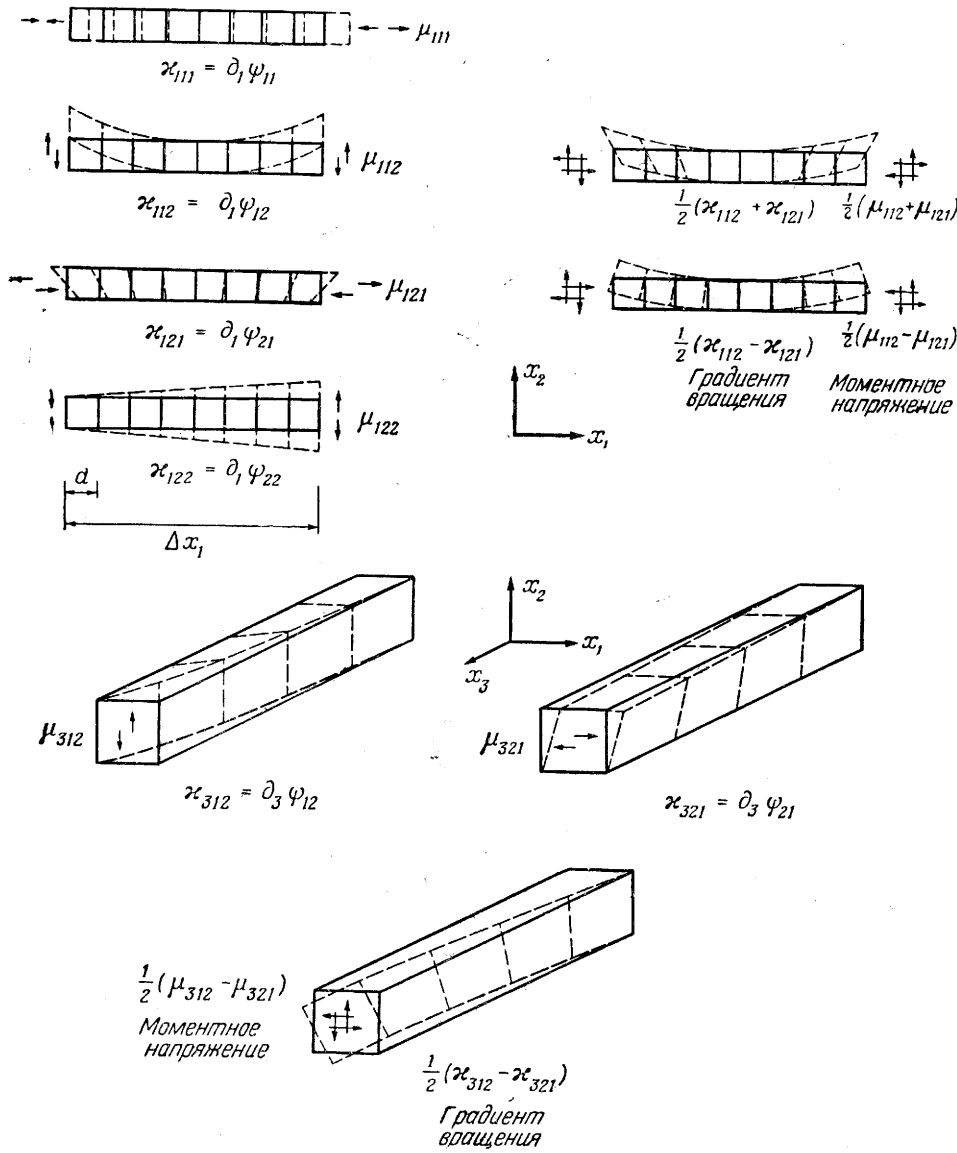


Рис. 2. Компоненты двойных напряжений  $\mu_{ijk}$  и градиента микродисторсии  $x_{ijk}$ .

где точка означает дифференцирование по времени. Подставляя (1.6) и (2.1) в (2.2) и выполняя интегрирование, находим

$$T = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \rho' d_{ki}^2 \dot{\psi}_{kj} \dot{\psi}_{lj}, \quad (2.3a)$$

где

$$\rho \equiv \rho_M + \rho', \quad (2.3b)$$

$$d_{ki}^2 \equiv d_p d_q (\delta_{p1} \delta_{q1} l_{k1} l_{l1} + \delta_{p2} \delta_{q2} l_{k2} l_{l2} + \delta_{p3} \delta_{q3} l_{k3} l_{l3}) = d_{lk}^2 \quad (2.3в)$$

и  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. В случае куба со сторонами длиной  $2d$ , параллельными оси  $x'_i$ , имеем

$$l_{ij} = \delta_{ij}, \quad d_1 = d_2 = d_3 \equiv d. \quad (2.4)$$

Тогда второй член в (2.3a) сводится к  $\frac{1}{6} \rho' d^2 \dot{\psi}_{ij} \dot{\psi}_{lj}$ . Если весь материал составлен из единичных ячеек, то  $\rho_M = 0$ . Тогда  $\rho' = \rho$ .

Для плотности потенциальной энергии (потенциальная энергия единицы макрообъема) введем функцию  $W$  сорока двух переменных  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$ ,  $\kappa_{ijk}$ :

$$W = W(\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ijk}). \quad (2.5)$$

Малое жесткое вращение деформируемого тела описывается при помощи вращения  $\omega_{ij} = \text{const}$  макроматериала и при помощи вращения  $\psi_{[ij]}$  микроматериала. Вызванные ими перемещения равны

$$u_j = x_i \omega_{ij}, \quad u'_i = x'_j \psi_{[ij]}. \quad (2.6)$$

Наложение таких перемещений оставляет  $W$  неизменным, так как в добавленных членах  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$  и  $\kappa_{ijk}$  равны нулю.

Допущения (1.6), (2.2) и (2.5) минимальны для получения уравнений, которые дают желаемые дисперсионные соотношения для плоских волн, включая продольные, поперечные, акустические и оптические составляющие. Насколько выполняются условия (1.6), (2.2) и (2.5), настолько получим то, что требуется.

Единичная ячейка должна быть выбрана в форме параллелепипеда, чтобы она изображала единичную ячейку кристаллической решетки. Однако другая форма ячейки только изменит тензор  $d_{kl}^2$ . Ячейка может также интерпретироваться как молекула полимера, кристаллит поликристалла или частица зернистого материала.

### 3. Вариационное уравнение движения

Запишем принцип Гамильтона для независимых вариаций  $\delta u_i$  и  $\delta \psi_{ij}$  между фиксированными значениями  $u_i$  и  $\psi_{ij}$  за время от  $t_0$  до  $t_1$ :

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{T} - \mathcal{W}) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{W}'_1 dt = 0, \quad (3.1)$$

где  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{W}$  — полные кинетическая и потенциальная энергии:

$$\mathcal{T} \equiv \int_V T dV, \quad \mathcal{W} \equiv \int_V W dV, \quad (3.2)$$

и  $\delta \mathcal{W}'_1$  — вариация работы внешних сил.

Обычным способом [4, стр. 166] мы находим из (2.3а) и (3.2а)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{T} dt = - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \left( \rho \ddot{u}_j \delta u_j + \frac{1}{3} \rho' d_{jil}^2 \ddot{\psi}_{lk} \delta \psi_{jk} \right) dV. \quad (3.3)$$

Что касается вариации потенциальной энергии, то мы сначала определим

$$\tau_{ij} \equiv \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ji}, \quad (3.4a)$$

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}, \quad (3.4b)$$

$$\mu_{ijk} \equiv \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ijk}}. \quad (3.4в)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta W &= \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} + \mu_{ijk} \delta \kappa_{ijk} = \\ &= \tau_{ij} \partial_i \delta u_j + \sigma_{ij} (\partial_i \delta u_j - \delta \psi_{ij}) + \mu_{ijk} \partial_i \delta \psi_{jk} = \\ &= \partial_i [(\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j] - \partial_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j - \sigma_{ij} \delta \psi_{ij} + \partial_i (\mu_{ijk} \delta \psi_{jk}) - \partial_i \mu_{ijk} \delta \psi_{jk}. \end{aligned}$$

Применяя теорему о дивергенции, находим

$$\delta \mathcal{W} = \int_V \delta W dV = - \int_V \partial_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j dV - \int_V (\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk}) \delta \psi_{jk} dV + \\ + \int_S n_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j dS + \int_S n_i \mu_{ijk} \delta \psi_{jk} dS. \quad (3.5)$$

Форма (3.5) является обоснованием допущения следующей формы для вариации работы внешних сил:

$$\delta \mathcal{W}_1 = \int_V f_j \delta u_j dV + \int_V \Phi_{jk} \delta \psi_{jk} dV + \int_S t_j \delta u_j dS + \int_S T_{jk} \delta \psi_{jk} dS. \quad (3.6)$$

Определения  $u_j$  и  $\psi_{jk}$  и то, что подинтегральное выражение в объемном и поверхностном интегралах представляет собой вариации работы в единице объема и площади, дают физический смысл для коэффициентов при  $\delta u_j$  и  $\delta \psi_{jk}$ . Таким образом,  $f_j$  является массовой силой в единице объема, а  $t_j$  — поверхностной силой на единицу площади (вектор напряжения или натяжение);  $\Phi_{jk}$  можно интерпретировать как двойную силу в единице объема [4, стр. 187], а  $T_{jk}$  — как двойную силу на единицу площади. Диагональные элементы  $\Phi_{jk}$  и  $T_{jk}$  являются двойными силами без момента, а недиагональные — двойными силами с моментом. Антисимметрическая часть  $\Phi_{[jk]}$  массовой двойной силы  $\Phi_{jk}$  есть объемная пара. Антисимметрическая часть  $T_{[jk]}$  двойного натяжения  $T_{jk}$  есть вектор моментного напряжения Коссера. Как в  $\Phi_{jk}$ , так и в  $T_{jk}$  первый индекс дает ориентацию плеча рычага между силами, а второй индекс дает ориентацию сил. На поверхности с положительным направлением ее внешней нормали сила на положительном конце плеча рычага действует в положительном направлении. („Положительным“ считается положительное направление координатных осей, параллельных плечу рычага или силы.) На поверхности с отрицательным направлением внешней нормали направления сил обратны.

Подставляя (3.3), (3.5) и (3.6) в (3.1) и опуская интегрирование по времени, получаем вариационное уравнение движения

$$\int_V (\partial_i \tau_{ij} + \partial_i \sigma_{ij} + f_j - \rho \ddot{u}_j) \delta u_j dV + \\ + \int_V (\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk} + \Phi_{jk} - \frac{1}{3} \rho' d_{ij}^2 \ddot{\psi}_{ik}) \delta \psi_{jk} dV + \\ + \int_S [t_j - n_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij})] \delta u_j dS + \int_S (T_{jk} - n_i \mu_{ijk}) \delta \psi_{jk} dS = 0. \quad (3.7)$$

#### 4. Уравнения движения в напряжениях и граничные условия

Из вариационного уравнения движения немедленно следует двенадцать уравнений движения в напряжениях:

$$\partial_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) + f_j = \rho \ddot{u}_j, \quad (4.1a)$$

$$\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk} + \Phi_{jk} = \frac{1}{3} \rho' d_{ij}^2 \ddot{\psi}_{ik}, \quad (4.1b)$$

и двенадцать граничных условий:

$$t_j = n_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}), \quad (4.2a)$$

$$T_{jk} = n_i \mu_{ijk}. \quad (4.2b)$$

Учитывая (3.4), (4.2) и смысл  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$ ,  $x_{ijk}$ , будем называть  $\tau_{ij}$  *напряжениями Коши*,  $\sigma_{ij}$  *относительными напряжениями*,  $\mu_{ijk}$  *двойными напряжениями*. Двадцать семь компонент  $\mu_{ijk}$  интерпретируются как двойные силы на единицу площади. Первый индекс  $\mu_{ijk}$  обозначает нормаль к поверхности, на которую действует компонента; второй и третий индексы имеют такой же смысл, как два индекса в  $T_{jk}$ . Компоненты  $\mu_{ijk}$  показаны на рис. 2.

Линейные уравнения континуума Коссера [2] получаются, если положить  $\psi_{(ij)} = 0$ . Тогда  $\sigma_{(ij)} = \tau_{ij}$  и  $\mu_{i(jk)} = 0$  и остается  $\mu_{i[jk]}$  (моментное напряжение Коссера) и  $\sigma_{[ij]}$ , которое следует рассматривать как антисимметричную часть несимметричного напряжения  $\tau_{ij}$ . Однако в настоящей теории напряжения Коши  $\tau_{ij}$  являются симметричными и  $\sigma_{[ij]}$  — антисимметричная часть несимметричного относительного тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ .

Уравнения (2.5), (3.4) и (4.1) содержат, кроме линейных уравнений континуума Коссера, также и линейный вариант уравнений теории моментных напряжений [5—10] при малых частотах и очень больших длинах волн, а также обобщение теории моментных напряжений Тупина [8, разд. 7]. Они рассмотрены в разд. 9—12.

Если будут сохранены добавочные члены в разложении в ряд (1.6) микроперемещений  $u'_j$ , то появятся напряжения высших порядков. Кроме напряжений, связанных с двойными силами, отнесенными к единице площади, появятся напряжения, связанные с  $n$ -кратными силами, отнесенными к единице площади. Все эти напряжения будут самоуравновешенными, тогда как из  $\mu_{ijk}$  самоуравновешены только  $\mu_{i(jk)}$ .

### 5. Определяющие уравнения

Для плотности потенциальной энергии мы принимаем однородную квадратичную функцию сорока двух переменных  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\gamma_{ij}$ ,  $x_{ijk}$ :

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} b_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} a_{ijklmn} x_{ijk} x_{lmn} + d_{ijklm} \gamma_{ij} x_{klm} + f_{ijklm} x_{ijk} \varepsilon_{lm} + g_{ijkl} \gamma_{ij} \varepsilon_{kl}. \quad (5.1)$$

Только  $1/2 \times 42 \times 43 = 903$  из  $42 \times 42 = 1764$  коэффициентов в (5.1) независимы. Число коэффициентов, соотношения между ними и число независимых коэффициентов дается в следующей таблице:

$$\left. \begin{aligned} c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jkl i}: & \quad 9 \times 9 - 60 = 21, \\ b_{ijkl} = b_{klij}: & \quad 9 \times 9 - 36 = 45, \\ a_{ijklmn} = a_{lmnij k}: & \quad 27 \times 27 - 351 = 378, \\ d_{ijklm}: & \quad 9 \times 27 = 243, \\ f_{ijklm} = f_{ijkml}: & \quad 9 \times 27 - 81 = 162, \\ g_{ijkl} = g_{ijlk}: & \quad 9 \times 9 - 27 = 54 \\ & \quad \underline{903} \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Из (5.1) и (3.4) имеем

$$\tau_{pq} = c_{pqij} \varepsilon_{ij} + g_{ijpq} \gamma_{ij} + f_{ijkpq} x_{ijk}, \quad (5.3a)$$

$$\sigma_{pq} = g_{pqij} \varepsilon_{ij} + b_{ijpq} \gamma_{ij} + d_{pqijk} x_{ijk}, \quad (5.3b)$$

$$\mu_{pqr} = f_{pqr ij} \varepsilon_{ij} + d_{ijpqr} \gamma_{ij} + a_{pqr ijk} x_{ijk}. \quad (5.3b)$$

В случае центрально симметричного изотропного материала (называемого далее изотропным) число независимых коэффициентов сильно сокращается. Так как не существует изотропных тензоров нечетного ранга,  $d_{ijklm}$  и  $f_{ijklm}$  должны быть равны нулю. Оставшиеся коэффициенты должны быть однородными линейными функциями произведений дельт Кронекера. Существуют три независимых произведения от двух дельт Кронекера и пятнадцать независимых произведений от трех дельт Кронекера. Следовательно,

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_2 \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (5.4a)$$

$$b_{ijkl} = b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + b_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + b_3 \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (5.4б)$$

$$g_{ijkl} = g_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + g_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + g_3 \delta_{il} \delta_{jk}, \quad (5.4в)$$

$$\begin{aligned} a_{ijklmn} = & a_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + a_2 \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + a_3 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \\ & + a_4 \delta_{jk} \delta_{il} \delta_{mn} + a_5 \delta_{jk} \delta_{im} \delta_{nl} + a_6 \delta_{jk} \delta_{in} \delta_{lm} + \\ & + a_7 \delta_{kl} \delta_{jl} \delta_{mn} + a_8 \delta_{ki} \delta_{jm} \delta_{nl} + a_9 \delta_{ki} \delta_{jn} \delta_{lm} + \\ & + a_{10} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + a_{11} \delta_{jl} \delta_{km} \delta_{in} + a_{12} \delta_{kl} \delta_{im} \delta_{jn} + \\ & + a_{13} \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + a_{14} \delta_{jl} \delta_{kn} \delta_{im} + a_{15} \delta_{kl} \delta_{in} \delta_{jm}. \end{aligned} \quad (5.4г)$$

Условия (5.2) требуют шесть соотношений

$$\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu, \quad g_2 = g_3,$$

$$a_1 = a_6, \quad a_2 = a_9, \quad a_5 = a_7, \quad a_{11} = a_{12},$$

оставляющие восемнадцать независимых коэффициентов. Таким образом, плотность потенциальной энергии сводится к выражению

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} b_1 \gamma_{ii} \gamma_{jj} + \frac{1}{2} b_2 \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \\ & + \frac{1}{2} b_3 \gamma_{ij} \gamma_{ji} + g_1 \gamma_{ii} \varepsilon_{jj} + g_2 (\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) \varepsilon_{ij} + \\ & + a_1 x_{iik} x_{kjj} + a_2 x_{iik} x_{jkj} + \frac{1}{2} a_3 x_{iik} x_{jjk} + \frac{1}{2} a_4 x_{ijj} x_{lkk} + \\ & + a_5 x_{ijj} x_{kik} + \frac{1}{2} a_8 x_{iji} x_{kjk} + \frac{1}{2} a_{10} x_{ijk} x_{ijk} + a_{11} x_{ijk} x_{jki} + \\ & + \frac{1}{2} a_{13} x_{ijk} x_{ikj} + \frac{1}{2} a_{14} x_{ijk} x_{jik} + \frac{1}{2} a_{15} x_{ijk} x_{kji}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

и определяющие уравнения получаются в виде

$$\tau_{pq} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\mu \varepsilon_{pq} + g_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + g_2 (\gamma_{pq} + \gamma_{qp}), \quad (5.6a)$$

$$\sigma_{pq} = g_1 \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2g_2 \varepsilon_{pq} + b_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + b_2 \gamma_{pq} + b_3 \gamma_{qp}, \quad (5.6б)$$

$$\begin{aligned} \mu_{pqr} = & a_1 (x_{iip} \delta_{qr} + x_{rii} \delta_{pq}) + a_2 (x_{iiq} \delta_{pr} + x_{iri} \delta_{pq}) + a_3 x_{iir} \delta_{pq} + \\ & + a_4 x_{pii} \delta_{qr} + a_5 (x_{qiq} \delta_{pr} + x_{ipi} \delta_{qr}) + a_8 x_{iqi} \delta_{pr} + a_{10} x_{pqr} + \\ & + a_{11} (x_{rqp} + x_{qrp}) + a_{13} x_{prq} + a_{14} x_{qpr} + a_{15} x_{rqp}. \end{aligned} \quad (5.6в)$$

## 6. Уравнения движения в перемещениях

Мы можем получить двенадцать уравнений движения для двенадцати переменных  $u_i$  и  $\psi_{ij}$ , подставляя сначала (1.10), (1.11) и (1.12) в определяющие уравнения, а затем результат — в уравнения движения в напряжениях (4.1). Нет необходимости считать материал пространственно однородным. Фактически коэффициенты упругости и плотности могут быть взяты как периодические функции косоугольных координат, параллельных сторонам единичной ячейки с периодом  $2d_i$ .



Они будут представлять периодическую структуру кристаллической решетки. Однако в этом случае уравнения станут трудноразрешимы, в то же время некоторые из их основных свойств проявляются в свойствах *макрооднородных материалов*, по крайней мере для длин волн, больших размера элементарной ячейки. Изотропный случай особенно прост. Однако он все же содержит многие новые свойства макрооднородных материалов.

В случае изотропии применимы определяющие уравнения (5.6), а также (2.4). Тогда для макрооднородных изотропных материалов уравнения относительно  $u_i$  и  $\psi_{ij}$  примут вид

$$\begin{aligned} & (\mu + 2g_2 + b_2) \partial_j \partial_j u_i + (\lambda + \mu + 2g_1 + 2g_2 + b_1 + b_3) \partial_i \partial_j u_j - \\ & - (g_1 + b_1) \partial_i \psi_{jj} - (g_2 + b_2) \partial_j \psi_{ji} - (g_2 + b_3) \partial_j \psi_{ij} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (6.1) \\ & (a_1 + a_5) (\partial_k \partial_i \psi_{ki} \delta_{ij} + \partial_i \partial_j \psi_{kk}) + (a_2 + a_{11}) (\partial_j \partial_k \psi_{ki} + \partial_i \partial_k \psi_{jk}) + \\ & + (a_3 + a_{14}) \partial_i \partial_k \psi_{kj} + a_4 \partial_k \partial_k \psi_{ll} \delta_{ij} + (a_8 + a_{15}) \partial_j \partial_k \psi_{ik} + \\ & + a_{10} \partial_k \partial_k \psi_{ij} + a_{13} \partial_k \partial_k \psi_{ji} + g_1 \partial_k u_k \delta_{ij} + g_2 (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \\ & + b_1 (\partial_k u_k - \psi_{kk}) \delta_{ij} + b_2 (\partial_i u_j - \psi_{ij}) + b_3 (\partial_j u_i - \psi_{ji}) + \Phi_{ij} = \\ & = \frac{1}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{ij}. \quad (6.2) \end{aligned}$$

## 7. Микроколебания

Рассмотрим решения уравнений (6.1) и (6.2) в виде

$$u_i = f_i = \Phi_{ij} = 0, \quad \psi_{ij} = A_{ij} e^{i\omega t}, \quad (7.1)$$

где  $A_{ij}$  — константы. Тогда уравнения (6.1) удовлетворяются тождественно, а (6.2) примут вид

$$b_1 \delta_{ij} A_{kk} + b_2 A_{ij} + b_3 A_{ji} = \frac{1}{3} \rho' d^2 \omega^2 A_{ij}. \quad (7.2)$$

Эти уравнения допускают следующие решения:

*объемные формы колебаний*

$$A_{11} = A_{22} = A_{33}, \quad A_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (7.3a)$$

$$\omega_d^2 = \frac{3(3b_1 + b_2 + b_3)}{\rho' d^2}; \quad (7.3b)$$

*сдвиговые формы колебаний*

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad i \neq j, \quad A_{ij} = 0, \quad i = j, \quad (7.4a)$$

$$\omega_s^2 = \frac{3(b_2 + b_3)}{\rho' d^2}; \quad (7.4b)$$

*формы колебаний расширения при постоянном объеме*

$$A_{ii} = 0, \quad A_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (7.5a)$$

$$\omega_s^2 = \frac{3(b_2 + b_3)}{\rho' d^2}; \quad (7.5b)$$

*вращательные формы колебаний*

$$A_{ij} = -A_{ji}, \quad (7.6a)$$

$$\omega_r^2 = \frac{3(b_2 - b_3)}{\rho' d^2}. \quad (7.6b)$$

Ограничение на плотность потенциальной энергии, следующее из требования ее положительной определенности, имеет вид

$$3b_1 + b_2 + b_3 > 0, \quad b_2 + b_3 > 0, \quad b_2 - b_3 > 0.$$

Следовательно,  $\omega_d$ ,  $\omega_s$  и  $\omega_r$  — действительные частоты. Соответствующие формы колебаний аналогичны простым формам колебаний пластинки по толщине. Так же как последние не зависят от координат в плоскости пластинки, так и микроколебания не зависят от координат  $x_i$  трехмерного континуума с микроструктурой. Волны расширения и изгиба в пластинке взаимодействуют с колебаниями по толщине при высоких частотах, образуя высшие ветви дисперсионных соотношений для пластинки.

Аналогично можно предположить, что продольные и поперечные акустические волны в трехмерном континууме с микроструктурой взаимодействуют с микроколебаниями, образуя оптические ветви.

### 8. Плоские волны большой длины волны

Рассмотрим решения уравнений (6.1) и (6.2) с  $f_i$  и  $\Phi_{ij}$ , равными нулю, и

$$u_i = u_i(x_1, t), \quad \Phi_{ij} = \Phi_{ij}(x_1, t). \quad (8.1)$$

При помощи линейных комбинаций двенадцать уравнений можно объединить в три независимых уравнения и три независимые системы по три уравнения в каждой.

*Сдвиговая оптическая I*

$$(a_{10} + a_{13}) \partial_1 \partial_1 \psi_{(23)} - (b_2 + b_3) \psi_{(23)} = -\frac{1}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{(23)}. \quad (8.2)$$

*Сдвиговая оптическая II:* то же, что (8.2), за исключением того, что  $\psi_{(23)}$  заменено на  $\psi_{22} - \psi_{33}$ .

*Вращательная оптическая*

$$(a_{10} - a_{13}) \partial_1 \partial_1 \psi_{[23]} - (b_2 - b_3) \psi_{[23]} = \frac{1}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{[23]}. \quad (8.3)$$

*Продольная система*

$$\left. \begin{aligned} k_{11} \partial_1 \partial_1 u_1 - k_{12} \partial_1 \psi_{11}^D - k_{13} \partial_1 \psi &= \rho \ddot{u}_1, \\ k_{21} \partial_1 u_1 + k_{22} \partial_1 \partial_1 \psi_{11}^D - k'_{22} \psi_{11}^D + k_{23} \partial_1 \partial_1 \psi &= \frac{1}{2} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{11}^D, \\ k_{31} \partial_1 u_1 + k_{32} \partial_1 \partial_1 \psi_{11}^D + k_{33} \partial_1 \partial_1 \psi - k'_{33} \psi &= \rho' d^2 \ddot{\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

где

$$\psi = \frac{1}{3} \psi_{ii}, \quad \psi_{11}^D = \psi_{11} - \psi$$

и

$$\begin{aligned} k_{11} &= \lambda + 2\mu + 2g_1 + 4g_2 + b_1 + b_2 + b_3, \\ k_{22} &= 2a_2 + a_3 + a_8 + \frac{3}{2} a_{10} + 2a_{11} + \frac{3}{2} a_{13} + a_{14} + a_{15}, \\ k_{33} &= 6a_1 + 2a_2 + a_3 + 9a_4 + 6a_5 + a_8 + 3a_{10} + 2a_{11} + 3a_{13} + a_{14} + a_{15}, \\ k_{23} &= k_{32} = 3a_1 + 2a_2 + a_3 + 3a_5 + a_8 + 2a_{11} + a_{14} + a_{15}, \\ k_{31} &= k_{13} = 3g_1 + 2g_2 + 3b_1 + b_2 + b_3, \\ k_{12} &= k_{21} = 2g_2 + b_2 + b_3, \\ k'_{22} &= \frac{3}{2} (b_2 + b_3), \\ k'_{33} &= 3(3b_1 + b_2 + b_3). \end{aligned}$$

## Поперечная система I

$$\left. \begin{aligned} \bar{k}_{11}\partial_1\partial_1u_2 - \bar{k}_{12}\partial_1\psi_{(12)} - \bar{k}_{13}\partial_1\psi_{[12]} &= \rho\ddot{u}_2, \\ \bar{k}_{21}\partial_1u_2 + \bar{k}_{22}\partial_1\partial_1\psi_{(12)} - \bar{k}'_{22}\psi_{(12)} + \bar{k}_{23}\partial_1\partial_1\psi_{[12]} &= \frac{2}{3}\rho'd^2\ddot{\psi}_{(12)}, \\ \bar{k}_{31}\partial_1u_2 + \bar{k}_{32}\partial_1\partial_1\psi_{(12)} + \bar{k}_{33}\partial_1\partial_1\psi_{[12]} - \bar{k}'_{33}\psi_{[12]} &= \frac{2}{3}\rho'd^2\ddot{\psi}_{[12]}, \end{aligned} \right\} (8.5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11} &= \mu + 2g_2 + b_2, \\ \bar{k}_{22} &= 2a_2 + a_3 + a_8 + 2a_{10} + 2a_{11} + 2a_{13} + a_{14} + a_{15}, \\ \bar{k}_{33} &= -2a_2 + a_3 + a_8 + 2a_{10} - 2a_{11} - 2a_{13} + a_{14} + a_{15}, \\ \bar{k}_{23} &= \bar{k}_{32} = a_3 - a_8 + a_{14} - a_{15}, \\ \bar{k}_{31} &= \bar{k}_{13} = b_2 - b_3, \\ \bar{k}_{12} &= \bar{k}_{21} = 2g_2 + b_2 + b_3, \\ \bar{k}'_{22} &= 2(b_2 + b_3), \\ \bar{k}'_{33} &= 2(b_2 - b_3). \end{aligned}$$

Поперечная система II: та же, что и поперечная система I в предположении, что  $u_2$ ,  $\psi_{(12)}$  и  $\psi_{[12]}$  заменены на  $u_3$ ,  $\psi_{(13)}$  и  $\psi_{[13]}$  соответственно.

Если теперь (8.1) приспособить к плоским волнам

$$u_i = A_i \exp[i(\xi x_1 - \omega t)], \quad \psi_{ij} = B_{ij} \exp[i(\xi x_1 - \omega t)], \quad (8.6)$$

то получим четыре дисперсионных соотношения (зависимости  $\omega$  от  $\xi$ ). Сдвиговые оптические волны (SO) (дважды):

$$\frac{1}{3}\rho'd^2\omega^2 = b_2 + b_3 + (a_{10} + a_{13})\xi^2. \quad (8.7)$$

Оптические волны вращения (RO):

$$\frac{1}{3}\rho'd^2\omega^2 = b_2 - b_3 + (a_{10} - a_{13})\xi^2. \quad (8.8)$$

Продольные волны (LA, LO, LDO):

$$\left\| \begin{array}{ccc} k_{11}\xi^2 - \rho\omega^2 & k_{12}\xi & k_{13}\xi \\ k_{21}\xi & k_{22}\xi^2 + k'_{22} - \frac{1}{2}\rho'd^2\omega^2 & k_{23}\xi^2 \\ k_{31}\xi & k_{32}\xi^2 & k_{33}\xi^2 + k'_{33} - \rho'd^2\omega^2 \end{array} \right\| = 0. \quad (8.9)$$

Поперечные волны (TA, TO, TRO) (дважды):

$$\left\| \begin{array}{ccc} \bar{k}_{11}\xi^2 - \rho\omega^2 & \bar{k}_{12}\xi & \bar{k}_{13}\xi \\ \bar{k}_{21}\xi & \bar{k}_{22}\xi^2 + \bar{k}'_{22} - \frac{2}{3}\rho'd^2\omega^2 & \bar{k}_{23}\xi^2 \\ \bar{k}_{31}\xi & \bar{k}_{32}\xi^2 & \bar{k}_{33}\xi^2 + \bar{k}'_{33} - \frac{2}{3}\rho'd^2\omega^2 \end{array} \right\| = 0. \quad (8.10)$$

Эти дисперсионные соотношения аналогичны тем, которые встречаются в теории второго порядка волн расширения в пластинках [11]. Соотношения (8.7) и (8.8) аналогичны соотношениям для второго сдвигового режима колебаний в пластинке. Соотношения (8.9) и (8.10) аналогичны соотношениям для совместных форм колебаний расширения, растяжения по толщине и симметричного сдвига по толщине в пластинке, т. е. имеется одна акустическая и две оптические ветви в каждом из соотношений (8.9) и (8.10).

В дисперсионных соотношениях (8.7) и (8.8) для форм невзаимодействующих колебаний существуют критические частоты  $\omega_s$  и  $\omega_r$  соответственно, в которых групповая скорость  $(d\omega/d\xi)$  равна нулю. Положительная определенность  $W$  требует, чтобы

$$a_{10} + a_{13} > 0, \quad a_{10} - a_{13} > 0. \quad (8.11)$$

Следовательно, частоты увеличиваются от критической частоты с увеличением вещественных волновых чисел. Ниже критических частот волновое число чисто мнимое с критическими значениями

$$\xi = \pm i \left( \frac{b_2 + b_3}{a_{10} + a_{13}} \right)^{1/2}, \quad \xi = \pm i \left( \frac{b_2 - b_3}{a_{10} - a_{13}} \right)^{1/2} \quad (8.12)$$

соответственно при нулевой частоте.

Поведение акустических ветвей в (8.9) и (8.10) при низких частотах описывается при помощи  $\omega'_i$ ,  $\omega''_i$ ,  $\omega'''_i$  ( $i=1$  для продольных,  $i=2$  для поперечных), т. е. значений первой, второй и третьей производных от  $\omega_i$  по  $\xi$  при  $\omega=0$  и  $\xi=0$ . Мы находим

$$\omega'_i = \tilde{v}_i, \quad \omega''_i = 0, \quad \omega'''_i = 3\tilde{v}_i(\tilde{l}_i^2 - h_i^2), \quad (8.13)$$

где

$$\tilde{v}_1^2 = \frac{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{\rho}, \quad \tilde{v}_2^2 = \frac{\tilde{\mu}}{\rho}, \quad (8.14)$$

$$\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} = \lambda + 2\mu - \frac{8g_2^2}{3(b_2 + b_3)} - \frac{(3g_1 + 2g_2)^2}{3(3b_1 + b_2 + b_3)}, \quad (8.15a)$$

$$\tilde{\mu} = \mu - \frac{2g_2^2}{b_2 + b_3}, \quad (8.15b)$$

$$\tilde{l}_1^2 = \frac{2(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3 + \tilde{a}_4 + \tilde{a}_5)}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \quad \tilde{l}_2^2 = \frac{2(\tilde{a}_3 + \tilde{a}_4)}{\tilde{\mu}}, \quad (8.16)$$

$$h_1^2 = \frac{\rho' d^2 [2\alpha^2 + (\alpha + \beta)^2]}{3\rho}, \quad h_2^2 = \frac{\rho' d^2 (1 + \beta^2)}{6\rho}, \quad (8.17)$$

$$\alpha = \frac{1}{b_2 + b_3} \left( g_1 - \frac{b_1(3g_1 + 2g_2)}{3b_1 + b_2 + b_3} \right), \quad \beta = 1 + \frac{2g_2}{b_2 + b_3}, \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_1 &= \frac{1}{2} \left[ (1 + \beta)(3\alpha + \beta)a_1 + (1 + 2\alpha\beta + \beta^2)a_2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(1 + \beta)(1 - 2\alpha - \beta)a_3 - (1 - \beta)(3\alpha + \beta)a_5 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(1 - \beta)(1 + 2\alpha + \beta)a_8 + \right. \\
 &\quad \left. + 2\alpha\beta a_{11} - \alpha(1 - \beta)a_{14} + \alpha(1 + \beta)a_{15} \right], \\
 \tilde{a}_2 &= \frac{1}{2} \left\{ -(1 - 2\alpha - \beta)(3\alpha + \beta)a_1 - \frac{1}{2}[1 - (2\alpha + \beta)^2]a_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4}(1 - 2\alpha - \beta)^2a_3 + (3\alpha + \beta)^2a_4 + \right. \\
 &\quad \left. + (3\alpha + \beta)(1 + 2\alpha + \beta)a_5 + \frac{1}{4}(1 + 2\alpha + \beta)^2a_8 + \right. \\
 &\quad \left. + \alpha(3\alpha + 2\beta)a_{10} + 2\alpha(\alpha + \beta)a_{11} + \alpha(3\alpha + 2\beta)a_{13} + \right. \\
 &\quad \left. + \alpha(1 + \alpha + \beta)a_{14} - \alpha(1 - \alpha - \beta)a_{15} \right\}, \\
 \tilde{a}_3 &= \frac{1}{4} \left[ -(1 - \beta^2)a_2 + \frac{1}{2}(1 + \beta)^2a_3 + \frac{1}{2}(1 - \beta)^2a_8 \right], \\
 \tilde{a}_4 &= \frac{1}{4} \left[ (1 + \beta^2)a_{10} - (1 - \beta^2)(a_{11} + a_{13}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}(1 + \beta)^2a_{14} + \frac{1}{2}(1 - \beta)^2a_{15} \right], \\
 \tilde{a}_5 &= \frac{1}{4} \left[ -(1 - \beta^2)a_{10} + (1 + 3\beta^2)a_{11} + (1 + \beta^2)a_{13} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(1 + 2\beta - 3\beta^2)a_{14} - \frac{1}{2}(1 - 2\beta - 3\beta^2)a_{15} \right].
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

Положительная определенность  $W$  требует, чтобы  $\tilde{\mu}, \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}, \tilde{l}_i^2 > 0$ , в то время как проверка показывает, что и  $h_i^2 > 0$ .

Можно видеть, что предельная групповая скорость  $\tilde{v}_i$  меньше, чем вычисленная из деформационных жесткостей  $\lambda + 2\mu$  и  $\mu$ . Это явление обусловлено податливостью единичной ячейки и было установлено в теории кристаллической решетки Газисом и Уоллисом [12]. В виду того что  $\omega_i'' = 0$  при частоте, равной нулю, групповые скорости имеют максимум или минимум. Это зависит от того, будет ли  $\omega_i'''$  больше или меньше нуля, а это в свою очередь зависит от того, больше или меньше  $\tilde{l}^2$ , чем  $h^2$ . Итак,  $\tilde{l}_i^2$  и  $h_i^2$  — положительные величины, характеризующие пространственные свойства материала и зависящие от отношений жесткостей, отношения плотностей и размера единичной ячейки. Хотя  $d$ , возможно, меньше, чем  $\tilde{l}_i$ , отношение плотностей  $\rho'/\rho$  и отношения жесткостей  $\alpha$  и  $\beta$  могут сделать либо  $\tilde{l}$ , либо  $h$  больше. Следовательно, когда частота увеличивается от нуля, обе групповые скорости могут возрастать или обе могут убывать, или одна может возрастать, а другая убывать в зависимости от свойств материала. В теории однородных пластинок нет аналогии этому, потому что они не имеют нескольких жесткостей и плотностей. Однако это явление встречается в слоистых пластинках [13], и его можно также

найти в теории кристаллической решетки со сложным внутриатомным взаимодействием [14].

В пределе для коротких волн ( $\xi \rightarrow \infty$ ) асимптотические значения групповых скоростей акустических ветвей получаются в виде

$$\frac{1}{2d} \left\{ \frac{k_{22} + k_{33} - [(k_{22} - k_{33})^2 + 4k_{23}^2]^{1/2}}{1/3 \rho'} \right\}^{1/2} \quad (8.20)$$

из (8.9) и аналогичного выражения, если  $k$  заменено на  $\bar{k}$  из (8.10). Эти значения могут быть гораздо меньше значений, определяемых (8.13а), если

$$4(k_{22}k_{33} - k_{23}^2) \ll (k_{22} + k_{33})^2, \quad (8.21)$$

$$4(\bar{k}_{22}\bar{k}_{33} - \bar{k}_{23}^2) \ll (\bar{k}_{22} + \bar{k}_{33})^2, \quad (8.22)$$

что, по-видимому, является возможным.

Рассматривая оптические ветви в продольных и поперечных системах, видим, что в первом случае критические частоты  $\omega_s$  и  $\omega_d$  имеют место при больших длинах волн, в то время как во втором случае им соответствуют частоты  $\omega_s$  и  $\omega_r$ . Таким образом, две системы имеют одну общую критическую частоту. Один из двух видов колебаний является сдвигом, а другой — расширением при постоянном объеме. Как и в случае пластинки, групповые скорости всех четырех оптических ветвей равны нулю при критических частотах, соответствующих длинным волнам, за исключением маловероятных случаев совпадения критических частот в системе ( $b_1 = 0$  для продольных колебаний или  $b_3 = 0$  для поперечных колебаний). Другое сходство с положением в пластинках состоит в том, что, так как  $\xi$  растет от нуля, поведение оптических ветвей очень чувствительно к небольшим изменениям свойств материала. Одна возможность состоит в том, что две нижние оптические ветви имеют фазовые и групповые скорости противоположного знака, т. е.  $\omega$  уменьшается с возрастанием  $\xi$ . При дальнейшем возрастании  $\xi$  абсолютное значение групповых скоростей будет проходить через максимум, затем уменьшаться до нуля и потом увеличиваться, т. е. дисперсионная кривая будет иметь сначала точку перегиба, а затем — минимум.

Вид возможной конфигурации действительной части дисперсионных кривых показан на рис. 3. Четыре нижние ветви (ТА, LA, LO, ТО) совершенно аналогичны ветвям, полученным Брокхаузом и Йенгером [15, рис. 5] при измерении рассеяния нейтронов в германии.

На соответствующем этапе при выводе уравнений высокочастотных колебаний пластинки целесообразно ввести возможные в рамках теории поправки для компенсации ошибок, вводимых за счет допущения об изменении перемещения по толщине пластинки. Аналогичным ограничением в нашей задаче является допущение однородности деформации единичной ячейки. Величины поправок в теории пластинок получаются путем склеивания в соответствующих точках наклонов и кривизн дисперсионных кривых с соответствующими величинами, получаемыми из точного решения трехмерных уравнений. Так как не существует аналогии этому в рассматриваемом случае, такое корректирование не может быть сделано, и должны быть использованы экспериментальные данные.

Существует другой аспект теории пластинок, о котором следует упомянуть. Для формы колебаний по толщине с  $n + t$  узловыми плоскостями можно получить частоту более низкую, чем для случая  $n$  узловых плоскостей. Например, в изотропной пластинке форма сдвиго-

вых колебаний по толщине с двумя узловыми плоскостями имеет частоту, более низкую, чем форма колебаний растяжения по толщине с одной узловой плоскостью, если коэффициент Пуассона больше одной трети. Таким образом, лучшая аппроксимация достигается, если сохранено достаточное число членов в разложении в ряд перемещения, чтобы использовать это обстоятельство [11]. Аналогия в данном случае состоит в возможности появления форм микроколебаний с частотами, более низкими, чем частоты микроколебаний объемного расширения (7.3), если сохранить дополнительные члены в разложении (1.6). Однако из-за сложностей, которые получаются в результате такого шага, это, по-видимому, здесь делать нецелесообразно.

### 9. Низкочастотная аппроксимация с очень большими длинами волн

Этот и три следующих раздела посвящены обсуждению и выводу уравнений движения, более простых, чем (6.1) и (6.2), но ограниченных в приложениях гораздо более низкими частотами и гораздо большими длинами волн.

Как отмечалось ранее, если в теории пластинок [16, 17, 18] учитываются сдвиговая и растягивающая дисторсия в направлении толщины и обусловленная ими инерция, то формы колебаний по толщине, аналогичные микроколебаниям, получаются так же, как формы изгибных колебаний и колебаний растяжения, аналогичные поперечным и продольным формам акустических колебаний. При частотах, низких по сравнению с частотами колебаний в направлении толщины, и при длинах волн, больших по сравнению с толщиной пластинки, взаимодействия форм колебаний изгиба и растяжения с формами колебаний по толщине пренебрежимо. Так как частоты форм колебаний изгиба и растяжения приближаются к нулю, сдвиговая дисторсия в направлении толщины приближается к нулю, а растягивающая дисторсия в направлении толщины нет; скорее приближается к нулю напряжение, связанное с ней. Таким образом, антисимметричная и симметричная части дисторсии и напряжения должны рассматриваться отдельно при переходе от высокочастотных уравнений к классическим низкочастотным. Чтобы получить уравнения, пригодные для низких частот в случае изгиба, сдвиговую дисторсию в направлении толщины нужно устремить к нулю путем предельного перехода, причем соответствующие модули упругости должны стремиться к бесконечности. Произведение этих двух величин является неопределенной величиной, и оно оставляет напряжение сдвига по толщине неопределенным в определяющих уравнениях. В случае расширения напряжения в направлении толщины полагаются равными нулю, и получающиеся определяющие уравнения используются для того, чтобы исключить деформацию в направлении толщины из оставшихся уравнений.

Как в случае изгиба, так и в случае растяжения однородных пластинок компоненты скорости по направлению толщины полагаются равными нулю в выражении кинетической энергии для низкочастотного приближения, потому что их вклад пренебрежимо мал при малых частотах, для которых пригодны получающиеся уравнения благодаря подавлению сдвиговой дисторсии по толщине и пренебрежению нормальными напряжениями растяжения в направлении толщины [18, 19]. Это неверно для неоднородных пластин. Например, в слоистой пластинке инерция вращения наружных плоскостей относительно срединной плоскости пластинки может быть чрезвычайно важной даже при низких

частотах для некоторой комбинации отношений жесткостей, плотностей и расстояний между наружными плоскостями пластины [13].

Итак, компоненты скорости в направлении толщины аналогичны микроскоростям  $\dot{\psi}_{ij}$ , толщина пластинки аналогична размерам  $2d_i$  единичной ячейки; сдвиговая дисторсия в направлении толщины аналогична антисимметрической части относительной дисторсии ( $\gamma_{[ij]}$ ); модули сдвига в направлении толщины аналогичны  $b_{ij[kl]}$  и напряжения, связанные с изменением толщины, аналогичны симметрической части относительных напряжений  $\sigma_{(ij)}$ . Известный процесс получения из высокочастотных уравнений пластинки низкочастотных, длинноволновых аппроксимаций может дать наводящую идею при рассмотрении аналогичных членов в уравнениях упругого континуума с микроструктурой. Однако независимо от процесса или от теории пластинок критерием правильности получающихся уравнений движения является то обстоятельство, что они дают те же дисперсионные соотношения, как и те, которые находятся в пределе при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\xi \rightarrow 0$  для акустической ветви из общих уравнений. Так, в изотропном случае величины  $\omega'_i$ ,  $\omega''_i$  и  $\omega'''_i$  в (8.13) должны воспроизводиться точно. Внимание будет здесь обращено на этот случай, так как он гораздо проще, чем анизотропная форма, и так как имеются соотношения (8.13) для окончательной проверки.

Проверка (8.13в) показывает, что, как и в случае слоистых пластинок, недопустимо пренебрегать микроскоростями  $\dot{\psi}_{ij}$ . Их влияние заключено в  $h_i^2$ , и, как замечено при обсуждении (8.19),  $h^2$  может

быть меньше или больше  $\tilde{l}^2$  в зависимости от отношений жесткостей, плотностей и размеров единичной ячейки. Следовательно, пренебрежение величинами  $\dot{\psi}_{ij}$  воспрепятствует правильному воспроизведению низкочастотного поведения. В остальном, однако, можно следовать аналогии с однородными пластинками.

Таким образом, мы допускаем

$$\sigma_{(ij)} = 0, \quad (9.1)$$

$$b_2 - b_3 \rightarrow \infty, \quad \gamma_{[ij]} \rightarrow 0 \quad (9.2)$$

и переходим к выяснению влияния этих допущений на оставшиеся члены.

Изотропные определяющие уравнения для  $\tau_{pq}$  и для  $\sigma_{pq}$ , разделенные на симметричную и антисимметричную части, имеют вид

$$\tau_{pq} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\mu \varepsilon_{pq} + g_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + 2g_2 \gamma_{(pq)}, \quad (9.3)$$

$$\sigma_{(pq)} = g_1 \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2g_2 \varepsilon_{pq} + b_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + (b_2 + b_3) \gamma_{(pq)}, \quad (9.4)$$

$$\sigma_{[pq]} = (b_2 - b_3) \gamma_{[pq]}. \quad (9.5)$$

Тогда, согласно (9.2),  $\sigma_{[pq]}$  является неопределенной величиной, но, согласно (9.1), соотношения (9.4) можно решить относительно  $\gamma_{(pq)}$  в зависимости от  $\varepsilon_{pq}$ :

$$\gamma_{(pq)} = -\alpha \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + (1 - \beta) \varepsilon_{pq}, \quad (9.6)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  определяются соотношением (8.18).

Что касается  $\kappa_{ijk}$ , заметим сначала, что, так как

$$\gamma_{pq} = \partial_p \mu_q - \psi_{pq}$$

и  $\gamma_{[pq]}$  равно в нашем случае нулю, сохраняем только

$$\psi_{[pq]} = \omega_{pq}, \quad \psi_{(pq)} = \varepsilon_{pq} - \gamma_{(pq)}. \quad (9.7)$$



Используя тогда выражение (9.6) для  $\gamma_{(pq)}$ , получаем

$$\psi_{(pq)} = \alpha \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + \beta \varepsilon_{pq}. \quad (9.8)$$

Таким образом,  $x_{ijk} \equiv \partial_i \psi_{jk} = \partial_i \psi_{(jk)} + \partial_i \psi_{[jk]}$  сводится к соотношению

$$x_{ijk} \rightarrow \tilde{\alpha} x_{iii} \delta_{jk} + \frac{1}{2} (1 + \beta) \tilde{x}_{ijk} - \frac{1}{2} (1 - \beta) \tilde{x}_{ikj}, \quad (9.9)$$

где

$$\tilde{x}_{ijk} \equiv \partial_i \partial_j u_k = \tilde{x}_{jik}. \quad (9.10)$$

Итак, часть плотности потенциальной энергии, являющаяся функцией от  $x_{ijk}$ , становится функцией от  $\tilde{x}_{ijk}$  — второго градиента перемещения.

Восемнадцать компонент  $\tilde{x}_{ijk}$  можно разложить и притом не единственным способом на тензоры, компоненты которых являются линейно независимыми комбинациями  $\partial_i \partial_j u_k$ ; таким образом, возможны другие формы плотности энергии для низкочастотной аппроксимации. Они рассмотрены в разд. 11 и 12.

Подставляя (9.9), (9.6) и (9.2) в (5.5), мы находим первую форму низкочастотной аппроксимации для плотности потенциальной энергии

$$\begin{aligned} W \rightarrow \tilde{W} = & \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \tilde{\mu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \tilde{a}_1 \tilde{x}_{iik} \tilde{x}_{kjj} + \\ & + \tilde{a}_2 \tilde{x}_{ijj} \tilde{x}_{ikk} + \tilde{a}_3 \tilde{x}_{iik} \tilde{x}_{jjk} + \tilde{a}_4 \tilde{x}_{ijk} \tilde{x}_{ijk} + \\ & + \tilde{a}_5 \tilde{x}_{ijk} \tilde{x}_{kji}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

где  $\tilde{\lambda}$  и  $\tilde{\mu}$  заданы соотношением (8.15), а  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_5$  — соотношением (8.19). Появление этих коэффициентов является предварительным признаком правильности процесса.

Определим новые напряжения соотношениями

$$\tilde{\tau}_{ij} \equiv \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tilde{\tau}_{ji}, \quad (9.12a)$$

$$\tilde{\mu}_{ijk} \equiv \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{x}_{ijk}} = \tilde{\mu}_{jik}. \quad (9.12b)$$

Тогда

$$\tilde{\tau}_{pq} = \tilde{\lambda} \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\tilde{\mu} \varepsilon_{pq}, \quad (9.13a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{pqr} = & \frac{1}{2} \tilde{a}_1 (\tilde{x}_{iip} \delta_{qr} + 2\tilde{x}_{rli} \delta_{pq} + \tilde{x}_{liq} \delta_{pr}) + \tilde{a}_2 (\tilde{x}_{pqi} \delta_{qr} + \tilde{x}_{qii} \delta_{pr}) + \\ & + 2\tilde{a}_3 \tilde{x}_{iir} \delta_{pq} + 2\tilde{a}_4 \tilde{x}_{pqr} + \tilde{a}_5 (\tilde{x}_{rqp} + \tilde{x}_{rpq}). \end{aligned} \quad (9.13b)$$

Вариационные уравнения движения движения получают теперь из принципа Гамильтона, причем независимыми вариациями являются только  $\delta u_i$ , так как, согласно (9.7a) и (9.8),  $\psi_{ij}$  не являются больше не зависящими от  $u_i$ .

Вариация плотности потенциальной энергии выражается так:

$$\begin{aligned} \delta W = & \tilde{\tau}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \tilde{\mu}_{ijk} \delta \tilde{x}_{ijk} = \\ = & \tilde{\tau}_{ij} \partial_i \delta u_j + \tilde{\mu}_{ijk} \partial_i \partial_j \delta u_k = \\ = & \partial_j [(\tilde{\tau}_{jk} - \partial_i \tilde{\mu}_{ijk}) \delta u_k] - \partial_j (\tilde{\tau}_{jk} - \partial_i \tilde{\mu}_{ijk}) \delta u_k + \partial_i (\tilde{\mu}_{ijk} \partial_j \delta u_k). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Следовательно,

$$\int_V \delta \tilde{W} dV = \int_S n_j (\tilde{\tau}_{jk} - \partial_i \tilde{\nu}_{ijk}) \delta u_k dS - \\ - \int_V \partial_j (\tilde{\tau}_{jk} - \partial_i \tilde{\nu}_{ijk}) \delta u_k dV + \int_S n_i \tilde{\nu}_{ijk} \partial_j \delta u_k dS. \quad (9.15)$$

Теперь в последнем интеграле в (9.15) вариация  $\partial_j \delta u_k$  не является не зависящей от  $\delta u_j$  на  $S$ ; только ее нормальная компонента  $n_j \partial_j \delta u_k$  не зависит от  $\delta u_j$ ; выделим ее:

$$n_i \tilde{\nu}_{ijk} \partial_j \delta u_k = n_i \tilde{\nu}_{ijk} D_j \delta u_k + n_i \tilde{\nu}_{ijk} n_j D \delta u_k, \quad (9.16)$$

где

$$D_j \equiv (\delta_{jl} - n_j n_l) \partial_l, \quad D \equiv n_i \partial_i. \quad (9.17)$$

Далее, члены в (9.16) можно разложить не единственным способом. В этом разделе мы следуем Тупину [8], оставляя другой вариант разложения [9] для разд. 12. Так, первый член в правой части соотношения (9.16), который содержит не независимую вариацию  $D_j \delta u_k$ , перепишем в виде

$$n_i \tilde{\nu}_{ijk} D_j \delta u_k = D_j (n_i \tilde{\nu}_{ijk} \delta u_k) - n_i D_j \tilde{\nu}_{ijk} \delta u_k - (D_j n_i) \tilde{\nu}_{ijk} \delta u_k. \quad (9.18)$$

Последние два члена в (9.18) теперь содержат независимую вариацию  $\delta u_k$ . Что касается первого члена, заметим, что на поверхности  $S$  он выражается в виде

$$D_j (n_i \tilde{\nu}_{ijk} \delta u_k) = (D_j n_i) n_j \tilde{\nu}_{ijk} \delta u_k + n_q e_{qpm} \partial_p (e_{mlj} n_l n_i \tilde{\nu}_{ijk} \delta u_k). \quad (9.19)$$

Согласно теореме Стокса, интеграл по гладкой поверхности от последнего члена (9.19) равен нулю. Если поверхность имеет ребро  $C$ , образованное пересечением двух частей  $S_1$  и  $S_2$  поверхности  $S$ , то теорема Стокса дает

$$\int_S n_q e_{qpm} \partial_p (e_{mlj} n_l n_i \tilde{\nu}_{ijk} \delta u_k) dS = \oint_C [n_i m_j \tilde{\nu}_{ijk}] \delta u_k dS, \quad (9.20)$$

где  $m_j = e_{mlj} s_m n_l$  и  $s_m$  — компоненты единичного вектора, касательного к  $C$ . Скобки [ ] в (9.20) указывают на то, что берется разность между значениями на  $S_1$  и  $S_2$  величины, заключенной в скобки. Наконец, отметим, что в первом поверхностном интеграле в (9.15) можно написать

$$n_j \partial_i \tilde{\nu}_{ijk} = n_j D_i \tilde{\nu}_{ijk} + n_i n_j D \tilde{\nu}_{ijk}. \quad (9.21)$$

Тогда, собирая результаты (9.15)–(9.21), находим

$$\int_V \delta \tilde{W} dV = - \int_V \partial_j (\tilde{\tau}_{jk} - \partial_i \tilde{\nu}_{ijk}) \delta u_k dV + \\ + \int_S [n_j \tilde{\tau}_{jk} - n_i n_j D \tilde{\nu}_{ijk} - 2n_j D_i \tilde{\nu}_{ijk} + \\ + (\hat{n}_i n_j D_l n_l - D_j n_i) \tilde{\nu}_{ijk}] \delta u_k dS + \\ + \int_S n_i n_j \tilde{\nu}_{ijk} D \delta u_k dS + \oint_C [n_i m_j \tilde{\nu}_{ijk}] \delta u_k ds. \quad (9.22)$$

Такая форма подсказывает следующий вид вариации работы внешних сил:

$$\delta \mathcal{W}_1 = \int_V F_k \delta u_k dV + \int_S \tilde{P}_k \delta u_k dS + \int_S \tilde{R}_k D \delta u_k dS + \oint_C \tilde{E}_k \delta u_k dS. \quad (9.23)$$

Как и для кинетической энергии, микроскорость  $\dot{\psi}_{ij}$  в (2.3а) должна быть заменена линейной функцией градиентов макроскорости:

$$\dot{\psi}_{ij} \rightarrow h_{ijkl} \partial_k \dot{u}_l, \quad (9.24)$$

где

$$h_{ijkl} \equiv \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) + \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (9.25)$$

чтобы удовлетворить соотношениям (9.7а) и (9.8). Тогда плотность кинетической энергии (2.3а) становится равной

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 \partial_m \dot{u}_n \partial_p \dot{u}_k = \\ &= \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \partial_p [\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 (\partial_m \dot{u}_n) \dot{u}_k] - \\ &- \frac{1}{6} \partial_p (\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 \partial_m \dot{u}_n) \dot{u}_k, \end{aligned} \quad (9.26)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{pkmn}^2 &\equiv d_{jl}^2 h_{lqpk} h_{jqmn} = \tilde{d}_{mnpk}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \tilde{d}^2 [\delta_{pm} \delta_{kn} - \delta_{pn} \delta_{km} + 2\alpha (3\alpha + 2\beta) \delta_{pk} \delta_{mn} + \\ &+ \beta^2 (\delta_{pm} \delta_{kn} + \delta_{pn} \delta_{km})]. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Полная кинетическая энергия равна

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \int_V T dV = \int_V \left[ \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j - \frac{1}{6} \partial_p (\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 \partial_m \dot{u}_n) \dot{u}_k \right] dV + \\ &+ \int_S \frac{1}{6} \rho' n_p \tilde{d}_{pkmn}^2 (\partial_m \dot{u}_n) \dot{u}_k dS, \end{aligned} \quad (9.28)$$

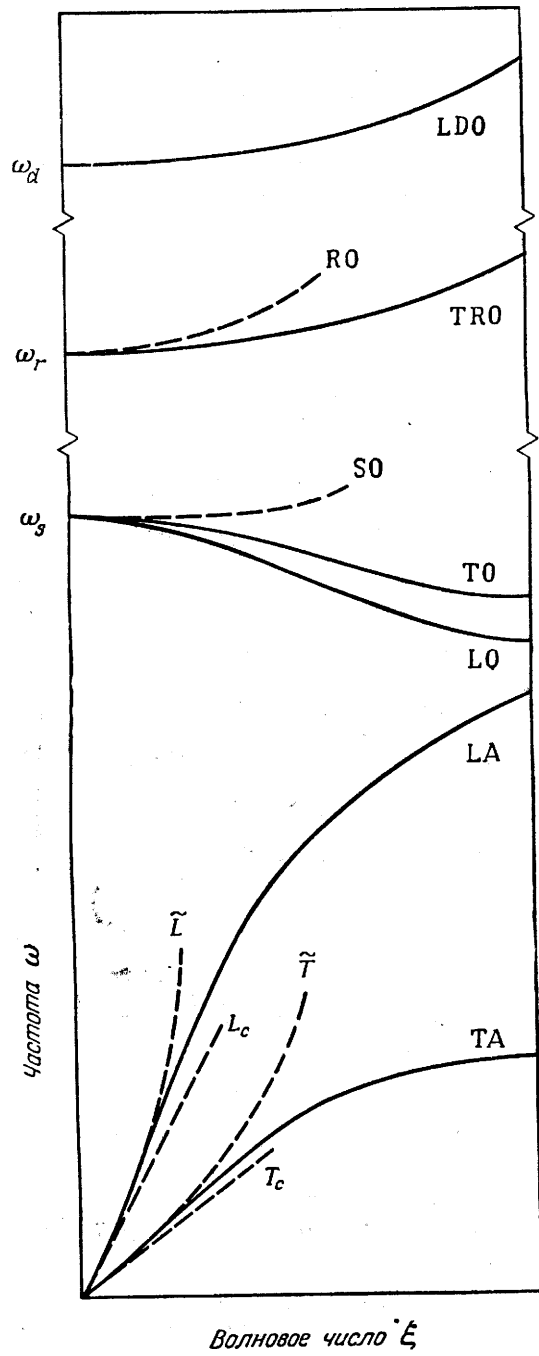
откуда

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{T} dt &= - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \left[ \rho \ddot{u}_k - \frac{1}{3} \partial_p (\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 \partial_m \ddot{u}_n) \right] \delta u_k dV - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \frac{1}{3} \rho' n_p \tilde{d}_{pkmn}^2 (D_m \ddot{u}_n + n_m D \ddot{u}_n) \delta u_k dS. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Вариационные уравнения движения получаются из (9.22), (9.23) и (9.29), из которых следуют уравнения движения в напряжениях и граничные условия:

$$\partial_j (\tilde{\tau}_{jk} - \partial_i \tilde{\mu}_{ijk}) + F_k = \rho \ddot{u}_k - \frac{1}{3} \partial_p (\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 \partial_m \ddot{u}_n), \quad (9.30a)$$

$$\begin{aligned} n_j \tilde{\tau}_{jk} - n_i n_j D \tilde{\mu}_{ijk} - 2n_j D_i \tilde{\mu}_{ijk} + (n_i n_j D_l n_l - D_j n_i) \tilde{\mu}_{ijk} + \\ + \frac{1}{3} \rho' n_p \tilde{d}_{pkmn}^2 (D_m \ddot{u}_n + n_m D \ddot{u}_n) = \tilde{P}_k, \end{aligned} \quad (9.30b)$$



Р и с. 3. Схематическое изображение возможной конфигурации действительных ветвей дисперсионных кривых (индекс  $c$  относится к классической упругости).

$$n_i n_j \tilde{\mu}_{ijk} = \tilde{R}_k \quad (9.30в)$$

$$[n_i m_j \tilde{\mu}_{ijk}] = \tilde{E}_k, \quad (9.30г)$$

Уравнения движения в перемещениях получаются сначала заменой  $2\varepsilon_{ij}$  на  $\partial_i u_j + \partial_j u_i$  и  $\tilde{\chi}_{ijk}$  на  $\partial_i \partial_j u_k$  в (9.13), а затем подстановкой результата в (9.30а). Тогда получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(1 - \tilde{l}_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \tilde{\mu} (1 - \tilde{l}_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{F} = \\ = \rho (\ddot{\mathbf{u}} - h_1^2 \nabla \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} + h_2^2 \nabla \times \nabla \times \ddot{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (9.31)$$

где  $\tilde{l}_i^2$  и  $h_i^2$  определяются соотношениями (8.16) и (8.17).

Исключая массовые силы и беря дивергенцию и ротор от (9.31), находим уравнения для распространения дилатации и вращения

$$\tilde{v}_1^2 (1 - \tilde{l}_1^2 \nabla^2) \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = (1 - h_1^2 \nabla^2) \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}}, \quad (9.32а)$$

$$\tilde{v}_2^2 (1 - \tilde{l}_2^2 \nabla^2) \nabla^2 \nabla \times \mathbf{u} = (1 - h_2^2 \nabla^2) \nabla \times \ddot{\mathbf{u}}, \quad (9.32б)$$

где  $\tilde{v}_i^2$  определены соотношением (8.14). Для плоских волн имеем

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{u}) = (A, \mathbf{A}) \exp[i(\xi \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (9.33)$$

а дисперсионные соотношения имеют вид

$$\omega_i^2 = \frac{\tilde{v}_i^2 \xi^2 (1 + \tilde{l}_i^2 \xi^2)}{1 + h_i^2 \xi^2}, \quad (9.34)$$

откуда следуют точно свойства (8.13). Таким образом, справедливость приближенных уравнений для низких частот и очень больших длин волн установлена. Дисперсионные соотношения (9.34) показаны на рис. 3 пунктирными кривыми  $\tilde{L}$  и  $\tilde{T}$ .

## 10. Связь с обобщением Тупина теории моментных напряжений

Теория упругости с моментными напряжениями, рассмотренная в работах [5—10], основана на той же кинематике, что и классическая теория упругости; но плотность потенциальной энергии предполагается функцией деформации и ротора деформации, а не только одной деформации. В линейной теории компоненты ротора деформации оказываются такими же, как компоненты градиента вращения: восемь линейно независимых комбинаций восемнадцати компонент градиента второго порядка от перемещения (градиента дисторсии). Для случая равновесия Тупин [8, разд. 7] обобщил теорию, включив все восемнадцать компонент. Если инерционные члены не учитываются, соотношения (9.30) тождественны по форме уравнениям (7.8)—(7.11) Тупина<sup>1)</sup>. Однако, хотя форма

<sup>1)</sup> Заметим, что, по определению Тупина,  $\beta^{pqr}$  является симметричным по второму и третьему индексу, тогда как  $\tilde{\mu}_{ijk}$  симметричен по первым двум индексам. Заметим также, что  $b$  должно быть заменено на  $-b$  в уравнениях Тупина  $A, B$  (7.9) и (7.19).

уравнений одинакова, все же имеются существенные различия. Уравнение (9.30) относится к низкочастотному при очень больших длинах волн приближению уравнений для материалов с микроструктурой, и влияние микроструктуры на плотность как потенциальной, так и кинетической энергии осуществляется благодаря вкладу симметричной части относительной дилатации. Эту часть  $\gamma_{(ij)}$ , по существу, можно проследить в  $\tilde{\tau}_{ij}$  и  $\tilde{\mu}_{ijk}$ , определяемых соотношениями (9.30), благодаря коэффициентам  $\alpha$  и  $\beta$  в  $\tilde{W}$ . Подобным же образом вклад  $\gamma_{(ij)}$  в члены ускорения в соотношениях (9.30) можно проследить благодаря коэффициентам  $\alpha$  и  $\beta$  в  $h_{ijkl}$ , а затем и в  $\tilde{d}_{ijkl}^2$ . С другой стороны, уравнения Тупина не следуют из рассмотрения микроструктуры.

Уравнения для материала с микроструктурой можно свести к уравнениям материала без микроструктуры (т. е. к *микрооднородному* материалу), если заставить микросреду слиться с макросредой. Это можно достигнуть (в этом случае столь же легко для анизотропной среды, как и для изотропной) переходом к пределу

$$b_{ijkl} \rightarrow \infty, \quad \gamma_{ij} \rightarrow 0 \quad (10.1)$$

вместо переходов (9.1) и (9.2), и в то же время предельным переходом  $\rho \rightarrow \rho'$  устраним различия между микро- и макроплотностями [т. е.  $\rho_M \rightarrow 0$  в (2.3б)]. Тогда

$$\psi_{ij} \rightarrow \partial_i u_j, \quad \chi_{ijk} \rightarrow \partial_i \partial_j u_k \equiv \tilde{\chi}_{ijk} \quad (10.2)$$

вместо (9.7а), (9.8) и (9.9). Соответственно из (5.1) следует

$$W \rightarrow \tilde{W}^0 = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} a_{ijklmn} \tilde{\chi}_{ijk} \tilde{\chi}_{lmn} + \dot{f}_{ijklm} \tilde{\chi}_{ijk} \varepsilon_{lm}, \quad (10.3)$$

и мы определяем новые напряжения соотношениями

$$\tilde{\tau}_{ij}^0 \equiv \frac{\partial \tilde{W}^0}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tilde{\tau}_{ji}^0, \quad (10.4а)$$

$$\tilde{\mu}_{ijk}^0 \equiv \frac{\partial \tilde{W}^0}{\partial \tilde{\chi}_{ijk}} = \tilde{\mu}_{jik}^0. \quad (10.4б)$$

Итак, в соотношении (9.26) для плотности кинетической энергии переходим к пределу

$$\tilde{d}_{pkmn}^2 \rightarrow \tilde{d}_{pm}^2 \delta_{kn}, \quad (10.5)$$

где  $\tilde{d}_{pm}^2$  определяется выражением (2.3в).

В изотропном случае  $\tilde{d}_{pm}^2 = d^2 \delta_{pm}$  и  $\tilde{W}^0$ ,  $\tilde{\tau}_{ij}^0$ ,  $\tilde{\mu}_{ijk}^0$  имеют ту же самую форму, что и  $\tilde{W}$ ,  $\tilde{\tau}_{ij}$ ,  $\tilde{\mu}_{ijk}$ , но вместо коэффициентов  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_5$  будут  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_5$ .

Вывод вариационных уравнений движения происходит так же, как и прежде, и мы получаем уравнения движения в напряжениях и граничные условия:

$$\partial_j (\tilde{\tau}_{jk}^0 - \partial_i \tilde{\mu}_{ijk}^0) + F_k = \rho' \ddot{u}_k - \frac{1}{3} \partial_p (\rho' \tilde{d}_{pm}^2 \partial_m \ddot{u}_k), \quad (10.6а)$$

$$n_j \tilde{\tau}_{jk}^0 - n_i n_j D \tilde{\mu}_{ijk}^0 - 2n_j D_i \tilde{\nu}_{ijk}^0 + (n_i n_j D_l n_l - D_j n_i) \tilde{\mu}_{ijk}^0 + \\ + \frac{1}{3} \rho' n_p d_{pm}^2 (D_m \ddot{u}_k + n_m D \ddot{u}_k) = \tilde{P}_k^0, \quad (10.66)$$

$$n_i n_j \tilde{\mu}_{ijk}^0 = \tilde{R}_k^0, \quad (10.6v)$$

$$[n_i m_j \tilde{\nu}_{ijk}^0] = \tilde{E}_k^0. \quad (10.6g)$$

Без членов с ускорениями соотношения (10.6) будут в точности линейной формой уравнений Тупина, а соотношения (9.30) без членов с ускорениями отличаются от них только тем, что коэффициенты в  $\tilde{W}$  и  $\tilde{W}^0$  (а следовательно, и в напряжениях) имеют различный смысл. Однако при включении членов с ускорениями формы фактически различны: тензор четвертого ранга  $\tilde{d}_{pkmn}^2$  в (9.30) заменен тензором второго ранга  $d_{pm}^2$  в (10.6), так что в последнем случае мы имеем дело с меньшим числом коэффициентов.

В изотропном случае необходимо только допустить

$$\tilde{\lambda} \rightarrow \lambda, \quad \tilde{\mu} \rightarrow \mu, \quad \alpha \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow 1 \quad (\text{или } g_1 \rightarrow 0, g_2 \rightarrow 0) \quad (10.7)$$

в уравнениях разд. 9, чтобы получить уравнения микрооднородной среды. Таким образом, уравнение (9.31) сводится к уравнению

$$(\lambda + 2\mu)(1 - \overset{\circ}{I}_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu(1 - \overset{\circ}{I}_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{F} = \\ = \rho' \left(1 - \frac{1}{3} d^2 \nabla^2\right) \ddot{\mathbf{u}}, \quad (10.8)$$

где  $\overset{\circ}{I}_1^2$  и  $\overset{\circ}{I}_2^2$  получены из  $\tilde{I}_1^2$  и  $\tilde{I}_2^2$ , определяемых (8.16) при использовании (10.7). Следует заметить, что левые части (9.31) и (10.8) имеют одинаковую форму, но правые части — различную, так как, согласно (10.7),  $h_1^2 = h_2^2 = 1/3 d^2$ . Дисперсионные соотношения для плоских волн получаются из уравнения (10.8) в виде

$$\omega_i^2 = \frac{v_i^2 \xi^2 (1 + \overset{\circ}{I}_i^2 \xi^2)}{1 + 1/3 d^2 \xi^2}, \quad (10.9)$$

где  $v_i^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho'$ ,  $v_j^2 = \mu/\rho'$ , а характеристики свойств при  $\omega = 0$ ,  $\xi = 0$  имеют вид

$$\omega_i' = v_i, \quad \omega_i'' = 0, \quad \omega_i''' = 3v_i \left( \overset{\circ}{I}_i^2 - \frac{1}{3} d^2 \right) \quad (10.10)$$

вместо соотношений (8.13).

Различие между уравнениями микрооднородной среды и уравнениями низкочастотной аппроксимации при очень больших длинах волн аналогично различию между плоскодеформированным и плосконапряженным состояниями, или, что более подходит к данному случаю, различию между уравнениями низкочастотных колебаний расширения пластин, толщина которых принуждается или не принуждается оставаться постоянной. В случае равновесия различие состоит исключительно в физической интерпретации упругой жесткости. Для жесткостей, определяемых из экспериментов и попадающих в область

применимости уравнений, две теории равновесия могут быть неразличимыми. Например, числовое значение, которое может быть приписано жесткости  $\tilde{\mu}$  в одной теории, в другой теории может быть отнесено к  $\mu$ . В случае движения, однако, имеется существенное различие, так как число коэффициентов в двух теориях не одинаково, если только не выполняется условие  $g_1 = g_2 = 0$ , что аналогично равенству нулю коэффициента Пуассона.

### 11. Низкочастотное приближение для очень больших длин волн. Форма II

Как уже отмечалось, восемнадцать компонент  $\partial_i \partial_j u_k$  могут образовывать независимые линейные комбинации, являющиеся тензорами. Одной из них, предложенной Тупином [8, стр. 404], является градиент деформации

$$\hat{x}_{ijk} \equiv \partial_i \varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_j u_k + \partial_i \partial_k u_j) = \hat{x}_{ikj}. \quad (11.1)$$

Плотность потенциальной энергии для низкочастотного приближения при очень больших длинах волн можно выразить в зависимости от  $\varepsilon_{ij}$  и  $\hat{x}_{ijk}$ , если в (9.11) положить

$$\tilde{x}_{ijk} = \hat{x}_{ijk} + \hat{x}_{jki} - \hat{x}_{kij}, \quad (11.2)$$

что дает

$$\begin{aligned} W \rightarrow \hat{W} = & \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \tilde{\mu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \hat{a}_1 \hat{x}_{iik} \hat{x}_{kjj} + \\ & + \hat{a}_2 \hat{x}_{ijj} \hat{x}_{ikk} + \hat{a}_3 \hat{x}_{iik} \hat{x}_{jjk} + \hat{a}_4 \hat{x}_{ijk} \hat{x}_{ijk} + \hat{a}_5 \hat{x}_{ijk} \hat{x}_{kji}, \end{aligned} \quad (11.3)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_1 &= 2\tilde{a}_1 - 4\tilde{a}_3, & \hat{a}_2 &= -\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3, \\ \hat{a}_3 &= 4\tilde{a}_3, & \hat{a}_4 &= 3\tilde{a}_4 - \tilde{a}_5, & \hat{a}_5 &= -2\tilde{a}_4 + 2\tilde{a}_5. \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

Новые напряжения определим при помощи соотношений

$$\hat{\tau}_{ij} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \hat{\tau}_{ji}, \quad (11.5a)$$

$$\hat{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial \hat{x}_{ijk}} = \hat{\mu}_{ikj}, \quad (11.5b)$$

откуда

$$\hat{\tau}_{pq} = \tilde{\lambda} \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\tilde{\mu} \varepsilon_{pq}, \quad (11.6a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{pqr} = & \frac{1}{2} \hat{a}_1 (\delta_{pq} \hat{x}_{rli} + 2\delta_{qr} \hat{x}_{iip} + \delta_{rp} \hat{x}_{qiq}) + 2\hat{a}_2 \delta_{qr} \hat{x}_{pii} + \\ & + \hat{a}_3 (\delta_{pq} \hat{x}_{iir} + \delta_{pr} \hat{x}_{iiq}) + 2\hat{a}_4 \hat{x}_{pqr} + \hat{a}_5 (\hat{x}_{rpq} + \hat{x}_{qrp}). \end{aligned} \quad (11.6b)$$

Вариация плотности потенциальной энергии равна

$$\begin{aligned} \delta \hat{W} &= \hat{\tau}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \hat{\mu}_{ijk} \delta \hat{x}_{ijk} = \hat{\tau}_{ij} \partial_i \delta u_j + \hat{\mu}_{ijk} \partial_i \partial_j \delta u_k = \\ &= \partial_j [(\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \delta u_k] - \partial_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \delta u_k + \partial_i (\hat{\mu}_{ijk} \partial_j \delta u_k). \end{aligned} \quad (11.7)$$



Теперь (11.7) имеет ту же форму, что и (9.14), и плотность кинетической энергии (9.26) остается без изменений. Следовательно, вариационное уравнение движения имеет ту же форму, что и в разд. 9, и приводит к граничным условиям, таким же, как в (9.30), но с заменой  $2n_j D_i$  на  $(n_j D_i + n_i D_j)$ , и уравнениям движения в напряжениях

$$\partial_j (\hat{\tau}_{ijk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) + F_k = \rho \ddot{u}_k - \frac{1}{3} \partial_p (\rho' \hat{d}_{pkmn}^2 \partial_m \ddot{u}_n). \quad (11.8)$$

Напомним теперь, что  $\hat{\mu}_{ijk} = \hat{\mu}_{jik}$ , тогда как  $\hat{\mu}_{ijk} = \hat{\mu}_{ikj}$ ; величина, взятая в скобки в левой части (9.30а), не симметрична, а соответствующая величина в (11.8) симметрична. Последняя величина является более удобной формой для введения функции напряжений Эри.

Чтобы получить уравнения движения в перемещениях, нужно подставить (11.1б) и (1.10) в (11.6), а результат — в (11.8). Тогда получим

$$\begin{aligned} (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(1 - \hat{l}_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \tilde{\mu}(1 - \hat{l}_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{F} = \\ = \rho (\ddot{\mathbf{u}} - h_1^2 \nabla \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} + h_2^2 \nabla \times \nabla \times \ddot{\mathbf{u}}), \end{aligned} \quad (11.9)$$

где

$$\hat{l}_1^2 = \frac{2(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5)}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \quad \hat{l}_2^2 = \frac{\hat{a}_3 + 2\hat{a}_4 + \hat{a}_5}{2\tilde{\mu}}. \quad (11.10)$$

Как следует из (11.4),  $\hat{l}_i^2 = \tilde{l}_i^2$ , так что уравнения движения в перемещениях (11.9) и (9.31) совпадают.

## 12. Низкочастотная аппроксимация для очень больших длин волн. Форма III

Для некоторых целей бывает выгодно выделить из  $\partial_i \partial_j u_k$  ротор деформации (или градиент ротора)

$$\bar{x}_{ij} \equiv e_{jlm} \partial_l \varepsilon_{mi} = \frac{1}{2} e_{jlm} \partial_i \partial_l u_m, \quad (12.1)$$

так как  $\bar{x}_{ij}$  является частью  $\partial_i \partial_j u_k$ , которая приводит к моментным напряжениям. Двойные напряжения делятся поэтому на самоуравновешенную и несамоуравновешенную части. Итак,  $\bar{x}_{ii} = 0$ . Следовательно,  $\bar{x}_{ij}$  имеет только восемь независимых компонент. (Они являются компонентами диады  $\mathbf{x}$  в работе [9].) Десять оставшихся линейных комбинаций  $\partial_i \partial_j u_k$  были рассмотрены отдельно Джеремилло [20]. Их можно выразить в виде

$$\bar{x}_{ijk} \equiv \hat{x}_{ijk} + \frac{1}{3} e_{ilj} \bar{x}_{kl} + \frac{1}{3} e_{ilk} \bar{x}_{jl} = \frac{1}{3} (\partial_i \partial_j u_k + \partial_k \partial_i u_j + \partial_j \partial_k u_i). \quad (12.2)$$

Таким образом,  $\bar{x}_{ijk} = \bar{x}_{kij} = \bar{x}_{jki} = \bar{x}_{jik}$ , т. е. тензор  $\bar{x}_{ijk}$  полностью симметричен.

Плотность потенциальной энергии для низкочастотной аппроксимации с очень большими длинами волн можно выразить в зависимости от  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\bar{x}_{ij}$  и  $\bar{x}_{ijk}$ , если в (11.3) положить

$$\hat{x}_{ijk} = \bar{x}_{ijk} - \frac{1}{3} e_{ilj} \bar{x}_{kl} - \frac{1}{3} e_{ilk} \bar{x}_{jl}. \quad (12.3)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} W \rightarrow \bar{W} = & \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \tilde{\mu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + 2\bar{d}_1 \bar{x}_{ij} \bar{x}_{ij} + 2\bar{d}_2 \bar{x}_{ij} \bar{x}_{ji} + \\ & + \frac{3}{2} \bar{a}_1 \bar{x}_{ij} \bar{x}_{kkj} + \bar{a}_2 \bar{x}_{ijk} \bar{x}_{ijk} + \bar{f} e_{ijk} \bar{x}_{ij} \bar{x}_{kll}, \end{aligned} \quad (12.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} 18\bar{d}_1 &= -2\hat{a}_1 + 4\hat{a}_2 + \hat{a}_3 + 6\hat{a}_4 - 3\hat{a}_5, \\ 18\bar{d}_2 &= 2\hat{a}_1 - 4\hat{a}_2 - \hat{a}_3, \quad 3\bar{a}_1 = 2(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3), \\ \bar{a}_2 &= \hat{a}_4 + \hat{a}_5, \quad 3\bar{f} = \hat{a}_1 + 4\hat{a}_2 - 2\hat{a}_3. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Определения

$$\bar{\tau}_{ij} \equiv \frac{\partial \bar{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \bar{\tau}_{ji}, \quad (12.6a)$$

$$\bar{\mu}_{ij} \equiv \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}_{ij}}, \quad \bar{\mu}_{ii} = 0, \quad (12.6b)$$

$$\bar{\mu}_{ijk} \equiv \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}_{ijk}} = \bar{\mu}_{kij} = \bar{\mu}_{jki} = \bar{\mu}_{jik}, \quad (12.6b)$$

где  $\bar{\mu}_{ij}$  — девиатор моментного напряжения, приводят к следующим соотношениям:

$$\bar{\tau}_{pq} = \tilde{\lambda} \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\tilde{\mu} \varepsilon_{pq}, \quad (12.7a)$$

$$\bar{\mu}_{pq} = 4\bar{d}_1 \bar{x}_{pq} + 4\bar{d}_2 \bar{x}_{qp} + \bar{f} e_{pq} \bar{x}_{ijj}, \quad (12.7b)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{pqr} &= \bar{a}_1 (\bar{x}_{iir} \delta_{pq} + \bar{x}_{iip} \delta_{qr} + \bar{x}_{iiq} \delta_{rp}) + 2\bar{a}_2 \bar{x}_{pqr} + \\ & + \frac{1}{3} \bar{f} \bar{x}_{ij} (\delta_{pq} e_{ijr} + \delta_{qr} e_{ijp} + \delta_{rp} e_{ijq}). \end{aligned} \quad (12.7b)$$

Вариация плотности потенциальной энергии берется здесь в форме

$$\begin{aligned} \delta \bar{W} &= \bar{\tau}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \bar{\mu}_{ij} \delta \bar{x}_{ij} + \bar{\mu}_{ijk} \delta \bar{x}_{ijk} = \\ &= \partial_j [(\bar{\tau}_{jk} - \partial_i \bar{\mu}_{ijk}^*) \delta u_k] - \partial_j (\bar{\tau}_{jk} - \partial_i \bar{\mu}_{ijk}^*) \delta u_k + \partial_i (\bar{\mu}_{ijk}^* \partial_j \delta u_k), \end{aligned} \quad (12.8)$$

где

$$\bar{\mu}_{ijk}^* \equiv \frac{1}{2} e_{jkl} \bar{\mu}_{il} + \bar{\mu}_{ijk}. \quad (12.9)$$

Кроме того, (12.8) имеет ту же форму, что и (9.14), и поэтому можно найти уравнения движения в напряжениях и граничные условия такой же формы, как и (9.30), заменяя только  $\tilde{\mu}_{ijk}$  на  $\bar{\mu}_{ijk}^*$ . Такую форму граничных условий нельзя прямо сравнить с результатами работы [9], потому что там в качестве одной из независимых вариаций была выбрана касательная компонента вращения, которая здесь включена в нормальную производную  $D\delta u_k$ . Чтобы получить другую форму граничных условий, мы можем возвратиться к (9.16) и провести далее разложение:

$$D\delta u_k = 2\delta \omega_i n_j e_{ijk} + D_k (n_i \delta u_i) - (D_k n_i) \delta u_i + n_k \delta \varepsilon_{nn}, \quad (12.10)$$

где  $\omega_i (\equiv 1/2 e_{ilm} \partial_l u_m)$  — вращение, а  $\varepsilon_{nn}$  (не суммировать) — нормальная компонента деформации  $n_i n_j \varepsilon_{ij}$ . Далее интегрирование по частям

и применение теоремы о дивергенции и теоремы Стокса приводят в системе обозначений работы [9] к выражению

$$\begin{aligned} \delta \bar{W} = & - \int_V \left( \nabla \cdot \bar{\tau} + \frac{1}{2} \nabla \times \nabla \cdot \bar{\mu} - \nabla \cdot \bar{\mu} \cdot \nabla \right) \cdot \delta u dV + \\ & + \int_S \left\{ \nabla \cdot \bar{\tau} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times (\nabla \cdot \bar{\mu} - \nabla \bar{\mu}_{nn}) - (\nabla \cdot \bar{\mu}) \cdot \mathbf{n} - \right. \\ & \left. - \mathbf{n} \cdot \nabla \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \bar{\mu} + \mathbf{n} \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{nn})] \right\} \cdot \delta u dS + \\ & + \int_S [\mathbf{n} \cdot \bar{\mu} \times \mathbf{n} + 2\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{n}) \times \mathbf{n}] \cdot (\delta \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS + \\ & + \int_S \mathbf{nn} : \bar{\mu} \cdot \mathbf{n} \delta \varepsilon_{nn} dS + \oint_C \left[ \frac{1}{2} \bar{\mu}_{nn} \mathbf{s} + (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\mu} + \mathbf{n} \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{nn}) \right] \cdot \delta u ds, \quad (12.11) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{s}$  — единичный вектор, касательный к контуру  $C$ .

Вариация работы, совершенной внешними силами, должна быть здесь выбрана в виде

$$\delta \mathcal{W}_1 = \int_V \mathbf{F} \cdot \delta u dV + \int_S (\mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{w} \times \mathbf{n} + R \delta \varepsilon_{nn}) dS + \oint_C \mathbf{E} \cdot \delta u ds. \quad (12.12)$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  — касательная компонента вектора моментных напряжений и  $R$  — двойная сила на единицу площади (без момента), нормальная к  $S$ . Вариационное уравнение движения тогда дает уравнение движения в напряжениях

$$\nabla \cdot \bar{\tau} + \frac{1}{2} \nabla \times \nabla \cdot \bar{\mu} - \nabla \cdot \bar{\mu} \cdot \nabla + \mathbf{F} = \rho \ddot{\mathbf{u}} - \frac{1}{3} \nabla \cdot (\rho \tilde{\mathbf{d}}^2 : \nabla \ddot{\mathbf{u}}) \quad (12.13)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\tau} + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times (\nabla \cdot \bar{\mu} - \nabla \bar{\mu}_{nn}) - (\nabla \cdot \bar{\mu}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{n} \cdot \nabla \times [\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \bar{\mu} + \mathbf{n} \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{nn})] + \\ + \frac{1}{3} \rho' \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{d}}^2 : \nabla \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{P}, \quad (12.14a) \end{aligned}$$

$$\mathbf{n} \cdot \bar{\mu} \times \mathbf{n} + 2\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{Q}, \quad (12.14b)$$

$$\mathbf{nn} : \bar{\mu} \cdot \mathbf{n} = R, \quad (12.14в)$$

$$\left[ \frac{1}{2} \bar{\mu}_{nn} \mathbf{s} + (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \cdot \bar{\mu} + \mathbf{n} \cdot \bar{\mu} \cdot \mathbf{nn}) \right] = \mathbf{E}. \quad (12.14г)$$

Уравнения движения в перемещениях получаются при подстановке (1.10), (12.1б) и (12.2б) в (12.7), а результата — в (12.13). Тогда имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(1 - \bar{l}_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \tilde{\mu}(1 - \bar{l}_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{F} = \\ = \rho (\ddot{\mathbf{u}} - h_1^2 \nabla \nabla \cdot \ddot{\mathbf{u}} + h_2^2 \nabla \times \nabla \times \ddot{\mathbf{u}}), \quad (12.15) \end{aligned}$$

где

$$\bar{l}_1^2 = \frac{3\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \quad \bar{l}_2^2 = \frac{3\bar{a}_1 + \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 - \bar{f}}{3\tilde{\mu}}. \quad (12.16)$$

Принимая во внимание (12.5) и (11.4), имеем

$$\bar{l}_i^2 = \hat{l}^2 = \tilde{l}_i^2 = l_i^2. \quad (12.17)$$

так что все три формы низкочастотной аппроксимации при очень больших длинах волн дают одни и те же уравнения движения в перемещениях. Необходимыми и достаточными условиями положительной определенности  $\bar{W}$  ( $= \hat{W} = \tilde{W}$ ) являются

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mu} > 0, \quad 3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} > 0, \\ \bar{d}_1 > 0, \quad -\bar{d}_1 < \bar{d}_2 < \bar{d}_1, \\ \bar{a}_2 > 0, \quad 3\bar{a}_1 + 2\bar{a}_2 > 0, \quad \bar{f} < 3\bar{d}_1 + \bar{a}_1 + 2\bar{a}_2. \end{aligned} \right\} \quad (12.18)$$

Отсюда  $l_i^2 > 0$ , и мы уже видели, что  $h_i^2 > 0$ .

Уравнения, которые были рассмотрены в работе [9], получаются из уравнений этого раздела, если положить  $\bar{\kappa}_{ijk} = 0$  в выражении для плотности потенциальной энергии и  $\rho' = 0$  в выражении плотности кинетической энергии. Таким образом, ограничение на низкие частоты, большие длины волн и большие расстояния более сильное, чем казалось вначале.

### 13. Решение приближенных уравнений равновесия

В этом разделе доказываемся, что любое решение  $\mathbf{u}$  уравнения

$$(\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \tilde{\mu}(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0 \quad (13.1)$$

в области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$ , можно выразить в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - l_2^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2}(k_1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla [\mathbf{r} \cdot (1 - l_2^2 \nabla^2) \mathbf{B} + B_0], \quad (13.2a)$$

где

$$\tilde{\mu}(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla^2 \mathbf{B} = -\mathbf{F}, \quad (13.2б)$$

$$\tilde{\mu}(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla^2 B_0 = \mathbf{r} \cdot (1 - l_1^2 \nabla^2) \mathbf{F} - 4l_1^2 \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (13.2в)$$

$$k_1 = \frac{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}$$

и  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор.

Рассмотрим точку поля  $P(x, y, z)$  и точку источника  $Q(\xi, \eta, \zeta)$  и определим

$$4\pi \mathbf{U}_P \equiv - \int_V r_1^{-1} \mathbf{u}_Q d^3 V_Q, \quad (13.3)$$

где

$$r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2, \quad dV_Q = d\xi d\eta d\zeta.$$

Тогда  $\nabla^2 \mathbf{U} = \mathbf{u}$  [3, стр. 210], или

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{U} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{u}. \quad (13.4)$$

Определим

$$\psi \equiv \nabla \cdot \mathbf{U}, \quad \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{U}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (13.5)$$

Тогда из (13.4) имеем

$$\mathbf{u} = \nabla \psi + \nabla \times \mathbf{H}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (13.6)$$

что является разложением Гельмгольца. Подставляя (13.6) в (13.2a), имеем

$$\tilde{\mu} \nabla^2 [k(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \psi + (1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \mathbf{H}] + \mathbf{F} = 0, \quad (13.7)$$

где  $k = (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})/\tilde{\mu}$ . Определим

$$4\pi l_2^2 \mathbf{B}' \equiv \int_V r_1^{-1} e^{-r_1/l_2} [k(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \psi + (1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \mathbf{H}]_Q dV_Q. \quad (13.8)$$

Тогда [3, стр. 210] имеем

$$(1 - l_2^2 \nabla^2) \mathbf{B}' = k(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \psi + (1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \mathbf{H}, \quad (13.9)$$

и из (13.9) и (13.7) получаем

$$\tilde{\mu} (1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla^2 \mathbf{B}' = -\mathbf{F}. \quad (13.10)$$

Кроме того, дивергенция выражения (13.9) дает

$$(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \cdot \mathbf{B}' = k(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla^2 \psi. \quad (13.11)$$

Определим

$$2k\psi^* \equiv \mathbf{r} \cdot (1 - l_2^2 \nabla^2) \mathbf{B}'. \quad (13.12)$$

Тогда, используя (13.10), имеем

$$2k\tilde{\mu}(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla^2 \psi^* = 4l_1^2 \nabla \cdot \mathbf{F} - \mathbf{r} \cdot (1 - l_1^2 \nabla^2) \mathbf{F} + 2\tilde{\mu}(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \cdot \mathbf{B}'. \quad (13.13)$$

Определим

$$B_0 \equiv 2k(\psi - \psi^*) \quad (13.14)$$

и найдем

$$\tilde{\mu} (1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla^2 B_0 = \mathbf{r} \cdot (1 - l_1^2 \nabla^2) \mathbf{F} - 4l_1^2 \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (13.15)$$

используя (13.11) и (13.13). Кроме того, из (13.14) и (13.12) имеем

$$2k\psi = \mathbf{r} \cdot (1 - l_2^2 \nabla^2) \mathbf{B}' + B_0. \quad (13.16)$$

Далее, определим

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{B}' - l_2^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{B}' - k(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \psi. \quad (13.17)$$

При помощи (13.11) получаем, что  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ ; это является необходимым и достаточным условием для существования функции  $\mathbf{H}^*$ , такой, что  $\nabla \times \mathbf{H}^* = \mathbf{D}$ , т. е.

$$\nabla \times \mathbf{H}^* = \mathbf{B}' - l_2^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{B}' - k(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \psi. \quad (13.18)$$

Используя (13.9) и (13.11), находим

$$(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \mathbf{H}^* = (1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \mathbf{H}. \quad (13.19)$$

Затем определим

$$\mathbf{B}'' \equiv \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{H}^* \quad (13.20)$$

и заметим, что из (13.19) и (13.20) следует

$$(1 - l_2^2 \nabla^2) \mathbf{B}'' = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}'' = 0. \quad (13.21)$$

Из (13.20), используя (13.18), а затем (13.16), получаем

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{B}'' + \mathbf{B}' - l_2^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{B}' - \frac{1}{2} (1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla [\mathbf{r} \cdot (1 - l_2^2 \nabla^2) \mathbf{B}' + B_0]. \quad (13.22)$$

Затем подставляя (13.22) и (13.16) в (13.6а), получаем

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}'' + \mathbf{B}' - l_2^2 \nabla \nabla \cdot (\mathbf{B}'' + \mathbf{B}') - \frac{1}{2} (k_1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla [\mathbf{r} \cdot (1 - l_2^2 \nabla^2) \mathbf{B}' + B_0]. \quad (13.23)$$

Наконец, определим

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}' + \mathbf{B}''. \quad (13.24)$$

Учитывая (13.21), мы можем написать (13.23) и (13.10) в форме (13.2а) и (13.2б), а (13.15) — в форме (13.2в). Таким образом, (13.2) является полным решением уравнения (13.1). Если  $l_1^2 = 0$ , то уравнение (13.1) сводится к уравнению равновесия теории моментных напряжений, и (13.2) является решением, найденным в [9]. Если  $l_1^2$  и  $l_2^2$  равны нулю, то (13.1) есть классическое уравнение равновесия с массовой силой и (13.2) представляет собой решение, найденное в [21]. Если, кроме того, массовая сила равна нулю, (13.2) есть решение Папковича [22]. Доказательство в основном ведется так же, как и в [23], но с учетом проясняющей критики Штернберга.

#### 14. Исследование сосредоточенной силы на основе приближенных уравнений

Пусть в бесконечной области  $V$  массовые силы равны нулю вне конечной области  $V_0$ , которая содержит начало координат и не равно нулю поле параллельных сил  $\mathbf{F}$ . Сосредоточенная сила определяется согласно соотношению

$$\mathbf{P} = \lim_{V_0 \rightarrow 0} \int_V \mathbf{F}_Q dV_Q. \quad (14.1)$$

В работе [9] было показано, что в бесконечной области решения уравнений типа (13.2б) и (13.2в) имеют вид

$$4\pi\mu\tilde{\mathbf{B}} = \int_V r_1^{-1} (1 - e^{-r_1/l_2}) \mathbf{F}_Q dV_Q, \quad (14.2)$$

$$4\pi\mu\tilde{\mathbf{B}}_0 = - \int_V r_1^{-1} (1 - e^{-r_1/l_1}) [\mathbf{r}' \cdot (1 - l_1^2 \nabla_Q^2) \mathbf{F}_Q - 4l_1^2 \nabla_Q \cdot \mathbf{F}_Q] dV_Q, \quad (14.3)$$

где  $r' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ . Далее,

$$\lim_{V_0 \rightarrow 0} r_1 = r, \quad \lim_{V_0 \rightarrow 0} r' = 0. \quad (14.4)$$

Следовательно, для сосредоточенной силы уравнение (14.2) сводится к уравнению

$$4\pi\mu\tilde{\mathbf{B}} = r^{-1} (1 - e^{-r/l_2}) \mathbf{P}. \quad (14.5)$$

В (14.3) член в подынтегральном выражении формы  $\psi(r_1) \nabla_Q \cdot \mathbf{F}_Q$  преобразуется согласно соотношению

$$\begin{aligned} \int_V \psi \nabla_Q \cdot \mathbf{F}_Q dV_Q &= \int_V [\nabla_Q \cdot (\psi \mathbf{F}_Q) - \mathbf{F}_Q \cdot \nabla_Q \psi] dV_Q = \\ &= \int_S \psi \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_Q dS - \int_V \mathbf{F}_Q \cdot \nabla_Q \psi dV_Q. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Поверхностный интеграл в (14.6) равен нулю, так как  $\mathbf{F} = 0$  вне  $V_0$ .

Кроме того,

$$\lim_{V_0 \rightarrow 0} \int_V \mathbf{F}_Q \cdot \nabla_Q \psi(r_1) dV_Q = -\mathbf{P} \cdot \nabla \psi(r). \quad (14.7)$$

Отсюда для сосредоточенной силы имеем

$$\tilde{\pi}_\mu B_0 = l_1^2 \mathbf{P} \cdot \nabla [r^{-1} (1 - e^{-r/l_1})]. \quad (14.8)$$

Уравнения (14.5) и (14.8) представляют решения уравнения (13.1) для сосредоточенной силы. Если  $l_1^2 = 0$ , тогда  $B_0 = 0$  и полученное решение сводится к решению, найденному в [9]. Если, кроме того,  $l_2^2 = 0$ , то решение сводится к решению Кельвина [4, стр. 183].

В заключение я хочу поблагодарить доктора Р. А. Тупина за многие полезные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ericksen J. L., Truesdell C., Exact theory of stress and strain in rods and shells, *Arch. Ration. Mech. and Analysis*, 1, 295—323 (1958).
2. Cosserat E., Cosserat F., *Théorie des corps déformables*, Paris, Hermann, 1909. О линейной двумерной теории с приложениями см. Schaefer H., Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat-Kontinuums, *Miszellaneen der Angewandten Mechanik*, Berlin, Akademie-Verlag, 1962, p. 277—292.
3. Jeffreys H., Jeffreys B. S., *Methods of mathematical physics*, Cambridge, University Press, Second Edition, 1950.
4. Ляв А., Математическая теория упругости, ОНТИ, М.—Л., 1935.
5. Grioli G., Elasticità asimmetrica, *Ann. mat. pura ed appl.*, ser. IV, 50, 389—417 (1960).
6. Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В., Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц, *Физика тв. тела*, 2, 1399—1409 (1960).
7. Rajagopal E. S., The existence of interfacial couples in infinitesimal elasticity, *Ann. Physik*, 6, 192—201 (1960).
8. Toupin R. A., Elastic materials with couple-stresses, *Arch. Ration. Mech. and Analysis*, 11, 385—414 (1962).
9. Mindlin R. D., Tiersten H. F., Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Arch. Ration. Mech. and Analysis*, 11, 415—448 (1962); русский перевод см. на стр. 80 данного сборника.
10. Mindlin R. D., Influence of couple-stresses on stress-concentrations, *Experimental Mech.*, 3, 1—7 (1963); русский перевод см. на стр. 115 данного сборника.
11. Mindlin R. D., Medick M. A., Extensional vibrations of elastic plates, *J. Appl. Mech.*, 26, 561—569 (1959).
12. Gazis D. C., Wallis R. F., Extensional waves in cubic crystal plates, Proc. 4th U. S. Nat. Cong. Appl. Mech., 1962, p. 161—168.
13. Mindlin R. D., High frequency vibrations of plated, crystal plates, *Progress in Applied Mechanics*, New York, 1963, p. 73—84.
14. Gazis D. C., Wallis R. F., Surface vibrational modes in crystal lattices with complex interatomic interactions, *J. Math. Phys.*, 3, 190—199 (1962).
15. Brockhouse B. N., Iyengar P. K., Normal modes of germanium by neutron spectroscopy, *Phys. Rev.*, 111, 747—754 (1958).
16. Mindlin R. D., Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates, *J. Appl. Phys.*, 22, 316—323 (1951).
17. Mindlin R. D., High frequency vibrations of crystal plates, *Quart. Appl. Math.*, 19, 51—61 (1961).
18. Kane T. R., Mindlin R. D., High frequency extensional vibrations of plates, *J. Appl. Mech.*, 23, 277—282 (1956).

19. Mindlin R. D., Influence of rotatory inertia and shear on flexural vibrations of isotropic, elastic plates, *J. Appl. Mech.*, **18**, 31—38 (1951).
20. Jaramillo T. J., A generalization of the energy function of elasticity theory, Dissertation, Department of Mathematics, University of Chicago, 1929.
21. Mindlin R. D., Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, Proc. First Midwestern Conf. on Solid Mech., Urbana, Illinois, 56—59 (1953).
22. Папкович П. Ф., Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, № 10, 1425—1435 (1932).
23. Mindlin R. D., Note on the Galerkin and Papkovitch stress functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **42**, 373—376 (1936).